

Міністерство освіти і науки України
Національна академія наук України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є Пухова НАН України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Norwegian University of Science and Technology (Gjøvik, Norway)
Lublin University of Technology (Lublin, Poland)
Tashkent State Technical University named
after Islam Karimov (Tashkent, Uzbekistan)
Okan University (Istanbul, Turkey)



СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ, ПРОГНОЗУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ



ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ
9-ї Міжнародної наукової конференції

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка
2020

Редакційна колегія:

- І. М. Конет**, д. ф.-м. н., професор (голова);
В. С. Щирба, к. ф.-м. н., професор кафедри (заступник голови);
І. В. Бейко, д. т. н., професор;
А. Ф. Верлань, д. т. н., професор, член-кор. НАПН України;
А. М. Кух, д.пед. н., професор кафедри;
Ю. В. Теплінський, д. ф.-м. н., професор;
В. А. Федорчук, д. т. н., професор.

Відповідальні секретарі:

- В. А. Іванюк**, к. т. н., доцент;
О. О. Макаревич, провідний фахівець.

С91 **Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації** : тези доповідей 9-ї Міжнародної наукової конференції. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2020. — 136 с.

У збірнику друкуються нові результати досліджень з проблем математичного моделювання, прогнозування та оптимізації.

Для наукових та науково-педагогічних працівників, докторантів, здобувачів, аспірантів і студентів вищих навчальних закладів.

ББК 22.18+22.19

СЕКЦІЯ 1
МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ
ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

УДК 621.793

А. Ю. Андрейцев*, канд. фіз.-мат. наук,

Т. С. Клецька, канд. іст. наук,

І. В. Смирнов**, д-р техн. наук,

А. В. Чорний**, канд. техн. наук

*Державний університет інфраструктури та технологій, м. Київ,

**Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ

**АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ
ЧАСТИНКИ ПОРОШКУ ПІД ЧАС СФЕРОЇДИЗАЦІЇ
В ПЛАЗМОВОМУ ПОТОЦІ**

Для забезпечення багатьох технологічних процесів, таких як 3D друк, газотермічне напилення покриттів, пресування та спікання, до вихідних порошків висувають низку вимог: частинки повинні бути сферичної форми, щільними та компактними, однорідними за гранулометричним складом, високої якості за механічними та хімічними властивостями. Найбільш перспективним способом досягнення таких властивостей є сфероїдизація порошків, отриманих різними методами в плазмовому потоці. Висока температура плазми (до 10000°C), дозволяє розплавляти практично будь-які тугоплавкі метали та сполуки.

Контролюючи такі параметри, як швидкість частинок порошку, траєкторію руху, витрати плазмоутворюючого газу та потужність плазмового потоку, можна отримувати частинки порошку заданого складу зі сферичною формою [1-3].

Для визначення зміни швидкості частинки вздовж дистанції її використали модель, запропоновану в [4].

Рух частинки, що потрапляє в потік газу в загальному вигляді можна записати так

$$W_p \frac{dW_p}{dz} = \frac{3\rho_g C_D}{4\rho_p d_p} (W_g - W_p)^2,$$

де W_p – швидкість частинки; ρ_g – щільність частинки; C_D – коефіцієнт аеродинамічного опору; ρ_g і W_g – відповідно щільність і швидкість газу, а d_p – діаметр частинки; z – шлях, пройдений частинкою.

Швидкість газу в незавантаженому струмені досить точно апроксимується функцією:

$$V'_g = B \exp(-Az).$$

Але на відміну від задачі, розглянутої в [4], частинка повинна досягнути поверхні поглинання не в розплавленому, а твердому стані. Тому дистанція значно збільшується.

Спочатку необхідно було визначити швидкість не завантаженого потоку аргонової плазми та знайти дистанцію, на який вона суттєво зменшиться (стане меншою 5 м/с), тобто оцінити параметри A та B . За умови, що витрати газу складають 70 л/хв, а потужність плазмового потоку – 20 кВт ми отримали $A = 14,05$ $B = 1006,24$ при рівні надійності 0,998. В цьому випадку на дистанції 0,5 м від сопла плазмотрону не перевищує 1 м/с.

Потім потрібно було визначити швидкість частинки порошку на даній дистанції, і якщо вона не перевищуватиме 10 м/с то відповідні параметри плазмотрону є прийнятними. Розрахунок швидкості частинки титану діаметром 10 мкм при витратах порошку – 3 г/хв показав, що швидкість частинки на даній дистанції становить приблизно 2,5 м/с.

Зазначимо, що для отримання необхідних параметрів частинки, необхідно щоб на момент початку затвердіння її швидкість практично не відрізнялась від швидкості плазмового потоку. Тому наступним кроком наших досліджень буде дослідження даної проблеми.

Список використаних джерел:

1. Chaturvedi V. Thermal plasmas pheroidization of aluminum oxide and characterization of the spheroidized alumina powder / V. Chaturvedi, P.V. Ananthapadmanabhan., Y. Chakravarthy, and other // *Ceramics International*. – 2014. – Vol. 40, № 6. – P. 8273-8279.
2. Zhu H.L. A comparative study on radio-frequency thermal plasmas pheroidization for two types of alumina ceramic powder. *Advanced* / H.L. Zhu, H.H. Tong, F.Z. Yang and other // *Materials Research*. – 2014. – Vol. 1058. – P. 221-225.
3. Tong J.B. Fabrication of micro-fine spherical high Nb containing TiAl alloy powder based on reaction synthesis and RF plasmas pheroidization / J.B. Tong, X. Lu, C.C. Liu and other // *Powder Technology*. – 2015. – Vol. 283. – P. 9-15.
4. Андрейцев А.Ю. Моделирование процессов руху та нагріву частинки при плазмовому напилюванні / А.Ю. Андрейцев, І.В. Смирнов // *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: Збірник наукових праць (за матеріалами міжнародної науково-методичної конференції)*. – Київ ; Кам'янець-Подільський, 2006. – С. 77-82.

В. М. Варганян*, д-р техн. наук,

І. В. Дронова-Варганян**, канд. техн. наук

*Національний аерокосмічний університет ім. М.Є Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», м. Харків,

**Харківський Національний університет радіоелектроніки, м. Харків

ВИКОРИСТАННЯ ЛІНІЙНОЇ НОРМОВАНОЇ ДІАГРАМИ ДЛЯ АНАЛІЗУ СТРАТЕГІЧНИХ ЗОН ГОСПОДАРЮВАННЯ

Метод VCGMatrix (Матриця VCG) – один з найвідоміших інструментів управління бізнесом. Матриця Бостонської консалтингової групи завоювала популярність завдяки простоті і наочності аналізу стратегічних зон господарювання (СЗГ), підрозділів компаній, на основі двох об'єктивних чинників: їх частки на ринку та темпу ринкового зростання.

У літературі відзначаються наступні основні переваги моделі ВКГ в порівнянні з іншими стратегічними матрицями: наочність отриманих результатів і простота побудови; проста і доступність для розуміння; легкість розробки стратегії для бізнес-одиниць та інвестиційної політики.

Разом з тим, наводяться і головні недоліки, серед яких: прийняття стратегічних рішень на основі тільки двох факторів – частки на ринку і темпів ринкового зростання.

Метою роботи є використання лінійної нормованої діаграми в оцінці стратегічної позиції СЗГ для підвищення інформативності ВКГ [1, с.157-165].

Апарат лінійних нормованих діаграм (ЛНД) являє собою стовпчасту діаграму метрик p_i , $i = \overline{1, n}$, за якими оцінюється об'єкт господарської діяльності з точки зору конкурентоспроможності, причому ширина окремого стовпця чисельне дорівнює відповідному коефіцієнту вагомості α_i i -й прийнятої метрики (рис. 1).

Площа еталонної ЛНД передбачається, що дорівнює одиниці

$$S_{ND}^* = 1,$$

при цьому площа фігури, утвореної складовими частинами ЛНД, чисельне дорівнює значенню деякого узагальненого показника, що характеризує повноту реалізації функцій підприємства по відношенню до обраних конкурентам:

$$S_{ND} = P_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i .$$

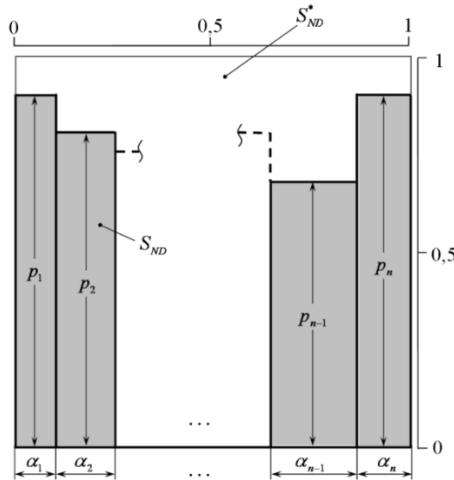


Рис. 1. Загальний вигляд лінійної нормованої діаграми

Вираз для розриву R в цьому випадку виглядає наступним

$$R = 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i .$$

Крім описаних графоаналітичних функцій, елементи діаграм можуть виступати функціоналом в різного роду завданнях оптимізації, що підтверджує їх практичну значимість і розширює діапазон застосовності в задачах управління конкурентоспроможністю.

Запропонований метод вибору економічно доцільного варіанта стратегічних рішень передбачає широке застосування сучасних інформаційних технологій.

Висока інформативність отриманих результатів для процесу прийняття управлінських рішень визначається можливістю візуалізації кордонів ефективності варіантів процесів, де особлива увага приділена найбільш специфічним ситуацій.

Всі необхідні розрахунки, як і візуалізація послідовних дій, можуть бути виконані в автоматичному (автоматизованому) режимі з використання математичних пакетів Microsoft Excel або MAPLE.

Список використаних джерел:

1. Романенков Ю.А. Средства инфографического анализа агрегированных показателей многомерных объектов и систем / Ю.А. Романенков, В.М. Вартамян, Ю.Л. Прончаков, Т.Г. Зейниев // Системи обробки інформації. – 2016. – № 8. – С. 157-165.

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СЖИМАЕМОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Задачи о поведении двухслойного упругого полупространства при воздействии подвижной нагрузки изучались как в точной постановке, так и с использованием различных приближенных моделей двухслойной упругой среды. В данной работе исследуется двумерная задача о воздействии подвижной нагрузки на границу сжимаемого полупространства с начальными напряжениями и с неоднородностью в виде тонкого поверхностного слоя. Полупространство предполагается однородным и изотропным в естественном состоянии. Начальное напряженно-деформированное состояние полупространства определяется следующими компонентами вектора перемещений и тензора обобщенных напряжений:

$$u_j^0 = \delta_{ij} (\lambda_i + 1) x_i; \quad \sigma_{ii}^{*0} \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где λ_i – удлинения ($\lambda_i = \text{const}$) вдоль осей лагранжевой системы координат x_i , совпадающей в естественном состоянии с декартовой системой координат. Наряду с лагранжевыми координатами введем декартовые координаты ξ_i начального деформированного состояния, связанные с координатами x_i соотношениями $\xi_i = \lambda_i x_i$.

Слой глубиной h моделируем сосредоточенными массами плотности ρ_1 . К свободной границе слоя приложена движущаяся в положительном направлении оси $O\xi_1$ под углом α нагрузка P . Нагрузка движется с постоянной скоростью v и не зависит от координаты ξ_3 . Такая нагрузка вызывает в рассматриваемой слоистой среде плоское деформированное состояние.

Для решения задачи используются соотношения линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями [1].

Предполагая, что картина деформаций инвариантна относительно времени в движущейся вместе с нагрузкой системе координат (y_1, y_2) , где $y_1 = \xi_1 - vt$; $y_2 = \xi_2$, уравнение установившегося движения полупространства через функцию $\chi(y_1, y_2)$ можно записать в виде

$$\left(\eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left(\eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(j)} = 0; \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

Корни η_1 и η_2 определяются из уравнения

$$\eta^4 + 2A\eta^2 + A_1 = 0, \quad (3)$$

где коэффициенты A и A_1 в случае сжимаемого материала определяются из соотношений

$$2A\tilde{\omega}_{2222}\tilde{\omega}_{2112} = \tilde{\omega}_{2222}(\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho}v^2) + \tilde{\omega}_{2112}(\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho}v^2) - (\tilde{\omega}_{1122} + \tilde{\omega}_{1212})^2; \quad (4)$$

$$2A_1\tilde{\omega}_{2222}\tilde{\omega}_{2112} = (\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho}v^2)(\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho}v^2); \quad \tilde{\rho}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \rho.$$

Рассмотрен жесткий контакт между слоем и полупространством при $y_2 = 0$:

$$\tilde{Q}_{21} = P\delta(\xi_1 - vt)\cos\alpha + h\rho_1\ddot{u}_1; \quad \tilde{Q}_{22} = P\delta(\xi_1 - vt)\sin\alpha + h\rho_1\ddot{u}_2. \quad (5)$$

В формулах (4) и (5) ρ – плотность материала полупространства в естественном состоянии; u_1 и u_2 – составляющие вектора перемещений в полупространстве; \tilde{Q}_{ij} – составляющие тензора напряжений, отнесенные к единице площади в начальном деформированном состоянии; $\tilde{\omega}_{ij\alpha\beta}$ – компоненты тензора, зависящего от формы упругого потенциала, отнесенные к единице площади в начальном деформированном состоянии.

Фундаментальное решение задачи получено с помощью метода интегральных преобразований Фурье.

Численные исследования проведены в рамках теории конечных начальных деформаций для сжимаемого материала с упругим потенциалом гармонического типа.

Список использованной литературы:

1. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями / А.Н. Гузь. – Киев : «А.С.К.», 2004. – 672 с.

ОЦІНКА ЗНИЗУРОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглядається задача Коші

$$y'' + R(t)y' + P(t)y = S(t)y, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \quad (1)$$

де y – n -вимірний вектор, $R(t) = [r_k(t)]$, $P(t) = [p_k(t)]$ – діагональні $n \times n$ матриці з елементами $r_k(t)$, $p_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), що мають відповідно неперервні похідні третього та другого порядку при $t \geq t_0$, $n \times n$ матриця $S(t)$ має своїми елементами неперервні при $t \geq t_0$ функції. Метою даної роботи є встановлення оцінки знизу розв'язків цієї задачі.

Будемо вважати, що функції $q_k(t) = p_k(t) - \frac{1}{2}r'_k(t) - \frac{1}{4}r_k^2(t)$ при всіх $t \geq t_0$, $k = 1, 2, \dots, n$ задовольняють умові $q_k(t) > 0$. Тоді на основі узагальненого методу диференціального інваріанту [1] розв'язок $y(t)$ задачі (1) разом з похідними $y'(t)$ буде розв'язком наступного інтегрального рівняння

$$x(t) = U(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t U(t, \tau)F(\tau)x(\tau)d\tau \quad (2)$$

Тут введено позначення

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix}, \quad U(t, t_0) = \begin{bmatrix} U_{11}(t, t_0) & U_{12}(t, t_0) \\ U_{21}(t, t_0) & U_{22}(t, t_0) \end{bmatrix},$$

$$U_{11}(t, t_0) = V(t, t_0)[-V^{-1}(t_0, t_0)T_1(t, t_0) + V^{-1}(t_0, t_0)T_2(t, t_0)],$$

$$U_{12}(t, t_0) = V(t, t_0)V(t_0, t_0)T_1(t, t_0), \quad U_{21}(t, t_0) = U'_{11}(t, t_0),$$

$$U_{22}(t, t_0) = U'_{12}(t, t_0), \quad F(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S(t) + \eta(t) & 0 \end{bmatrix},$$

у яких $V(t, t_0)$, $\eta(t)$, $T_1(t, t_0)$, $T_2(t, t_0)$ – діагональні $n \times n$ матриці з елементами $v_k(t, t_0)$, $\eta_k(t)$, $\sin \varphi_k(t, t_0)$, $\cos \varphi_k(t, t_0)$ відповідно, де

$$v_k(t, t_0) = q_k^{-\frac{1}{4}}(t) \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t r_k(s)ds\right\}, \quad q_k(t) = p_k(t) - \frac{1}{2}r'_k(t) - \frac{1}{4}r_k^2(t),$$

$$\eta_k(t) = \frac{1}{4} q_k^{-1}(t) q_k''(t) - \frac{5}{16} [q_k^{-1}(t) q_k'(t)]^2, \quad \varphi_k(t, t_0) = \int_{t_0}^t \sqrt{q_k(s)} ds,$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

Матриця $U(t, \tau)$ згідно з узагальненим методом диференціального інваріанту є матрицею Коші рівняння $U' + A(t)U = 0$, де

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & -E_n \\ P(t) + \eta(t) & R(t) \end{bmatrix}, \text{ а тому } U(t, \tau) = U(t, t_0)U^{-1}(\tau, t_0). \text{ Застосує-}$$

мо тепер по відношенню до (2) лему Лангенхопа [2, с.35] враховуючи, що згідно з нею

$$\left| U^{-1}(t, t_0)F(t)U(t, t_0)z(t) \right| \leq \left| U^{-1}(t, t_0)F(t)U(t, t_0) \right| |z(t)|$$

і отже $g(s) = s$, $G(u) = \ln \frac{u}{u_0}$, $G^{-1}(u) = u_0 \exp(u)$. Остаточо на основі

згаданої леми одержуємо наступну оцінку знизу

$$|x(t)| \geq \frac{|x_0|}{|U^{-1}(t, t_0)|} \exp \left\{ - \int_{t_0}^t |U^{-1}(s, t_0)F(s)U(s, t_0)| ds \right\}$$

для всіх $t \geq t_0$, за допомогою якої можна встановлювати необхідні умови стійкості за Ляпуновим тривіального розв'язку задачі (1).

Список використаних джерел:

1. Довгай В.В. Поширення узагальненого методу диференціального інваріанту на системи диференціальних рівнянь другого порядку / В.В. Довгай // Матеріали XVII міжн. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, 19-20 травня 2016. – Київ : НТУУ «КПІ», 2016. – Т. I. – С. 98-100.
2. Павлюк І.А. Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку / І.А. Павлюк. – К. : Вид-во Київського університету, 1970. – 208 с.

UDC 519.7

E. V. Ivohin, Dr. Sc., Professor,

L. T. Adzhubey, PhD., Associate Professor,

Yu. O. Naumenko, PhD.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine.

SOME DIFFUSION HYBRID MODELS OF INFORMATION DISTRIBUTION PROCESSES DYNAMICS

Within the modern information society, the generation of information flows is usually aimed at a particular consumer, has a clearly defined target orientation, which is determined by the subject area of human interest. The amount of information received significantly exceeds the consumer's capabilities and, as a consequence, different ideas and opinions begin to compete with limited consumer attention. It is clear that under such conditions, special attention is paid to methods that allow us to model the processes of information dissemination dynamics [1].

The substantiation of the correctness of the use of diffusion models for describing the dynamics of information dissemination processes, which is presented in [2], allows to extend the simulation result by taking into account the hybridity of finite models. It is advisable to consider the hybridity of the structure of the model with tracking the dynamics of the quantitative composition of the target groups, within which the level of information dissemination and impact is monitored.

Let $u(x, t)$, $0 \leq u(x, t) \leq 1$, $t \geq 0$ be the function of the level of information dissemination within a part x , $0 \leq x \leq 1$, of target group population.

We will model changes in the concentration of information in a population with the help of the diffusion equation [2], assuming that this process is similar to the spread of a substance over a specific time period $t \in [0, T]$ and can be described by a scalar equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

with the initial condition $u(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq 1$, and the boundary conditions $u(0, t) = u_0 \geq 0$, $u(1, t) = 0$, $t \in [0, T]$, where $k(t)$ – is the coefficient characterizing the rate of information penetration (analogous to the diffusion coefficient).

We believe that the contingent of the target population is formed of 3 subgroups based on the perception of information. We identify the part of the population that is sensitive to the information influence $y_1(t)$, the part which is already under the influence of information $y_2(t)$ and the part

which is indifferent to information influence $y_3(t)$. Then, using the Bailey model [8], the dissemination of appearance information

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= -y_1(t)y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) &= y_1(t)y_2(t) - y_2(t), \\ \dot{y}_3(t) &= y_2(t),\end{aligned}\tag{2}$$

with the initial condition $y_1(0) = y_1^0; y_2(0) = y_2^0; y_3(0) = y_3^0$, where cure and disease rates are considered to be 1, $y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = 1, t \geq 0$, there a system of differential equations that describes the process of information dissemination in the target population can be written. Their solutions determine the dynamics of the rate values of individual subgroups.

With such assumptions, the maximum threshold value of the part of the population that is affected by the information, $x_T, 0 \leq x_T(t) \leq 1$, will depend on the time, so we have $0 \leq x \leq x_T(t), x_T(t) = y_1(t) + y_2(t)$, where $y_1(t), y_2(t)$ – are the components of the solution of system (2).

In this paper we propose an approach to the construction of hybrid mathematical models of the dynamics of information processes propagation in the target population, taking into account and without taking into account the impact on the process of information dissemination by external sources and other means. Formalization is based on the idea of using hybrid mathematical models, which consist of the diffusion (penetration) equation and dynamic models, which describe the processes of change in the size of the contingent of the information dissemination environment. A scalar solution for a one-dimensional representation of a group contingent is considered. Various cases of formalization of external influence on the process of information dissemination are considered.

References:

1. Smith R. Modeling Disease Ecology with Mathematics / R. Smith. – Ottawa : American Institute of Mathematical Sciences, 2017. – 291 p.
2. Ivohin E.V. About the use of diffusion process models for description of information extension dynamics / E.V. Ivokhin, L.T. Adzhubey // Scientific Bulletin of Uzhgorod University. Series of Mathematics and Informatics. – 2019. – №1 (34). – P. 86-93.

І. І. Клевчук, д-р фіз.-мат. наук,

М. В. Гритчук

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПОБУДОВА ОБЛАСТЕЙ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ БАГАТЬМА ЗАПІЗНЕННЯМИ

Розглянемо рівняння

$$dz / dt = a_1 z(t-1) + a_2 z(t-2) + \dots + a_n z(t-n). \quad (1)$$

Для того, щоб нульовий розв'язок рівняння (1) був асимптотично-стійким, необхідно і досить, щоб всі корені характеристичного рівняння

$$\lambda = a_1 e^{-\lambda} + a_2 e^{-2\lambda} + \dots + a_n e^{-n\lambda} \quad (2)$$

лежали в лівій півплощині $Re \lambda < 0$.

Означення. Областю стійкості рівняння (2) називається множина точок $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n$, для яких всі корені рівняння (2) задовольняють умову $Re \lambda < 0$.

Теорема [1]. Область стійкості рівняння (2) обмежена.

Для знаходження обмежень, які задовольняють точки області стійкості, використано принцип аргументу.

Лема. Якщо вектор $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n$ належить області стійкості рівняння (2), то $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 0$.

Застосуємо метод D -розбиттів до рівняння із двома запізненнями

$$\lambda = a e^{-m\lambda} + b e^{-n\lambda}, \quad (3)$$

дет тап – взаємно прості натуральні числа, $m < n$. Рівняння (3) має нульовий корінь, якщо $a + b = 0$. Ця пряма і є однією з ліній, що утворюють межу D -розбиття. Нехай тепер рівняння (3) має суто уявний корінь $\lambda = i y$, $y \neq 0$:

$$a (\cos my - i \sin my) + b (\cos ny - i \sin ny) = i y.$$

Відокремлюючи дійсну і уявну частини, одержимо систему

$$a \cos my + b \cos ny = 0, \quad a \sin my + b \sin ny = -y. \quad (4)$$

Якщо $\sin(n-m)y \neq 0$, то рівняння ліній D -розбиття в параметричній формі матимуть вигляд

$$a = \frac{y \cos ny}{\sin(n-m)y}, \quad b = -\frac{y \cos my}{\sin(n-m)y}$$

Система (4) може бути сумісною також у випадку, коли її визначник $\sin(n-m)y = 0$. Це можливо при $y \neq 0$ тоді і тільки тоді, коли $\cos my = \cos ny = 0$, де m та n непарні. Тоді рівняння $a \sin my + b \sin ny = -y$ буде визначати прямі, кут нахилу яких рівний $\frac{\pi}{4}$ або $-\frac{\pi}{4}$.

У випадку, коли $m=1$, n – непарне натуральне число, $n > 1$ область стійкості обмежена $\frac{(n+3)}{2}$ дугами ліній, серед яких дві дуги будуть відрізками прямих. Інші дуги одержуються із параметричного зображення

$$a = \frac{y \cos ny}{\sin(n-1)y}, \quad b = -\frac{y \cos y}{\sin(n-1)y}.$$

Для рівняння

$$\lambda = c + a e^{-m\lambda} + b e^{-n\lambda}$$

область стійкості обмежена площиною $a + b + c = 0$ поверхнями

$$a = \frac{y \cos ny - c \sin ny}{\sin(n-m)y}, \quad b = \frac{c \sin my - y \cos my}{\sin(n-m)y}.$$

Якщо зафіксувати значення c , $-\infty < c < 1,5$, то одержимо лінії рівня області стійкості.

Для рівняння із трьома запізненнями

$$\lambda = ce^{-p\lambda} + ae^{-m\lambda} + be^{-n\lambda}$$

область стійкості обмежена площиною $a + b + c = 0$ і поверхнями

$$a = \frac{y \cos ny - c \sin(n-p)y}{\sin(n-m)y}, \quad b = \frac{c \sin(m-p)y - y \cos my}{\sin(n-m)y}.$$

Якщо зафіксувати значення c , то одержимо лінії рівня обмеженої області стійкості.

На комп'ютері здійснена побудова областей стійкості на площині та в просторі.

Список використаних джерел:

1. Клевчук І.І. Побудова областей стійкості лінійних диференціально-різницьових рівнянь / І.І. Клевчук, С.А. Пернай, І.М. Черевко // Доп. НАН України. – 2012. – № 7. – С. 28-34.

К. М. Ключка, канд. техн. наук,
С. Ю. Протасов, канд. техн. наук

Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси

ФОРМУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ЗІ СТРУКТУРОЮ, ЩО ЗМІНЮЄТЬСЯ

Розглянутий у доповіді метод формування інтегральних рівнянь пов'язаний з виділенням лінійних елементів електричного кола в один чи кілька лінійних багатополосників (ЛБП) та об'єднанням ідеальних ключів структури, що змінюється в один чи кілька комутаторів. ЛБП в такому випадку описуються системою алгебро-диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, що формується один раз при розв'язанні задачі.

Основу моделі вказаної системи, складає частина структури, що складається з комутатора і лінійних багатополосників, до якої і відноситься метод інтегральних рівнянь [1, с.20].

ЛБП описуються системою лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, розв'язання якої можливо записати у вигляді

$$X_i(t) = \Phi_i(t)X_i(0) + \int_0^t \Phi_i(t-\tau)B_iU_i(\tau)d\tau, \quad (1)$$

де X – вектор змінних стану; U – вектор джерел; B – матриці коефіцієнтів; Φ – фундаментальний розв'язок; i – індекс, що вказує на належність до багатополосника.

Реакцію ЛБП на дію джерела можна представити у вигляді

$$i_i = C_i\Phi_i(t)X_i(0) + \int_0^t g_i(t-\tau)U_i(\tau)d\tau + D_iU_i(t), \quad (2)$$

де $g_i = C_i\Phi_iB_i$ – перехідна імпульсна характеристика i -го ЛБП.

Для ілюстрації методу розглянемо аналіз системи, що складається з двох ЛБП (рис.1 а). При аналізі системи в цілому кожен лінійний двополосник можна замінити однією еквівалентною віткою, що описується рівнянням (2). При цьому від початкового ланцюга переходимо до розгляду еквівалентного ланцюга, вітки якого описуються інтегральними співвідношеннями. Для кожного стану комутатора після видалення розімкнених ключів і об'єднання вершин, зв'язаних замкнутими ключами, має місце частковий еквівалентний ланцюг, який для системи, що наведена на рис. 1 а, складається тільки з двох еквівалентних віток, сполучених так, як показано на рис. 1 б.

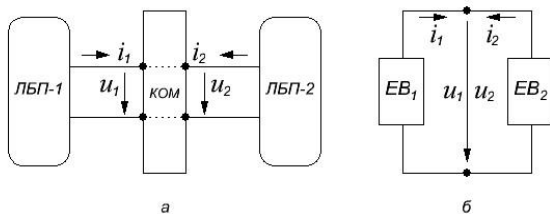


Рис. 1. Структура моделі з двома ЛБП

Рівняння з'єднання еквівалентних віток тут мають простий вигляд

$$i_1 + i_2 = 0, U_1 + U_2 = 0. \quad (3)$$

Розв'язуючи спільно рівняння (2) і (3), отримаємо

$$DV(t) + \int_0^t G(t-\tau)V(\tau)d\tau = F(t), \quad (4)$$

де

$$G = g_1 + g_2, V = U_1 = U_2, D = D_1 + D_2, F(t) = S(t)X(0),$$

$$S(t) = [C_1\Phi_1(t) \ C_2\Phi_2(t)], X_0 = (i_1(0), i_2(0))^T.$$

Рівняння (4) є інтегральним рівнянням відносно тільки однієї невідомої функції V . Таким чином, отримаємо опис схеми з двома лінійними блоками лінійним інтегральним рівнянням з однією невідомою функцією і виразами для змінних стану (1) кожного двополюсника окремо. Використання структурних особливостей аналізованої системи (аналіз її по частинах) приводить до формулювання задачі у вигляді лінійних інтегральних рівнянь. Розв'язання інтегрального рівняння (4) може вестися будь-яким з відомих методів, зокрема, методом квадратур [1, с.35].

Список використаних джерел:

1. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К. : Нукова думка, 1986. – 543 с.

G. Kuduk

Graduate of University of Rzeszow

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR SYSTEM OF EVOLUTION EQUATIONS

Let H be a linear space, and A be linear operator acting in it $A: H \rightarrow H$. Denote be $x(\lambda)$ to be an eigenvector of the operator A , which corresponds to an eigenvalue $\lambda \in C$

We consider problem for system of equations

$$\frac{dU_i}{dt} + \sum_{j=1}^2 a_{ij} a(A) U_j(t) = 0, \quad (1)$$

satisfies integral conditions

$$\int_0^T U_i(t) dt = \varphi_i, \quad (2)$$

where $a_{ij}(A)$ are abstract operators, white entire symbols $a_{ij}(\lambda)$, $\lambda \in C$, $T > 0$.

Let be $\eta(\lambda) = \int_0^T W'(t, \lambda) dt$ is a certain function, $W(t, \lambda)$ is a solution of the equation $L\left(\frac{d}{dt}\right)W(t, \lambda) = 0$, satisfies conditions $W'(t, \lambda)|_{t=0} = 1$, $W(t, \lambda)|_{t=0} = 0$.

Denote be

$$P = \{\lambda \in C : \eta(\lambda) = 0\}, \quad (3)$$

Definition. We shall say that vector φ from H belongs $L \subseteq H$ if on $L \subseteq C$ there exist depending on φ linear operator $R_\varphi(\lambda): H \rightarrow H$ $\lambda \in \Lambda$, and measure $\mu_\varphi(\lambda)$ such that

$$\varphi = \int_{\Lambda} R_\varphi(\lambda) x(\lambda) d\mu_\varphi(\lambda).$$

Theorem. Let in the conditions (2) the vectors $\varphi_i(\lambda)$, belong to L i.e. $\varphi_i(\lambda)$ can be represented in the form $\varphi_i = \int_{\Lambda} R_{\varphi_i}(\lambda) x(\lambda) d\mu_{\varphi_i}(\lambda)$, $i = 1, 2$ where $\lambda \in \Lambda - P$, where P is set (3). Then the formula

$$U_i(t) = \int_{\Lambda} R_{\varphi_i}(\lambda) \left\{ \frac{1}{\eta(\lambda)} \left(W'(t, \lambda) - a_{3-i, 3-i}(\lambda) W(t, \lambda) \right) x(\lambda) \right\} d\mu_{\varphi_i}(\lambda) +$$

$$+\int_{\Lambda} R_{\varphi_i}(\lambda) \left\{ \frac{1}{\eta(\lambda)} (a_{i,3-i}(\lambda)W(t, \lambda))x(\lambda) \right\} d\mu_{\varphi_{3-i}}(\lambda)$$

defines formal solution of the problem (1), (2).

By means of the differential symbol method [2] we construct a solution of the problem (1), (2). This problem is a continuous works [1]

References:

1. Kalenyuk P.I. Problem with integral condition for differential-operator equation / P.I. Kalenyuk, G. Kuduk, I.V. Kohut, Z.M. Nytrebych // J. Math. Sci. – 2015. – №208. – P. 267-276.
2. Kalenyuk P.I. Generalized Scheme of Separation of Variables / P.I. Kalenyuk, Z.M. Nytrebych // Differential-Symbol Method. – Publishing House of Lviv Polytechnic Natyonal University, 2002. – 292 p. (in Ukrainian).

УДК 681.5.015.52

В. І. Ломовой,

В. Д. Павленко, д-р техн. наук

Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса

МЕТОД ІДЕНТИФІКАЦІЇ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ НА ОСНОВІ МОДЕЛІ ВОЛЬТЕРРИ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ТЕСТОВИХ ПОЛІГАРМОНІЧНИХ СИГНАЛІВ

Ідентифікація нелінійної динамічної системи (НДС) на основі моделі Вольтерри в частотній області з використанням тестових полігармонічних сигналів полягає у визначенні на заданих частотах модуля і фази багатовимірних передаточних функцій (ПФ) [1]. Процедура ідентифікації складається з трьох етапів: 1) отримання даних експериментальних досліджень НДС «вхід-вихід»; 2) декомпозиції відгуку НДС на парціальні складові (ПС) n -го порядку; 3) перетворення Фур'є ПС n -го порядку і фільтрація інформативних гармонік зі спектру Фур'є ПС (у просторі Фур'є-зображень) [2].

Запропоновано компенсаційний метод декомпозиції відгуку НДС на ПС n -го порядку на основі моделі Вольтерри в частотній області. Метод ідентифікації ґрунтується на використанні тестових полігармонічних сигналів виду:

$$x(t) = A \sum_{k=1}^n \cos(\omega_k t) = \frac{A}{2} \sum_{k=1}^n (e^{j\omega_k t} + e^{-j\omega_k t}), \quad (1)$$

де n – порядок ПФ, що визначається; A , ω_k – амплітуда і частота k -ої гармоніки.

Доведено співвідношення, що задає обчислювальний алгоритм експериментального визначення ПС відгуку НДС з одним входом і одним виходом.

Твердження 1. Нехай тестові впливи являють собою суму n тестових сигналів $a_1x(t), \dots, a_nx(t)$, де a_1, \dots, a_n – різні дійсні числа, що задовольняють умові $0 < |aj| \leq 1, j = 1, 2, \dots, n$, тоді оцінка ПС відгуку НДС n -го порядку

$$\hat{y}_n[x(t)] = \left(n! \prod_{k=1}^n a_k \right)^{-1} \cdot \sum_{\theta_1, \dots, \theta_n=0}^1 (-1)^{n+\sum_{k=1}^n \theta_k} y \left[\sum_{k=1}^n \theta_k a_k x(t) \right] = \quad (2)$$

$$= y_n[x(t)] + \Delta_{n+1}(a_1, \dots, a_n),$$

де $y \left[\sum_{k=1}^n \theta_k a_k x(t) \right]$ – відгук НДС, вимірюваний в момент часу t , при дії

на вході тестового полігармонічного сигналу $\sum_{k=1}^n \theta_k a_k x(t)$, причому $y(0) = 0$; $\Delta_{n+1}(a_1, \dots, a_n)$ – методична похибка, яка залежить від значень амплітуд тестових сигналів a_1, \dots, a_n , при цьому $\Delta_{n+1}(a_1, \dots, a_n) = o(a_{max})$, $a_{max} = \max\{a_1, \dots, a_n\}$ при $a_{max} \rightarrow 0$.

Якщо $a_1 = \dots = a_n = a$, то

$$\hat{y}_n[x(t)] = \frac{1}{n! a^n} \cdot \sum_{\theta_1, \dots, \theta_n=0}^1 (-1)^{n+\sum_{k=1}^n \theta_k} y \left[\sum_{k=1}^n \theta_k a x(t) \right] = y_n[x(t)] + \Delta_{n+1}(a).$$

При зменшенні амплітуди a тестових сигналів зменшується методична похибка визначення ПС, але при цьому зростає відносна похибка вимірювань. Отже, існує оптимальне значення амплітуди a_0 , при якій досягається мінімальна похибка експериментального визначення ПС, що дає змогу поставити задачу регуляризації процедури ідентифікації, використовуючи в якості параметра регуляризації амплітуди a тестових полігармонічних сигналів. Це дозволяє підвищити точність ідентифікації при практичній реалізації методу.

Запропонований формалізм узагальнює відомий компенсаційний метод ідентифікації НДС у часовій області з використанням імпульсів або сходенок в тестовій послідовності [3]. Це дозволяє застосовувати компенсаційний метод в процедурі ідентифікації НДС в частотній області на етапі декомпозиції відгуку на ПС при використанні тестових полігармонічних сигналів.

Список використаних джерел:

1. Pavlenko V. Modified Approximation Method for Identification of Nonlinear Systems Using Volterra Models in Frequency Domain / V. Pavlenko, V. Spe-

- ranskyu, V. Piyin, V. Lomovoy // Applied Mathematics in Electrical and Computer Engineering: Proc. Of the AMERICAN-MATH' 12 & CSST 12 & CEA'12, Harvard, Cambridge, USA, January 25-27, 2012. – Published by WSEAS Press, 2012. – P. 423-428.
2. Lomovoy V.I. Identification Nonlinear Dynamic Systems based on Volterra Polynomials with using Polyharmonic Test Signals / V.I. Iomovoy, V.D. Pavlenko // Herald of the National Technical University «KhPI». Subject Issue: Information Science and Modelling. – Kharkov : NTU «KhPI». – 2019. – №13 (1338). – P. 65-75.
 3. Pavlenko V.D. Deterministic Identification Methods for Nonlinear Dynamical Systems based on the Volterra Model / V.D. Pavlenko, S.V. Pavlenko // Applied Aspects of Information Technology. – 2018. – №1 (01). – P. 9-29.

УДК 517.925

О. В. Осипова, аспірант,

А. С. Перцов, канд. фіз. мат. наук,

І. М. Червко, д-р фіз. мат. наук

Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПРО РОЗЩЕПЛЕННЯ ТА ДЕКОМПОЗИЦІЮ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ БАГАТОТЕМПОВИХ СИСТЕМ

У роботі досліджується схема декомпозиції лінійних сингулярно збурених систем з багатьма малими параметрами, що базується на ідеях теорії інтегральних многовидів повільних та швидких змінних. Розщеплення сингулярно збурених систем з одним малим параметром розглядають в [1-2], а для систем з багатьма малими параметрами в [3-4].

Розглянемо лінійну сингулярно збурену багатотемпову систему

$$\prod_{j=0}^i \varepsilon_j \dot{x}_i = \sum_{j=0}^k A_{ij} x_j, \quad i = \overline{0, k}, \quad (1)$$

де $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = \overline{0, k}$, $A_{ij} = A_{ij}(t)$, $i, j = \overline{0, k}$, – матриці розмірностей $n_i \times n_j$, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ – малі додатні параметри.

Нехай для системи (1) справджуються припущення:

- матриці $A_{ij}(t)$, $i, j = \overline{0, k}$, рівномірно обмежені для $t \in \mathbb{R}$;
- власні значення $\lambda_i = \lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n_j}$, матриць $A_{jj}(t)$, $j = \overline{0, k}$, задовольняють нерівність $\text{Re } \lambda_i \leq -2\beta < 0$.

Застосовуючи метод інтегральних многовидів швидких та повільних змінних при виконанні умов 1)-2) та достатньо малих

$\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, k$ в роботі [4] запропонована схема побудови заміни змінних за допомогою якої система (1) за $k + 1$ крок розщеплюється на швидку та повільну підсистеми

$$\begin{aligned} \dot{y}_0^k &= B_{00}^k y_0^k, \\ \prod_{j=0}^i \varepsilon_j y_i^{k+1-i} &= B_{ii}^{k+1-i} y_i^{k+1-i}, \quad i = \overline{0, k}. \end{aligned} \quad (2)$$

Точний вигляд розщеплюючого перетворення вдається знайти тільки у найпростіших випадках. У роботах [5-6] запропонована методика побудови асимптотичних розкладів коефіцієнтів розщеплюючого перетворення у вигляді рекурентних алгебраїчних співвідношень.

Для тестової модельної лінійної сингулярно збуреної системи з двома малими параметрами побудовано нульове і перше наближення розщепленої системи (2). На основі розщеплюючого перетворення знайдено початкові умови для нульового і першого наближення за початковими умовами вихідної системи (1). Здійснено числове моделювання для тестової модельної задачі та встановлено точність наближення її розв'язку розв'язками систем нульового та першого наближення.

Список використаних джерел:

1. Sobolev V.A. Decomposition of linear singularly perturbed systems / V.A. Sobolev // Acta Math. Hung. – 1987. – Vol. 49, №3-4. – P. 365-376.
2. Schepakina E.A., Sobolev V.A., Mortell M.P. Singular Perturbations: Introduction to system or der reduction methods with applications / E.A. Schepakina, V.A. Sobolev, M.P. Mortell. – Berlin : Springer, 2014. – 224 p.
3. Воропаева Н.В. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем / Н.В. Воропаева, В.А. Соболев. – М. : Физматлит, 2009. – 255 с.
4. Осипова О.В. Розщеплення різнотемпових сингулярно збурених лінійних систем / О.В. Осипова, І.М. Черевко // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту, серія «Математика», 2012. – Вип 2. – №1. – С. 78-83.
5. Осипова О.В. Асимптотична декомпозиція лінійних сингулярно збурених систем / О.В. Осипова, І.М. Черевко // Буковинський математичний журнал. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2013. – № 3-4. – С. 114-118.
6. Cherevko I. Asymptotic decomposition of linear singularly perturbed multiscale systems / I. Cherevko, O. Osypova // Miskolc Mathematical Notes. – 2015. – № 2. – P. 729-745.

Л. Л. Прокоф'єва, старший викладач,

Д. О. Соколов, студент

Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса

ОСОБЛИВОСТІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ФРОНТАЛЬНОГО ПРОСУВАННЯ ТА МІЖФАЗОВИХ ПЕРЕХОДІВ У ГАЗО-НАФТОВИХ СУМІШАХ

Виконано дослідження гладкості фронту поділу компонент (фаз) при фільтрації багатокомпонентних (гетерогенних) систем, які представлено газо-нафтовими сумішами за час дифузійного руху. Причому, ці суміші проявляють в процесі фільтрації (дифузії) суто виражений нелінійний («аномальний») характер, тобто не підпорядковуються лінійному закону фільтрації Дарсі [1, с.12]. Нелінійність, в даному випадку, зумовлено наявністю граничного градієнту тиску $G_{гр}$, до подолання якого поточним значенням пластового тиску $P = P(t, z)$ не спостерігається фільтраційного (дифузійного) руху газо-нафтової суміші. Фізично це означає нульову швидкість дифузії $\varpi = 0$, якщо змушуюча сила (тиск P в області Ω) приймає значення $P < G_{гр}$.

Основна проблематика математичного моделювання фільтрації газо-нафтових сумішей визначається визначенням геометричного просування фронту фільтраційного руху та положенням між фазових переходів в системі «газ – нафта». При цьому просування фронту поділу фаз у газо-нафтовій суміші характеризується суттєвим відхиленням від гладкості фронту – тобто утворенню «пальців» однієї з фаз (нафти) на границі Γ області дифузійного руху Ω і, навіть, «застійних» зон в середині Ω . Така картина дифузійного руху визначається в'язкопластицичністю газової фази, що, в кінцевому підсумку, спричиняє появу граничного градієнту $G_{гр}$.

Відомі дослідження щодо визначення гладкості границі розділу компонент гетерогенної системи, що фільтрується [1, с.47; 2, с.24]. За умову, що визначає границю розділу компонент гетерогенної системи, яка фільтрується, було розглянуто «стрибок» насиченості в функції Баклея-Леверетта [2, с.355]

$$J(S) = \frac{k_1^0(S_1)}{\mu_1 k_1^0(S_1) + \mu_2 k_2^0(S_2)}, \quad (1)$$

де $k_1^0(S_1)$ та $k_2^0(S_2)$ – відносні фазові проникності для компонент гетерогенної системи, що фільтрується; μ_1 та μ_2 – їх в'язкості; S_1 та

S_2 – насиченості пористого середовища компонентами гетерогенної системи, відповідно.

Застосовуючи рівняння «стрибка» насиченості виду (1) та відомі рівняння дифузії двофазних систем з граничним градієнтом $G_{гр}$ [2, с.14], отримано математичну модель дифузійного руху газо-нафтових сумішей для випадку, тобто коли число компонент $l \geq 2$. Математичну модель процесу дифузії для газо-нафтових сумішей, що враховує властивості «гладкості» фронту поділу фаз представлено у вигляді системи варіаційних нерівностей

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial S_l}{\partial t}(v-S_l) - \int_{\Omega} J(S_l) \left\{ \Psi_l \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial S_l}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial (v-S_l)}{\partial z_i} \right] dz \right\} + \\
 & + \int_{\Omega} J(S_l) \left\{ \Psi_l \left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2} |v| \right] \right\} dz - \int_{\Omega} J(S_l) \left\{ \Psi_l \left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2} |S_l| \right] \right\} dz \geq (f, v-S_l), \\
 & l = \overline{1, n}; \Psi_l = (1-S_l), \forall v, S_l \in K
 \end{aligned} \tag{2}$$

з початковими та граничними умовами $S_l(0, z) = S_{l_0}(z)$, $(\partial P / \partial \eta) = 0$.

У виразі (2) позначено: v – пробну функцію; f – змушуючу функцію; t, z – незалежні часову та просторову змінні, відповідно; η – нормаль до границі Γ , n – число дифундуючих (фаз).

Для кожної з границь пар дифундуючих фаз виконано формальні заміни $S_j = (1 - S_{j+1})$, $j = \overline{1, (n-1)}$, що дало можливість еквівалентно замінити систему з n варіаційних нерівностей виду (2), (3) на сукупність $(n-1)$ систем, що налічують по дві варіаційні нерівності (для j -ї та $(j+1)$ -ї фази), причому кожна з цих пар варіаційних нерівностей можна розв'язувати незалежно одну від іншої, що значно спрощує чисельну реалізацію вихідної задачі.

Список використаних джерел:

1. Бернадинер М.Г. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей / М.Г. Бернадинер, В.М. Ентов. – М. : Наука, 1975. – 199 с.
2. Верлань А.Ф. Математическое моделирование аномальных диффузионных процессов / А.Ф. Верлань, С.А. Положаенко, Н.Г. Сербов. – К.: Наукова думка, 2011. – 416 с.

M. M. Symotyuk*,
G. Kuduk

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and
 Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv,
 University of Rzeszow, Rzeszow

NONLOCAL-INTEGRAL PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER

Let $\Omega(t) = \{(t, x) \in R^2, t \in (0, T), x \in R\}$, $T > 0$. Let us denote $E_{\alpha, \beta}$, $\alpha, \beta > 0$, to the space of functions $\varphi \in L_2(R)$, with the finiteorm [1].

$$\|\varphi\|_{E_{\alpha, \beta}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varphi}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2\alpha} \exp(2\beta|\xi|) d\xi}$$

Where $\tilde{\varphi}(\xi)$ is the Fourier transform of the function $\varphi(x)$.

In the strip $\Omega(t)$ we consider nonlocal-integral problem

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

$$\int_0^T u(t, x) dt = \varphi_1(x), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} - \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=T} = \varphi_2(x). \quad (3)$$

Where $a_1, a_2 \in C$. As summing that there al parts of roots of polynomial $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ are non zero and different, the corrections of the problem (1)-(3) in the space of functions $C^2([0, T], E_{\alpha, \beta})$ is established.

This problem is a continuos works [2].

References:

1. Dubinskii Yu.A. The algebra of pseudodifferential operators with analytic symbols and its applications to mathematical physicals / Yu.A. Dubinskii // Russian Mathematical Surveys. – 1982. – №37(5). – P. 109-153.
2. Kalenyuk P.I. Integral problem for partial differential equation of second order in unboudud layer / P.I. Kalenyuk, Z.M. Nytrebych, G. Kuduk, M.M. Symotyuk // Bukovinian Mathematical Journal. – Chernivtsi : Chernivtsi Nat. Univ., 2016. – Vol. 4, No 3-4. – P. 69-74.

УДК 517.97

С. М. Бак, канд. фіз.-мат. наук

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

ПРО ІСНУВАННЯ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ В СИСТЕМАХ ТИПУ ФЕРМІ-ПАСТИ-УЛАМА НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Розглядається система типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ – координата (n, m) -ї частинки в момент часу t . Передбачається, що кожна частинка нелінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = W_1'(q_{n+1,m} - q_{n,m}) - W_1'(q_{n,m} - q_{n-1,m}) + \\ + W_2'(q_{n,m+1} - q_{n,m}) - W_2'(q_{n,m} - q_{n,m-1}), (n, m) \in \mathbb{Z}^2. \quad (1)$$

В статтях [1; 2; 5; 6; 10; 13] вивчались біжучі хвилі в системах осциляторів, в [4; 7; 8; 9; 12] – в дискретних рівняннях типу синус-Гордона, а в [3; 11; 14; 15] – в системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці.

Зазначимо, що біжуча хвиля у цьому випадку має вигляд $q_{n,m}(t) = u(ncos\varphi + msin\varphi - ct)$ і для її профілю $u(s)$, де $s = ncos\varphi + msin\varphi - ct$, рівняння (1) набуде вигляду

$$c^2 u''(s) = W_1'(u(s + cos\varphi) - u(s)) - W_1'(u(s) - u(s - cos\varphi)) + \\ + W_2'(u(s + sin\varphi) - u(s)) - W_2'(u(s) - u(s - sin\varphi)). \quad (2)$$

За допомогою варіаційного підходу одержано умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль для системи (1).

Список використаних джерел:

1. Бак С.Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С.Н. Бак, А.А. Панков // Український математичний вісник. – 2010. – Т. 7, №2. – С. 154-175.
2. Бак С.М. Існування відокремлених біжучих хвиль для системи нелінійно зв'язаних осциляторів на двовимірній ґратці / С.М. Бак // Український математичний журнал. – 2017. – Т. 69, №4. – С. 435-444.

3. Бак С.М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці / С.М. Бак // Математичні студії. – 2012. – Т. 37, №1. – С. 76-88.
4. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні \sin -Гордона на двовимірній ґратці / С.М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. – 2013. – Вип. 9. – С. 5–10.
5. Бак С.М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С.М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. – 2014. – Вип. 10. – С. 17-23.
6. Бак С.М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С.М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. – 2015. – Вип. 12. – С. 5-12.
7. Бак С.М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці / С.М. Бак // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2014. – Т. 57, №3. – С. 45-52.
8. Bak S.M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice / S.M Bak // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 217, №2 (August). – P. 187-197.
9. Bak S. The existence of heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice / S. Bak // Journal of mathematical physics, analysis, geometry. – 2018. – Vol. 14, №1. – P. 16-26.
10. Bak S.M. Existence of solitary traveling wave in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice / S.M Bak // Ukrainian mathematical Journal. – 2017. – Vol. 4 (69). – P. 509-520.
11. Bak S.M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice / S.M. Bak, G.M Kovtonyuk // Matematychni Studii. – 2018. – Vol. 50, №1. – P. 75-87.
12. Bak S. M. Homoclinic traveling waves in discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on 2D lattice / S.M Bak // Matematychni Studii. – 2019. – Vol. 52, № 2. – P. 176-184.
13. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. – 2007. – Vol. 20. – P. 319-341.
14. Friesecke G., Matthies K.. Geometric solitary waves in a 2D mass-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. – 2003. – Vol. 3, №1 (February). – P. 105-114.
15. Srikanth P. On periodic motions of two-dimensional lattices / P. Srikanth // Functional analysis with current applications in science, technology and industry. – 1998. – Vol. 377. – P. 118-122.

Andriy Verlan, PhD,

Norwegian University of Science and Technology, National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»

ADAPTATION APPROACH TO MATHEMATICAL MODELING OF PROCESSES IN COMPUTER-INTEGRATED TECHNICAL SYSTEMS

One of the major engineering problems is creation of state-of-the-art computer-integrated systems, in particular, autonomous power generation and power supply systems for various purposes, including in manufacturing and transport. Saturation of installations with embedded computer means allows to solve a complex of the specified tasks with provision of intelligent functions. The emergence of the ability to solve complex and specific problems stipulates the need to develop effective mathematical and computer models of the above class of objects. This creates the requirement for computer models such as the ability to work in real time with limited computing resources.

Therefore, in order to solve the problems of design, control and diagnostics of the considered class of systems, there is a need to develop methods and tools for mathematical and computer simulation of such systems and their constituent elements, which could be able to take into account the specified features. The analysis of publications on the creation of such methods indicates that there are some positive trends, but the resolution of the problem as a whole cannot be considered complete [1].

A distinctive feature of technical computer-integrated systems is the heterogeneity of the elements that constitute the physical part, which generates heterogeneity in the mathematical description of the system and provides the corresponding features of the methods and means of mathematical modeling to be created.

Due to the intensive qualitative development, complication of structures and significant expansion of the field of application of computer-integrated systems [2,3], the scientific and technical problem of creation of adaptation methods and means of mathematical and computer simulation of processes of their functioning is urgent for research and provision of qualitative indicators of the specified class of systems, effective solution of problems of analysis, synthesis and construction of control and diagnostics tools, taking into account restrictions on information resources.

Effective solution of this problem can be achieved by: extending the class of mathematical models to take into account the peculiarities of the selected types of links of the systems being modeled, including involve-

ment of integral dynamic models and macromodels; creation and application of methods of equivalent and approximate models' transformations; obtaining and applying high-speed models for dynamic models' implementation; increase of the adequacy level of reproduction of processes both in separate links, and in the system as a whole; structural-algorithmic organization of computer simulation software. Considering the specifics of computer-integrated systems leads to the need to provide the modeling methods and means with adapting capabilities.

To solve this problem it is appropriate to use structurally oriented approach to modeling, which traditionally serves as a basis for engineering research and development in creating samples of new technology, as well as for creation of new methods of mathematical modeling using the principle of decomposition and also computer modeling tools by organizing modern modeling software complexes. The approach allows to use (including simultaneously) different types of dynamic models, to create branched algorithmic software with the possibility of developing and applying the corresponding set of software modules, to use the description of the simulated system in a natural and developer-friendly graphical form.

The proposed adaptive, structurally oriented approach enables: development of innovative methods for the formation of dynamic models of computer-integrated systems, taking into account alternatives of their possible forms, which provides adaptive construction of the necessary model on the principle of minimum complexity at the set requirements for quality indicators (accuracy); and introduction of new methods of equivalent transformation of differential dynamic models to integral ones (such as the method of separation with analytical solution, which allows to obtain not only equivalent integral equations, but a number of equivalent models in the form of integro-differential equations), which greatly increases the possibilities model adaptation choice.

References:

1. Tregub V.P. Proektuvannya system avtomatyzatscii: navch. posib. / V.P. Tregub. – K. : Vyd-tvo Lira-K, 2014. – 344 p.
2. Toshynsky V.I. Aparatno-programnizasobykompyuterno-integrovanyh system upravlinnya: navch.-metod. posib. / V.I. Toshynsky, O.G. Shutynsky at al. – H. : HTU «HPI», 2009. – 102 p.
3. Gurevych O.S. Systemy avtomatychnogo keruvannya aviatciynymy sylovymy ustanovkamy / O.S. Gurevych, L.G. Blyznyukov, A.S. Trofimov // *Konversia v mashynobuduvanni*. – 2000. – №5. – P. 50-61.

УДК 517.9;519.85

А. Ф. Верлань, д-р техн. наук,

О. А. Дячук, канд. техн. наук,

Ю. О. Фургат, канд. техн. наук

Інститут проблем моделювання в енергетиці
імені Г.С. Пухова НАНУ, м. Київ

НАБЛИЖЕНИЙ АНАЛІЗ ПРОЦЕСІВ В НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧАХ

Прикладний інженерний аналіз процесів вимірювання за допомогою математичного опису повинен передбачати наявність аналітичних наближених залежностей, які дають змогу наочно, як якісно, так і кількісно ілюструвати вплив фізичних параметрів [1;2]. Такі властивості методів аналізу необхідні в задачах проектування вимірювальних перетворювачів (ВП), а також під час експлуатації, тобто на всіх етапах їх життєвого циклу.

Можливості отримання точних аналітичних методів розв'язання рівнянь, що описують поведінку динамічних властивостей нестационарних ВП суттєво обмежені, за винятком ВП першого порядку, а також деяких ВП інших типів, у яких нестационарність носить специфічний характер.

У зв'язку з цим основою дослідження нестационарних ВП практично всюди є наближені і чисельні методи розв'язання різних класів рівнянь. Тому безсумнівний науковий інтерес викликає задача створення методів аналізу як стаціонарних, так і нестационарних ВП за допомогою перетворення вихідних диференціальних рівнянь до вигляду, який дає змогу застосовувати наближені аналітичні розв'язки або ефективні чисельні методи.

Слід відзначити також, що інтегральні динамічні моделі [3], будучи непараметричними, у багатьох випадках дають можливість підвищити ефективність моделювання ВП, однак для багатьох задач також необхідно, щоб ядра інтегральних рівнянь мали аналітичні уявлення з відображенням фізичних параметрів.

Список використаних джерел:

1. Бабак В.П. Теоретические основы информационно-измерительных систем / В.П. Бабак, С.В. Бабак, В.С. Еременко. – Киев, 2014.
2. Ripka P. Modern sensors: handbook / P. Ripka, A. Tipek. – Chichester : JonWiley&Sons, 2010.
3. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : справочное пособие / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К. : Наукова думка, 1986. – 544 с.

УДК 621.37:621.391

Д. А. Всєдєрніков, аспірант,

О. А. Палагіна, канд .техн. наук,

В. В. Палагін, д-р техн. наук, професор

Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ СИГНАЛІВ НА ФОНІ НЕГАУСОВИХ КОРЕЛЬОВАНИХ ЗАВАД

Задачі оцінювання параметрів сигналів, що приймаються на фоні завад, є важливими при реалізації багатьох технічних систем при опрацюванні випадкових процесів. Для розв'язання таких задач використовуються добре відомі статистичні методи, зокрема метод максимальної правдоподібності, метод моментів та ін. [1], використання яких не накладає принципових обмежень на вид розподілів досліджуваних випадкових процесів. На практиці широкого поширення набули гаусові моделі досліджуваних випадкових величин, що не завжди адекватно відображає реальні випадкові явища [2] і призводить до зниження ефективності обробки випадкових процесів.

Використання класичних методів оцінювання параметрів сигналів, що приймаються на фоні негаусових завад, викликає труднощі, пов'язані не тільки з апіорною невизначеністю параметрів досліджуваних процесів, але і з алгоритмічною складністю реалізації даних методів, що в цілому не дозволяє створювати ефективні програмно-алгоритмічні засоби обробки сигналів. Задача суттєво ускладнюється при необхідності врахування кореляційних зв'язків досліджуваних негаусових процесів, що в цілому призводить до необхідності пошуку інших підходів для розв'язання поставлених задач.

Показано, що перспективним напрямком для вирішення подібних проблем є застосування моментно-кумулянтних моделей для опису досліджуваних процесів [3], в тому числі корельованих [4]. Такий підхід дозволяє з допустимим наближенням описати статистичні властивості негаусових випадкових процесів та може успішно використовуватися для побудови нових методів оцінювання параметрів сигналів, що приймаються на фоні негаусових корельованих завад.

В роботі розв'язана задача оцінювання параметра постійного сигналу, який приймається на фоні асиметрично-експоненціальних корельованих негаусових завад. Запропоновані математичні моделі адитивної взаємодії корисного сигналу та завади, які ґрунтуються на моментно-кумулянтному описі випадкових процесів при застосуванні спільних кумулянтних функцій, що дало можливість описати статистичні зв'язки різних порядків досліджуваних процесів.

Запропоновані поліноміальні алгоритми оцінювання параметра постійного сигналу при застосуванні методу максимізації полінома (ММП-метод Кунченка) та його адаптації для статистично залежних вибірових значень, який добре себе зарекомендував для вирішення широкого кола завдань. Адаптований ММП дозволяє враховувати статистичний зв'язок вибірових значень у вигляді спільних моментів і кумулянтів випадкових величин в нелінійних алгоритмах оцінювання при врахуванні кумулянтних коефіцієнтів третього і вище порядків.

Показано, що запропонований підхід до опису корельованих негаусових випадкових процесів та застосування адаптованого ММП дозволяє синтезувати поліноміальні алгоритми оцінювання параметра постійного сигналу з меншими дисперсіями оцінок у порівнянні з відомими результатами. Зменшення дисперсії оцінювання залежить не тільки від параметрів негаусової завади (коефіцієнт асиметрії, ексцесу), але і від параметрів, які характеризують ступінь кореляції досліджуваного процесу. Причому, при збільшенні статистичних зв'язків вибірових значень ефективність оцінювання погіршується, але все рівно залишається кращою при розгляді негаусових моделей випадкових процесів у порівнянні з традиційним гаусовими.

Список використаних джерел:

1. Van Trees H.L. *Detection Estimation and Modulation Theory* / H.L. VanTrees, K.L. Bell, Z. Tiany. – 2 nd edition. – New York : John Wiley & Sons, 2013.
2. Middleton D. *Non-Gaussian Statistical Communication Theory* / D. Middleton. – New Jersey : Jonn Willey & Sons, 2012.
3. Vokorokos L. *Parameters Estimation of Correlated non-Gaussian processes by the Method of Polynomial Maximization* / L. Vokorokos, S. Marchevský, A. Ivchenko, E. Palahina, V. Palahin // Submitted to IET Signal Processing. – 2016. – P. 313-319.
4. Палагин В.В. *Нелинейные методы оценивания параметров сигнала на фоне асимметрично-эксцессных негаусовских коррелированных помех* / В.В. Палагин, Д.А. Ведерников // *Вісник ЧДТУ*. – 2020. – №2. – С.77-86.

А. П. Власюк, д-р техн. наук, професор,

Б. В. Красюк, аспірант

Національний університет «Острозька академія», м. Острог

МАТЕМАТИЧНЕ І КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МІГРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ НАРОДОНАСЕЛЕННЯ В КРИВОЛІНІЙНІЙ ОБЛАСТІ

Проведено математичне моделювання міграційних процесів народонаселення в двовимірній криволінійній області. Для моделювання даних процесів, використано дифузійну модель [1]. Математична модель розглядуваного демографічного процесу, що базується на процесах фільтрації-конвекції-дифузії, в двовимірному випадку у загальноприйнятих позначеннях може бути описана наступною крайовою задачею:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) - v_x(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} - \\ - v_y(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_1 u - \gamma_2 u + f = \frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mu(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x, y, u, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(x, y, u, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad (2)$$

$$v = K(x, y, u, \varphi) \operatorname{grad} \varphi, \quad (3)$$

$$u(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad (4)$$

$$lu(0, t) = U_1(t), t > 0, \quad (5)$$

де: $u = u(x, y, t)$ – густина народонаселення; $v_x(x, y)$, $v_y(x, y)$ – компоненти вектора швидкості міграції народонаселення; $D(x, y)$ – коефіцієнт дифузії народонаселення; $\varphi(x, y, t)$ – потенціал привабливості народонаселення; $\gamma_1(x, y, t)$ – коефіцієнт народжуваності; $\gamma_2(x, y, t)$ – коефіцієнт смертності; f – функція джерела, що враховує зовнішню та внутрішню міграцію населення; l – оператор, що задає крайові умови для густини народонаселення на межі розглядуваної області.

Для побудови чисельного розв'язку крайової задачі (1)-(5), запишемо її в нових змінних, використавши конформні і квазіконформні відображення. Чисельний розв'язок крайової задачі (1)-(5) отримано методом скінченних різниць з використанням чисельних конформних

і квазіконформних відображень в оберненій постановці [3]. Побудована вдосконалена монотонна різницева схема для крайової задачі (1)-(5) та отримано її чисельний розв'язок [4].

Програмна реалізація відповідного обчислювального алгоритму проведена з використанням Python. Числові експерименти проводилися на основі розробленого програмного забезпечення для отримання густини народонаселення в кожній точці криволінійної області в будь-який момент часу.

Таким чином, побудована математична модель (1)-(5) дозволяє прогнозувати процеси міграції населення в регіоні в різні моменти часу для різних крайових умов.

Список використаних джерел:

1. Vlasyuk A.P. Mathematical modeling of migration processes of population in one-dimensional case / A.P. Vlasyuk, B.V. Krasiuk // Abstract Internat. Conf. «Problems of decision making under uncertainties». – Lviv, 2019. – P. 111.
2. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – Киев : Наук. думка, 1991. – 432 с.
3. Власюк А.П. Чисельне розв'язування одного класу крайових задач з вільними межами в криволінійних чотирикутниках для еліптичних систем рівнянь / А.П. Власюк, В.Г. Михальчук. – (Препр. Ін-ту математики НАН України. – К., 1994 – 24 с.).
4. Власюк А.П. Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірною рівняння параболічного типу, що містить першу похідну / А.П. Власюк, О.П. Остапчук, О.М. Степанченко // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. – К., 2005. – Вип. 2. – С. 188-197.

УДК 519.63:627.324.2/3:532.72

А. П. Власюк*, д-р техн. наук, професор,

І. В. Ільків**, аспірант

*Національний університет «Острозька академія», м. Острог,

**Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗАНИХ ПРОЦЕСІВ ВОЛОГО-ТЕПЛО-МАСОПЕРЕНОСУ В ҐРУНТІ ПРИ НАЯВНОСТІ ВЕРТИКАЛЬНОГО ДРЕНАЖУ

Розглядаються взаємозв'язані процеси перенесення вологи, солей і тепла в ненасиченому шарі ґрунту при наявності в ньому вертикального дренажу (рис. 1).

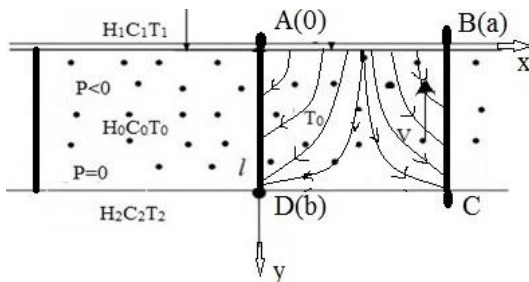


Рис. 1. Перенесення вологи, солей і тепла в ненасиченому шарі ґрунту

Математичну модель вищевказаних процесів в загально-прийнятих позначеннях в двовимірному випадку на основі робіт [1; 2] можна описати наступною крайовою задачею:

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad}(c)) - \bar{v} \operatorname{grad}(c) - \gamma(c - C_*) + \operatorname{div}(D_T \operatorname{grad}(T)) = \frac{\partial(\theta c)}{\partial t},$$

$$\operatorname{div}(K(c, h, T) \operatorname{grad}(h)) - \operatorname{div}(v \operatorname{grad}(c)) - \operatorname{div}(v^T \operatorname{grad}(T)) + f = \mu(h) \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}(\lambda_T \operatorname{grad}(T)) - \rho C_p \bar{v} \operatorname{grad}(T) = C_p \frac{\partial T}{\partial t},$$

$$V = -K(c, h, T) \operatorname{grad}(h) + v \operatorname{grad}(c) + v_T \operatorname{grad}(T)$$

при відповідних початкових умовах у виділеному фрагменті розглядуваної області та крайових умовах на його межі.

Тут: h – напір вологи, c – концентрація розчинених солей, T – температура в ґрунті, v – швидкість вологоперенесення. Диференціальні рівняння математичної моделі описують відповідно наступні процеси: масоперенесення, вологоперенесення та теплоперенесення в ґрунтовому середовищі. Останнє рівняння описує закон Дарсі-Клюта, модифікований на випадок вологоперенесення в умовах тепло-масоперенесення.

Для крайової задачі побудовано монотонну різницеву схему та ефективний обчислювальний алгоритм чисельного розв'язання відповідної нелінійної крайової задачі методом скінченних різниць. Програмна реалізація розробленого чисельного методу та відповідних обчислювальних алгоритмів виконана на мові програмування Python. На основі розробленого відповідного програмного забезпечення, проведено чисельні експерименти та їх аналіз. На основі проведених чисельних експериментів отримано розподіл полів вологи, концентрації та температури в зоні аерації (неповного насичення).

Список використаних джерел:

1. Vlasyuk A.P. Mathematical modelling of salt transfer in horizontal non-saturated soil mass under non-isothermal conditions / A.P. Vlasyuk, I.V. Pkiv // Abstract Internat. Conf. «Problems of decision making under uncertainties». – Lancaran; Baku, 2018. – P. 132.
2. Vlasyuk A.P. Mathematical Simulation of the Transport of Salt in the Case of Filtration and Moisture Transfer in Saturated-Unsaturated Soils in a Moistening Regime / A.P. Vlasyuk, T.P. Tsvetkova // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – New York, 2015. – Vol. 88, Issue 5. – P. 1062-1073.
3. Власюк А.П. Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну / А.П. Власюк, О.П. Остапчук, О.М. Степанченко // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. – К., 2005. – Вип. 2. – С. 188-197.

УДК 519.85:631.41:517.54:519.63

А. П. Власюк, д-р техн. наук, професор,

В. О. Огійчук, аспірант

Національний університет «Острозька академія», м. Острог

МАТЕМАТИЧНЕ І КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНТУРА ГРУНТОВОГО ЗВОЛОЖЕННЯ ПРИ МІКРОЗРОШЕННІ

Проведено математичне моделювання еволюції контура зволоження при мікрозрошенні в ґрунті (рис. 1).

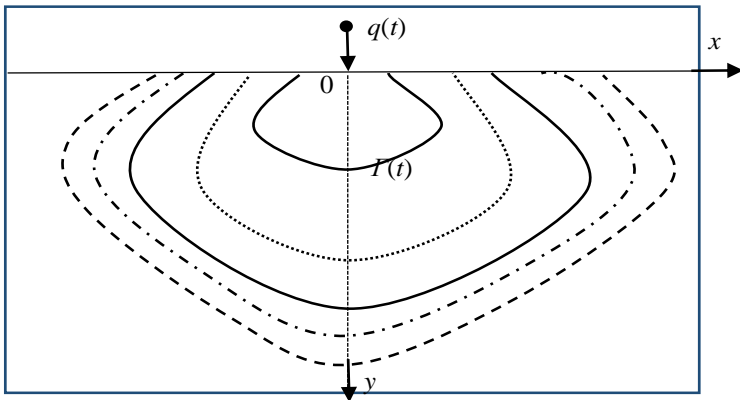


Рис. 1. Еволюція контура зволоження в ненасиченому шарі ґрунту

Для моделювання даного процесу використано модель вологопереносу, що описується рівнянням Річардса [1]. Математична модель розгляданого процесу в двовимірному випадку у загальноприйнятих позначеннях може бути описана наступною крайовою задачею:

$$\mu(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (K(x, y, h) \frac{\partial h}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (K(x, y, h)) + f, \quad (1)$$

$$\bar{v} = -K(x, y, h) \text{grad}(h), \quad (2)$$

$$h(x, y, 0) = H_0(x, y), \quad (3)$$

$$lh|_{\Gamma} = H_1(x, y, t), \quad (4)$$

$$F(h, x, y, t, m) = 0, \quad (5)$$

Тут: h – напір вологи; l – оператор, що задає крайову умову для напору вологи на рухомій межі контура зволоження, а (5) задає кінематичну умову на цій межі; v – швидкість вологоперенесення; $k(c, h, T)$ – коефіцієнт водопроникності; $f(t, x, h)$ – функція, що задає випаровування та інфільтрацію; $q(t)$ – потік вологи; $\Gamma(t)$ – контур зволоження.

Чисельний розв’язок крайової задачі (1)-(5) отримано методом скінченних різниць з використанням чисельних конформних і квазі-конформних відображень в оберненій постановці [2]. Для крайової задачі (1)-(5) побудована монотонна різницева схема та отримано її чисельний розв’язок [3].

Програмна реалізація відповідного обчислювального алгоритму проведена з використанням Python. На основі проведених числових експериментів отримано еволюцію контура ґрунтового зволоження та поля розподілу вологи, напорів вологи та швидкостей вологи в будь-який момент часу.

Список використаних джерел:

1. Ляшко И.И. Численно ерешение задач тепло- и массопереноса в пористых средах / И.И. Ляшко, Л.И. Демченко, Г.Е. Мистецкий. – Киев : Наук. думка, 1991. – 264 с.
2. Власюк А.П. Чисельне розв’язування одного класу крайових задач з вільними межами в криволінійних чотирикутниках для еліптичних систем рівнянь / А.П. Власюк, В.Г. Михальчук. – (Препр. Ін-ту математики НАН України. – К., 1994 – 24 с.).
3. Власюк А.П. Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну / А.П. Власюк, О.П. Остапчук, О.М. Степанченко // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. – К., 2005. – Вип. 2. – С. 188-197.

А. П. Власюк*, д-р техн. наук, професор,
Н. А. Жуковська**, канд. техн. наук,
В. В. Жуковський**, канд. техн. наук,
І. О. Музичко**,
О. К. Башманова**

*Національний університет «Острозька академія», м. Острог,
 **Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ДЕФОРМАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ БАГАТОШАРОВОГО ГРУНТОВОГО МАСИВУ З УРАХУВАННЯМ ТЕПЛОМАСОПЕРЕНЕСЕННЯ

Розглядається ґрунтовий масив, що складається з n шарів в області Ω . Кожен шар характеризується різними механічними та фізико-хімічними властивостями. На рівні l_k знаходиться рівень ґрунтових вод (рис. 1).

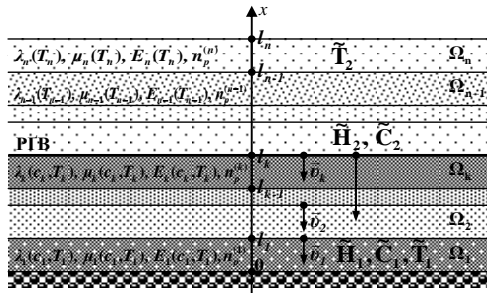


Рис. 1. Схема багатошарового ґрунтового масиву

Математичну модель напружено-деформованого стану багатошарового ґрунтового масиву з урахуванням тепломасоперенесення в одновимірному нестационарному випадку в загальноприйнятих позначеннях можна описати наступною крайовою задачею [1]:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_i(c, T_i) + 2\mu_i(c, T_i)) \frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} + \frac{\partial(\lambda_i(c, T_i) + 2\mu_i(c, T_i))}{\partial x} \frac{\partial U_i}{\partial x} - \\
 & - \left(\frac{\partial(\lambda_i(c, T_i) + 2\mu_i(c, T_i))}{\partial x} T_i + (\lambda_i(c, T_i) + 2\mu_i(c, T_i)) \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) \alpha_T^{(i)} + X_i = \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}, \quad (1) \\
 & i = \overline{1, n}, \quad t > 0,
 \end{aligned}$$

де масова сила в кожному шарі обчислюються за формулою

$$X_i = \begin{cases} \gamma_{зв.}^{(i)} + \frac{dp_i}{dx}, & i = \overline{1, k}, \\ \gamma_{нр.}^{(i)}, & i = \overline{k+1, n}, \end{cases} \quad (2)$$

деформації та напруження мають вигляд

$$\varepsilon_i = \frac{\partial U_i}{\partial x}, \quad \sigma_i = (\lambda_i(c, T_i) + \mu_i(c, T_i)) \left(\varepsilon_i - \alpha_T^{(i)} \bar{T}_i \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad t > 0. \quad (3)$$

Крайові умови та умови спряження ідеального контакту для зміщень мають наступний вигляд:

$$l_1 U_1(0, t) = 0, \quad l_2 U_n(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$U_i(l_i) = U_{i+1}(l_i), \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$E_i \left(\frac{\partial U_i(l_i)}{\partial x} - \alpha_T^{(i)} (T_i - T_0) \right) = E_{i+1} \left(\frac{\partial U_{i+1}(l_i)}{\partial x} - \alpha_T^{(i+1)} (T_{i+1} - T_0) \right), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (5)$$

$$U_i(x, 0) = \tilde{U}_0^{(1,i)}, \quad \frac{\partial U_i(x, 0)}{\partial t} = \tilde{U}_0^{(2,i)}, \quad x \in (0, l), \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Тут: $x \in \bigcup_{i=1}^n (l_{i-1}, l_i)$, $l_0 = 0$, $l_n = l$; $U_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$ – нестационарні змі-

щення вздовж осі Ox в шарах ґрунту, що знаходяться відповідно в зваженому ($x \in \bigcup (l_i, l_{i+1})$, $i = \overline{1, k-1}$) та у природному ($x \in \bigcup (l_i, l_{i+1})$, $i = \overline{k, n-1}$) станах; λ_i , μ_i , $i = \overline{1, n}$ – коефіцієнти Ламе в кожному шарі ґрунтового масиву, які залежать від концентрації сольових розчинів та температури у водонасичених шарах ґрунту та залежать від температури у шарах ґрунту в природному стані; t – час, $t > 0$.

Список використаних джерел:

1. Vlasyuk A.P. About Mathematical Modelling Of Spatial Deformation Problem Of Soil Massif With Free Surface / A.P. Vlasyuk, N.A. Zhukovska, V.V. Zhukovskyy // IEEE 14 th International Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT). – Lviv, 2019. – P. 128-131.

А. П. Власюк*, д-р техн. наук,
 В. В. Жуковський**, канд. техн. наук,
 Н. А. Жуковська**, канд. техн. наук,
 В. В. Єфімчук**

*Національний університет «Острозька академія», м. Острог

**Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

МАТЕМАТИЧНЕ І КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МІГРАЦІЇ РАДІОНУКЛІДІВ У НЕНАСИЧЕНОМУ КАТАЛІТИЧНОМУ ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ У ДВОВИМІРНІЙ ВИПАДКУ

Розглянуто очищення від радіонуклідів горизонтального шару ґрунту, в якому розміщені фільтри-вловлювачі (рис. 1) на відстані l один від одного. Міграція радіонуклідів відбувається під впливом вологопереносу та масопереносу [1, 2].

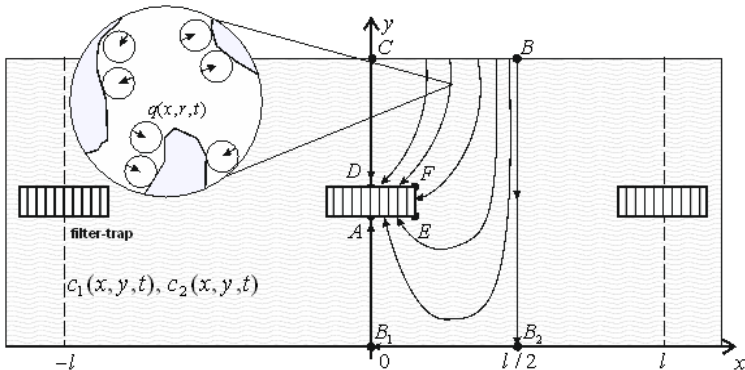


Рис. 1. Міграція радіонуклідів до фільтра-вловлювача

Математична модель даного процесу в загальноприйнятих позначеннях для області AB_1B_2BCD описана наступним чином:

$$D_1 \left(\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} \right) - v_x \frac{\partial c_1}{\partial x} - v_y \frac{\partial c_1}{\partial y} - \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 = \frac{\partial(\theta c_1)}{\partial t}, \quad (1)$$

$$D_2 \left(\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} \right) + \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 - \theta_0 \frac{\partial q}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\mu(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(h, c_1) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(h, c_1) \frac{\partial h}{\partial y} \right) - v_c \left(\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} \right) + f, \quad (3)$$

$$D_0 \left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial q}{\partial r} \right) = \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial q(x, y, r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad q(x, y, r, t) \Big|_{r=R} = \frac{k_f \cdot c_2(x, y, t)^\beta}{1 + \eta \cdot c_2(x, y, t)^\beta}, \quad (5)$$

$$v_x = -K(h, c_1) \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad v_y = -K(h, c_1) \frac{\partial h}{\partial y} + v \frac{\partial c_1}{\partial y}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad h \Big|_{CB} = H_1, \quad h \Big|_{AEFD} = H_2, \quad \frac{\partial h}{\partial n} \Big|_{AB, B_2, B \cup CD} = 0, \quad (7)$$

$$l_1 c_1 \Big|_{CB} = \tilde{C}_1^1(t), \quad l_2 c_2 \Big|_{CB} = \tilde{C}_2^1(t), \quad \frac{\partial c_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial c_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial c_3}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (8)$$

$$\Gamma = BB_2 \cup B_2 B_1 \cup B_1 A \cup AE \cup EF \cup FD \cup DC, \quad (9)$$

$$c_1 \Big|_{r=0} = \tilde{C}_1^0(x, y), \quad c_2 \Big|_{r=0} = \tilde{C}_2^0(x, y), \quad q \Big|_{r=0} = \tilde{Q}^0(x, y, r). \quad (10)$$

В результаті чисельного розв'язання крайової задачі (1)-(10) методом скінченних різниць було знайдено розподіл концентрацій $c_1(x, t)$, $c_2(x, t)$ та $q(x, r, t)$ в ненасиченому пористому середовищі. Аналіз отриманих даних дає можливість прогнозувати ступінь забруднення ґрунтів, їх подальше очищення та використання.

Список використаних джерел

1. Vlasyuk A. Mathematical Modeling of Heat, Mass and Moisture Transfer in Catalytic Porous Media / Vlasyuk A., Zhukovsky V., Zhukovska N., Pinchuk O., Rajab H., // WSEASTRANS ACTIONS ON APPLIED AND THEORETICAL MECHANICS. – 2020. – Т. 15. – С. 52-59.
2. Vlasyuk A.P. Mathematical and computer modeling of contaminant migration in a two-dimensional nonlinear case / Vlasyuk A.P., Kochan R.V., Zhukovsky V.V., Zhukovska N.A. – 2018. – Т. 18. – С. 293-300.

І. М. Гаюк, аспірант,

А. Б. Дорош, канд. фіз.-мат. наук,

Л. А. Піддубна, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Крайові задачі для диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням важливий розділ сучасної теорії диференціально-функціональних рівнянь. Аналітичний розв'язок таких задач можна знайти тільки для найпростіших типів рівнянь, тому актуальною є задача знаходження наближених розв'язків. При цьому важливими є дослідження розв'язності крайових задач із запізненням та вивчення властивостей їх розв'язків.

У даній роботі розглядається крайова задача для нелінійних диференціально-рзницьових рівнянь із багатьма запізненнями

$$y''(x) = f(x, [y(x)], [y(x)]_1), x \in [a; b], \quad (1)$$

$$y^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(x), p = 0, 1, x \in [a^*; a], y(b) = \gamma, \quad (2)$$

де

$$[y(x)] = (y(x - \tau_0(x)), \dots, y(x - \tau_n(x))),$$

$$[y(x)]_1 = (y'(x - \tau_0(x)), \dots, y'(x - \tau_n(x))),$$

запізнення $\tau_0(x) = 0, \tau_i(x), i = \overline{1, n}$ – неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a; b]$, $\varphi(x) \in C^1[a^*; a], \gamma \in R$.

Нехай запізнення $\tau_1(x), \dots, \tau_n(x)$ такі, що множини $E_i = \{x_j \in [a; b] : x_j - \tau_i(x_j) = 0, j = 1, 2, \dots\}, i = \overline{1, n}$ є скінченними.

Занумеруємо точки множин $E_i, i = \overline{1, n}$ за зростанням та позначимо $\delta_1 = [a; x_1], \delta_2 = [x_1; x_2], \dots, \delta_{l+1} = [x_l; b]$,

$$B([a^*; b]) =$$

$$\left\{ y(x) : y \in C[a^*; b] \cap C^1[a; b] \cap C^2[a^*; a] \cap \left(\bigcup_{j=1}^{l+1} C^2(\delta_j) \right) \right\}.$$

Розв'язком задачі (1)-(2) будемо вважати таку функцію $y(x) \in B\left(\left[a^* ; b \right]\right)$, яка задовольняє рівняння (1) на $[a; b]$ (за можливим винятком точок множин $E_i, i = \overline{1, n}$) і крайові умови (2).

В працях [1-3] одержано достатні умови, при виконанні яких існує єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(2) із класу функцій $B\left(\left[a^* ; b \right]\right)$.

Для знаходження розв'язку задачі (1)-(2) в роботі розглядається ітераційний процес у вигляді послідовності кубічних сплайнів дефекту два [4-5]. Задамо на $[a; b]$ сітку $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ так, щоб точки множин $E_i, i = \overline{1, n}$ їй належали. Наближений розв'язок задачі (1)-(2) будемо у вигляді інтерполяційного кубічного сплайну $S(y, x)$ дефекту 2 на сітці Δ , що належить $B\left(\left[a^* ; b \right]\right)$. Встановлено достатні умови збіжності послідовності сплайнів $S_k(y, x)$ до розв'язку задачі (1)-(2).

Модельовання крайових задач (1)-(2) здійснюється за допомогою розробленого програмного забезпечення засобами мови JavaScript із використанням технологій NodeJS та фреймворку NW.js, який дає змогу розробити зручний інтерфейс користувача для введення параметрів різного типу.

Числові експерименти для тестових модельних прикладів підтверджують одержані теоретичні результати.

Список використаних джерел:

1. Grim L.J. Boundary Value Problems for Delay Differential Equations / L.J. Grim, K. Schmitt K. // Bull. Amer. Math. Soc. – 1968. – 74, №5. – P. 997-1000.
2. Nikolova T.S., Bainov D.D. Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary problems for a class of functional-differential equations / T.S. Nikolova, D.D. Bainov // YokohamaMath. J. – 1981. – 29, №1. – P.108-122.
3. Cherevko I. Existence and Approximation of a Solution of Boundary Value Problems for Delay Integro-Differential Equation / I. Cherevko, A. Dorosh // J. Numer. Anal. Approx. Theory. – 2016. – 44, №2. – P. 154-165.
4. Cherevko I. Modeling of Boundary Value Problems For Delay Integro-Differential Equations / I. Cherevko, A. Dorosh, T. Drin // Proceeding of the Seventh International Conference on Informatics and Computer Technics Problems, Chernivtsi, Ukraine, October 11-14, 2018: ProceedingsPICT-2018. – Chernivtsi : Yuriy Fedkovich Chernivtsi National University, 2018. – P. 39-40
5. Гаюк І.М. Модельовання крайових задач для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням / І.М. Гаюк, А.Б. Дорош,

УДК 517.946

А. П. Громик*, канд. техн. наук,
І. М. Конет**, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Т. М. Пилипюк**, канд. фіз.-мат. наук

*Подільський державний аграрно-технічний університет,
 м. Кам'янець-Подільський,

**Кам'янець-Подільський національний університет
 імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПАРАБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В НАПІВОбМЕЖЕНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ КЛИНОВИДНИХ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Розглядається задача побудови обмеженого на множині

$$D_k = \{(t, r, \varphi, z) : t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j);$$

$$\varphi \in (0; \varphi_0), 0 < \varphi_0 < 2\pi; z \in (-\infty; +\infty)\}; k = \overline{1, 4}$$

класичного розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похід-
 ними параболічного типу 2-го порядку [1]

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j +$$

$$+ \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$u_j(t, r, \varphi, z)|_{t=0} = g_j(r, \varphi, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1},$$

крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + h \right) u_j \Big|_{z=0} = \omega_j(t, r, \varphi); \frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0; s = 0, 1; j = \overline{1, n+1},$$

одними з крайових умов на гранях клина

$$u_j|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z); u_j|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{1j}(t, r, z); j = \overline{1, n+1},$$

$$u_j|_{\varphi=0} = g_{2j}(t, r, z); \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{2j}(t, r, z); j = \overline{1, n+1},$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{3j}(t, r, z); \quad u_j \Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{3j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1},$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{4j}(t, r, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{4j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1},$$

відповідними крайовими умовами на межі проміжку I_n^+ та умовами спряження [2]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right]_{r=R_k} = 0; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n}.$$

Щодо проміжку I_n^+ розглянуто 4 канонічні випадки:

$R_0 = 0; R_{n+1} = +\infty$ (клиновидний півпростір),

$R_0 > 0; R_{n+1} = +\infty$ (клиновидний півпростір з порожниною),

$R_0 = 0; R_{n+1} \equiv R < +\infty$ (напівобмежений клиновидний суцільний циліндр),

$R_0 > 0; R_{n+1} \equiv R < +\infty$ (напівобмежений клиновидний порожнистий циліндр).

Зауважимо, що за певних обмежень розглянуті задачі можна інтерпретувати як математичні моделі процесів теплопровідності в кусково-однорідних клиновидних циліндрично-кругових середовищах.

Інтегральні зображення єдиних точних аналітичних розв'язків досліджуваних початково-крайових задач спряження одержано в замкнутому вигляді методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна).

Список використаних джерел:

1. Самойленко В.Г. Рівняння математичної фізики / В.Г. Самойленко, І.М. Конет. – Київ : ВПЦ «Київський університет», 2014. – 283 с.
2. Конет І.М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах / І.М. Конет, Т.М. Пилипюк. – Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2017. – 80 с.

О. А. Двірна, канд. фіз.-мат. наук

ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі», м. Полтава

ВИКОРИСТАННЯ ГРІД ГРАФІВ МНОЖИН ЕВКЛІДОВИХ КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЙ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

Під комбінаторною конфігурацією по Бержу розуміють відображення $\chi: B \rightarrow A$ із заданої множини $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ у скінчену множину $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ при виконанні деякого комплексу вимог Λ . Комбінаторні множини перестановок, розміщень, сполучень та інші можна подати як множини комбінаторних конфігурацій, задаючи відповідні комплекси обмежень. Таке подання є більш формалізованим.

При зануренні в евклідів простір відбувається перехід до евклідових комбінаторних конфігурацій, дослідженню яких присвячена праця [3]. Це дає можливість використовувати відомі методи дискретної оптимізації, модифікуючи їх з урахуванням властивостей вказаних множин евклідових комбінаторних конфігурацій (МЕКК).

Вибравши зручний спосіб подання МЕКК дозволяє прослідкувати їх властивості та використати їх для розв'язування задач. Наприклад у роботах [1, 2] використовується зв'язок вказаних множин з теорією графів. У роботі [1] наведені правила побудови структурного графу та схеми підграфу множини комбінаторних конфігурацій, які використовуються для направлено пошуку заданого значення функції на множині.

Поняття схеми підграфу узагальнене у поняття грід графу підмножини евклідових комбінаторних конфігурацій.

Нехай $Gr(X', Y)$ – граф, вершини якого відповідають елементам множини $X' \subseteq X$ – підмножини деякої МЕКК, та Y – умови вигляду $\langle \tilde{v}_i^i, \tilde{p}^h \rangle, \tilde{v}_i^i \in V_i, \tilde{p}^h \in p^h$, які визначають тип вершини. Тоді якщо для усіх вершин $Gr(X', Y)$ виконуються умови $x_{j_1} \leq x_{j_2} \leq \dots \leq x_{j_t}$, при $j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_h, \tilde{p}^h = \{x'_{m-h+j}\}, j \in J_h, x_{t+1} \leq x_{t+1} \dots \leq x_{m-h}$, а для головної вершини – умова $x_{j_1} \leq x_{j_2} \leq \dots \leq x_{j_t} \leq x_{t+1} \leq x_{t+1} \dots \leq x_{m-h}$, при $j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_h$, і кожна вершина згенерована послідовністю транспозицій

$$x_{i'} \leftrightarrow x_{i'-1} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow x_{h+1} \leftrightarrow x_{j_1} \leftrightarrow x_{j_1-1} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow x_{j_2} \leftrightarrow x_{j_1},$$

тоді такий граф наивається грідом підмножини евклідових комбінаторних конфігурацій. Приклад гріду графу подано на рисунку 1.

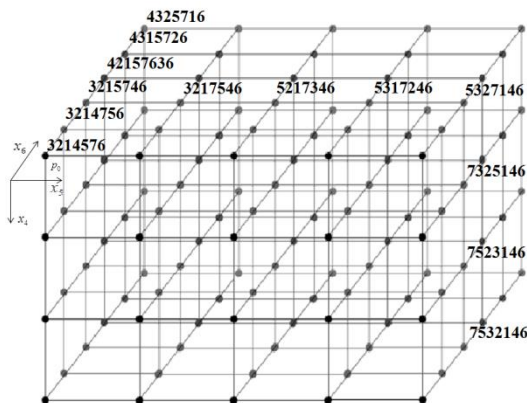


Рис. 1. Приклад гріду графу

За рахунок побудови та властивостей лінійних функцій на гріди графів їх використано у задачах пошуку значення функції, елементів, що задовольняють лінійні обмеження задачі для скалярної та багатокритеріальної оптимізації, наприклад у координатному методі [2] та його модифікаціях.

У роботі [2] описана побудова для МЕКК перестановок, проте гріди графів можна побудувати для різних множин, наприклад, розміщень, полірозміщень, поліперестановок та ін.

Список використаних джерел:

1. Донець Г.П. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях : монографія / Г.П. Донець, Л.М. Колечкіна. – Полтава : РВВПУЕТ, 2011. – 309 с.
2. Колечкіна Л.Н. Решение экстремальных задач с добно-линейными функциями цели на комбинаторной конфигурации перестановок при условии многокритериальности / Л.Н. Колечкіна, Е.А. Дверна // Кибернетика и системный анализ. – 2017. – № 4. – С.113-122.
3. Стоян Ю.Г. Евклідовы комбінаторные конфігурації : монографія / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев, О.С. Пичугина. – Харьков : Константа, 2017. – 404 с.

МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В КЕРОВАНИХ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВІ ОДНОВИМІРНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ВОЛЬТЕРРИ

Функціонування сучасних керованих систем забезпечується комп'ютеризованими засобами керування та контролю. Такі системи виконуються, як правило, у вмонтованому вигляді або із залученням інформаційно-комунікаційних технологій, що свідчить про наявність суттєвих ресурсних та економічних обмежень, які породжують відповідні вимоги до комп'ютерної (саме керуючої та контролюючої) частини керованої системи, задоволення яких забезпечується обмеженнями щодо швидкодії і точності програмних засобів. У свою чергу, сучасне програмне забезпечення систем керування, контролю та вимірювання будується на основі математичних моделей об'єктів керування, тобто суттєво залежить від складності цих моделей [2].

Для багатьох практичних задач достатнім буде використання, при математичному описі об'єктів керування, моделей типу «вхід – вихід», в яких враховано залежність між вхідним впливом та вихідним відгуком відповідного об'єкта. В такому випадку перспективним є використання одновимірних поліноміальних інтегральних моделей, які мають ряд позитивних властивостей [1]. В загальному випадку модель матиме вигляд інтегро-степеневого ряду Вольтерри:

$$y(\xi, t) = \sum_{m=1}^n \int_0^t \dots \int_0^t K_m(\xi, \zeta, s_1, \dots, s_m) \prod_{i=1}^m x(\zeta, t - s_i) ds_i, t \in [0, T], \quad (1)$$

де $K_m(\xi, \zeta, s_1, \dots, s_m)$ – багатовимірні ядра, $x(\zeta, t)$, $y(\xi, t)$ – відповідно вхідний і вихідний сигнали прикладені у різних точках ζ і ξ об'єкта, n – деяке натуральне число, T – час перехідного процесу.

Розглянемо частковий випадок (1), а саме одновимірну поліноміальну інтегральну модель Вольтерри другого степеня:

$$y(\xi, t) = \int_0^t K_1(\xi, \zeta, s) x(\zeta, t - s) ds + \int_0^t \int_0^t K_2(\xi, \zeta, s_1, s_2) x(\zeta, t - s_1) x(\zeta, t - s_2) ds_1 ds_2, \quad (2)$$

де $x(\zeta, t)$ – вхідний сигнал, $y(\xi, t)$ – шуканий вихідний сигнал.

Інтегральний оператор (2) є базовим у розв’язуванні прямих задач моделювання (задач аналізу) динамічних об’єктів. У випадку розв’язування обернених задач (відновлення сигналів, пошук керуючих впливів) отримуються моделі у формі інтегральних рівнянь Вольтерри, зокрема, на основі (2) отримується поліноміальне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду другого степеня:

$$\int_0^t K_1(\xi, \zeta, s)x(\zeta, t-s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(\xi, \zeta, s_1, s_2)x(\zeta, t-s_1)x(\zeta, t-s_2)ds_1ds_2 = y(\xi, t), \quad (3)$$

де $y(\xi, t)$ – вихідний сигнал, $x(\zeta, t)$ – шуканий вхідний сигнал.

Застосування одновимірних поліноміальних інтегральних моделей (2) та (3) у математичному моделюванні динамічних процесів в керованих технічних системах пов’язане із проблемами побудови моделей, їх числової реалізації у розв’язуванні прямих і обернених задач [1-5]. Для зниження складності алгоритмічної та програмної реалізації вказаних моделей у системах керування та контролю із забезпеченням їх високої завадостійкості та швидкодії пропонуються такі методи [3- 5]: адаптивний метод ідентифікації поліноміальних інтегральних моделей, що полягає в адаптації процесу проведення серії активних експериментів до необхідного рівня адекватності моделей та заміни ряду результатів інтерполяційними даними; метод числової реалізації поліноміальних операторів Вольтерри на основі методу квадратур шляхом застосування векторно-матричного підходу до апроксимації інтегральних операторів; регуляризаційний метод розв’язування поліноміальних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду другого степеня на основі введення диференціального регуляризаційного оператора.

Список використаних джерел:

1. Верлань А. Ф. Інтегральні рівняння: методи, алгоритми, програми / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Київ, 1986. – 544 с.
2. Верлань А.Ф. Моделі динаміки електромеханічних систем / А.Ф. Верлань, В.А. Федорчук. – Київ, 2013. – 221 с.
3. Ivaniuk V., Ponedilok V. Method of restoration of input signals of nonlinear dynamic object with distributed parameters / V. Ivaniuk, V. Ponedilok // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць. – Кам’янець-Подільський, 2018. – Вип. 18. – С. 65-73.
4. Ivanyuk V. A. Vector-matrix method of numerical implementation of the polynomial integral Volterra operators / V.A. Ivanyuk, V.A. Fedorchuk // Матем.

- матичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки : зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський, 2019. – Вип. 20. – С. 40-50.
5. Іванюк В. А. Адаптивний метод ідентифікації моделей нелінійних динамічних систем інтегральними рядами Вольтерри / В.А. Іванюк, В.А. Федорчук // Електронне моделювання. – 2019. – Т. 41, № 3. – С. 33-42.

УДК 517.925

С. А. Іліка, канд. фіз.-мат. наук,

І. І. Тузик, аспірант,

І. М. Черевко, д-р фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

АПРОКСИМАЦІЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО- ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕАСИМПТОТИЧНИХ КОРЕНІВ ЇХ КВАЗІПОЛІНОМІВ

Схеми апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь (ДРР) запропонував М.М. Красовський [1]. Подальше вивчення схем апроксимації ДРР у різних функціональних просторах на скінченному інтервалі здійснено у працях І.М. Черевка та Л.А. Піддубної [2-3]. Побудова та обґрунтування схем апроксимації лінійних та квазілінійних диференціально-функціональних рівнянь (ДФР) послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь досліджена в роботах І.М. Черевка та С.А. Іліки [4-5]. Вивчення зв'язків між ДРР і апроксимуючими їх системами звичайних диференціальних рівнянь дозволили запропонувати алгоритми розв'язання ряду прикладних задач, пов'язаних із апроксимацією неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних ДРР [6-7].

У даній роботі схема апроксимації [1] поширюється на випадок початкової задачі для лінійних автономних ДФР вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=0}^p A_k(x - \tau_k) + D \int_{-\tau}^0 x(t + \theta) d\theta, \quad (1)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0],$$

де A_k , $k = \overline{0, p}$, D – матриці розмірності $n \times n$, $x \in R^n$,

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_p = \tau.$$

Характеристичний квазіполіном для рівняння (1) має вигляд

$$\det(\lambda E - \sum_{k=0}^p A_k e^{-\lambda \tau_k} - \frac{D}{\lambda}(1 - e^{-\lambda \tau})) = 0. \quad (2)$$

Поставимо у відповідність початковій задачі (1) задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= \sum_{k=0}^p A_k z_k(t) + \frac{m}{\tau} D \sum_{i=0}^{m-1} z_{m-i}(t), \\ \frac{dz_j(t)}{dt} &= \frac{m}{\tau} (z_{j-1}(t) - z_j(t)), \quad j = \overline{1, m}, \quad t \in [t_0, T] \\ z_j(t_0) &= \varphi(t_0 - \frac{\tau j}{m}), \quad j = \overline{0, m}, \quad l_j = [\frac{m\tau j}{\tau}]. \end{aligned} \quad (3)$$

Встановлено [5], що розв'язки задачі Коші (3) апроксимують розв'язок початкової задачі (1) і справджується співвідношення

$$\left\| z_j(t) - x(t - \frac{j\tau}{m}) \right\| \rightarrow 0, \quad j = \overline{0, m}, \quad t \in [t_0, T] \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Одержано алгоритм наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполінома (2), за допомогою коренів характеристичного рівняння апроксимуючої системи (3).

Список використаних джерел:

1. Красовський Н.Н. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием / Н.Н. Красовский // ПММ. – 1964. – Т. 28, №4. – С. 716-725.
2. Cherevko I. Approximations of differential difference equations and calculation of non asymptotic roots of quasi polynomials/ I. Cherevko, L. Piddubna // Revued` analyse numerio queetde theoriedel` approximation. – 1999. – 28. – №1. – p. 15-21.
3. Піддубна Л.А. Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь / Л.А. Піддубна, І.М. Черевко // Нелінійні коливання. – 1999. – №1. – С. 42-50.
4. Матвій О.В. Про стійкість лінійних систем із запізненням / О.В. Матвій, С.А. Пернай, І.М. Черевко // Наук. Вісник Чернівецького ун-ту : зб. наук. пр. – Чернівці : Рута, 2008. – С. 66-70.
5. Іліка С.А. Апроксимація нелінійних диференціально-функціональних рівнянь / С.А. Іліка, І.М. Черевко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – Т. 55, №1. – С. 39-48.
6. Черевко І.М. Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість / І.М. Черевко, О.В. Матвій // Нелінійні коливання. – 2004. – Т. 7, №2. – С. 208-216.
7. Іліка С.А. Апроксимація лінійних диференціально-різницевих рівнянь та її застосування / С.А. Іліка, Л.А. Піддубна, І.І. Тузик, І.М. Черевко // Буковинський математичний журнал. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2018. – Т. 6, № 3-4. – С. 80-83.

M. M. Karimov, Dr. Sc,
Sh. R. Gulomov, PhD,
S. M. Khamdamova, doctoral student

Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi,
Tashkent State Technical University named after Islam Karimov

MODELING THE ONE-WAY NETWORK PACKET DELAY

One of the most important requirements for new generation networks is a low transmission delay, namely, a short system response time. One-way packet delay is one of the key performance metrics for IP networks. To accordance to ITU-T Y.154, this metric is critical for real-time applications, interactive applications, and control systems using the global network. One-way network delay is a tool for detecting asymmetric IP channels in a wide area network when the network packet paths in the forward and reverse directions are different. The ability to track changes in network routes allows you to abandon the use of traceroute utility, the results of which are difficult to automate. The main difficulty in measuring one-way delay is the need to synchronize system time on remote devices [1, 2].

And so, for modeling one-way packet delay, various classification schemes are offered. However, there are two schemes that are universal and recognized by all researchers. The first approach is to analyze the nature of network latency and allows us to distinguish two components, physical and telecommunication. Physical delay – $Delay_{physic}$ represents the propagation time of the electromagnetic wave along the telecommunication path that carries information about the digital code. Telecommunication component $Delay_{telecommunication}$ includes all delays associated with the formation and processing of packets. The theoretical basis for describing this component is queuing theory.

From a mathematical point of view, the delay is also divided into two components. The first component is a constant value, which is determined by the minimum delay $Delay_{min}$. The second component is a variable that is random in nature.

The physical component of the delay is limited from above by the minimum delay $Delay_{physic} \leq Delay_{min}$. Under analyzing the data and test traffic measurement (TTM) was proposed to isolate the following components from the telecommunications part (Figure 1).

One of the main tasks in the analysis of data on the delay is the allocation of its various components and, above all, the allocation of physical $Delay_{physic}$ and telecommunication component $Delay_{min}$. In addition, the

telecommunication component is quite complicated, and its analysis is no less interesting for understanding the nature of the delay.

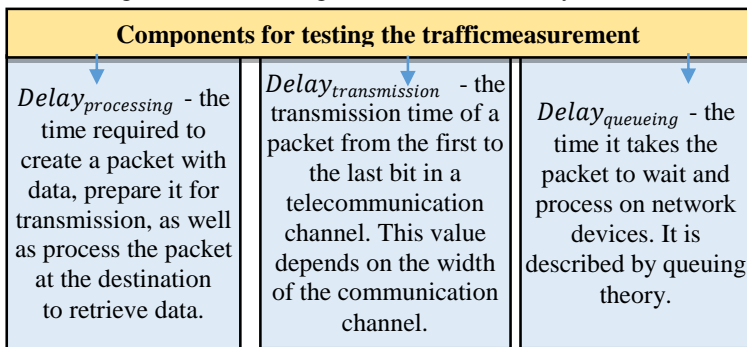


Fig. 1. The scheme of components for testing the traffic measurement

An experiment was conducted to minimize the contribution of physical delay, when two devices were placed in one corporate network. Moreover, Fast Ethernet ports during the experiment were connected directly using a crossover cable without intermediate network devices. The measurement results can be seen in the table 1.

Table 1

LAN minimum latency on local network

Packetsize, Byte	Protocoltype	Minimumdelay, mks	
		Clientserver	Clientserver
46	ICMP	132	116
46	UDP	128	114

In this case, the physical delay can be neglected, therefore, there are four main components:

$$D = Delay_{variation} + Delay_{latency} + Delay_{transmission} + Delay_{processing} ,$$

where $Delay_{variation}$ – this is the difference in the network transit time of consecutive packets of one connection; $Delay_{latency}$ – is the delay before sending data, that is, the time it takes to establish connection.

The delay in the client-server section is always greater than in the opposite direction. This remark is true not only for an experiment in a local network, but also for any pair of measuring nodes.

References:

1. Abdou A.R. Accurate One-Way Delay Estimation with Reduced Client Trustworthiness / A.R. Abdou, A. Matrawy, P.C. Van Oorschot // IEEE Communications Letters. – 2015. – T. 19. – №5. – C. 735-738.

- Hisamatsu H., Oda H. Design, implementation and evaluation of ICMP-based available network bandwidth measurement based on IMTCP / H. Hisamatsu, H. Oda // International Journal of Computer Networks & Communications. – 2014. – Т. 6. – №3. – С. 1.

УДК 004.94

Ш. Каюмов, канд. физ.-мат. наук,

М. В. Сагатов, д-р техн. наук

Ташкентский Государственный Технический Университет
имени Ислама Каримова, г. Ташкент

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ВЫТЕСНЕНИЯ ФЛЮИДОВ

Рассмотрим задачу фильтрации флюидов в подземных пористых средах. Известно, что движение флюидов в пористых средах связано с решением квазилинейных параболических уравнений в частных производных второго порядка, моделирующих эти движения. Пусть область D занята сжимаемым флюидом, а Ω – область, которая содержит несжимаемый флюид. Предположим, что сжимаемая среда “плавает” на несжимаемой части области, и границы области Ω имеют большую протяженность по сравнению с размерами области D . Можно допустить, что эти области неструктурированные, тогда математическую модель этой физической задачи можно сформулировать следующим образом:

требуется определить функцию $U(x, y, z, t)$ и $v(x, y, z, t)$, а также подвижную границу $h(x, y, z, t)$ из системы дифференциальных уравнений вида:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{K(x, U)U}{\mu_2(U)\tilde{Z}(U)} \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) = M_1(x, U)\sigma_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m(U)}{z(U)} U \right) + F(x, t), \quad (1)$$

$$x \in D, t > 0$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{K(x, v)v}{\mu_B(v)\tilde{Z}(v)} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) = M_1(x, v)\sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} (m(v)v), \quad (2)$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = v(x, 0) = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega \cup \bar{D}, \quad (3)$$

и граничными условиями

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n_1} \right|_{\Gamma_1} = \varphi_1, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial n_2} \right|_{\Gamma_2} = \varphi_2, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x_3} \right|_{x_3=H_1} = \varphi_3, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x_3} \right|_{x_3=H} = 0, \quad (4)$$

а также с условиями на контакте двух флюидов поверхности $h(x, t)$

$$u(x, t) \Big|_{x_3=h^-} = v(x, t) \Big|_{x_3=h^+}, \quad \frac{K}{\mu_2} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x_3=h^-} = \frac{K}{\mu_b} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x_3=h^+}, \quad (5)$$

$$m\sigma \frac{dh}{dt} = -\frac{K}{\mu_b} \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{x_3=h^-}, \quad h(x, 0) = \omega_0, \quad (6)$$

где

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad z = x_3, \quad D = \{(x) : h(x, t) \leq \Gamma_1(x)\},$$

$$\Omega = \{(x) : H(x) \leq x_3 \leq h(x, t)\}.$$

Коэффициенты

$k(x, u), \mu_2(u), z(u), z(v), \mu_b(v), M_1(x, u), M_2(x, v), m(v)$, описывают характеристики флюидов и пласта [1]. Так как задача (1)-(6) в общем случае нелинейная и многомерная, то аналитическое решение почти невозможно. Поэтому для решения задачи применяются приближённые методы, в частности, метод физического и математического расщепления. В дальнейшем используется итерационный метод для нелинейных коэффициентов, метод переменных направлений с сочетанием метода прямых по t , а также потоковый вариант метода разностных прогонок.

Чтобы в разностных уравнениях коэффициенты были известны, заранее строятся трёхмерные матрицы для фильтрационных и ёмкостных параметров методом локальной аппроксимации.

После определения U_{ijk} и V_{ijk} производится уточнение положения $h(x, t)$ по формуле (6), предварительно дискретизируя

$$h_{e+1} = h_e - G_{ijk} P_{ijk}, \quad \text{где } P_{ijk} = \left(\frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{x_3=h^+} \right)_{ijk}, \quad \text{которые можно аппроксими-$$

ровать первым или вторым порядком точности. При необходимости нетрудно улучшить значения Γ по формуле Эйлера, либо использовать метод «челночных» итераций [1].

Результаты работы можно использовать при определении технико-экономических показателей разработки подземных месторождений имеющие вышеописанные характеристики.

Список использованной литературы:

1. Каюмов Ш. Математическое моделирование задач теории фильтрации со свободными границами / Ш. Каюмов. – Ташкент, 2017. 274 с.

В. Мороз, д-р техн. наук,

А. Вакарчук, аспірант

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ЧИСЛОВИХ ІНТЕГРАТОРІВ НА ПОВЕДІНКУ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ

Використання мікропроцесорів і мікроконтролерів у системах регулювання дало змогу реалізувати складні закони керування, у т. ч. інтелектуальні. Такі системи передбачають використання вбудованих алгоритмів і програм, однією з визначальних частин яких є реалізація числових методів. Наприклад, за даними Міжнародної асоціації інженерів-електриків (IEEE) до 95% усіх промислових контролерів є ПД-регуляторами, де складовою частиною є операція інтегрування.

Використання в цифрових системах керування, які є системами реального часу, числових інтеграторів обмежується лише багатокроковими методами з постійним кроком інтегрування внаслідок особливостей технічної реалізації [1]. Тому з досліджень виключено широкий спектр однокрокових методів внаслідок неможливості отримання в технічній системі інформації про поведінку функції розв'язку в проміжку між відліками оперативного сигналу.

Потрібно відзначити, що, з одного боку, в прикладній математиці відомо про вплив числових методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь на поведінку цифрової моделі, що коректується вибором відповідного кроку інтегрування. З іншого боку, в цифрових системах реального часу крок інтегрування є фіксованим і наперед заданим під час проектування такої системи, що накладає певний відбиток на її поведінку [1]. На першому етапі досліджень запропоновано використати для аналізу найпростіший варіант моделі технічного об'єкта – аперіодичну ланку першого порядку з передавальною

функцією $W(s) = \frac{1}{Ts+1}$, що відповідає звичайному диференціально-

му рівнянню $Ty' + y = f$, де T – стала часу; y – змінна; f – збурення.

Такий вибір тестового об'єкта дає змогу простими засобами знайти еталонний тестовий розв'язок для порівняння та застосувати апарат теорії автоматичного керування (стосовно дискретних систем) для аналізу та пошуку причин відмінностей у поведінці цифрових інтеграторів, розглядаючи їх як цифрові фільтри [1]. Використання методів теорії керування, зокрема, методів аналізу та синтезу дискретних систем з використанням апарату z -перетворення, дає переваги, які

пов'язані з однозначною відповідністю характеристик в частотній та часовій областях для лінійних і лінеаризованих систем [2, 3].

Процес отримання дискретної моделі у формі рекурентного рівняння для системи реального часу з фіксованим кроком інтегрування h показано на прикладі неявної формули Адамса третього порядку [4]. Після підстановки значення похідної та спрощень отримуємо ре-

курентну формулу $y_{i+1} = \frac{(12-8h)y_i + hy_{i-1} + h(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1})}{12 + 5h}$,

відповідно, з врахуванням теореми зміщення [2, 3] її дискретну пере-

давальну функцію $W_{AM3}(z) = \frac{h(5z + 8 - z^{-1})}{(12T + 5h)z - 12T + 8h - hz^{-1}}$. Для отри-

маних дискретних передавальних функцій цифрових моделей на основі явних і неявних формул Адамса до 4-го порядку побудовано засобами MATLAB (Control System Toolbox) частотні характеристики. Нижче показано їх приклад для значення $h/T = 0.1$.

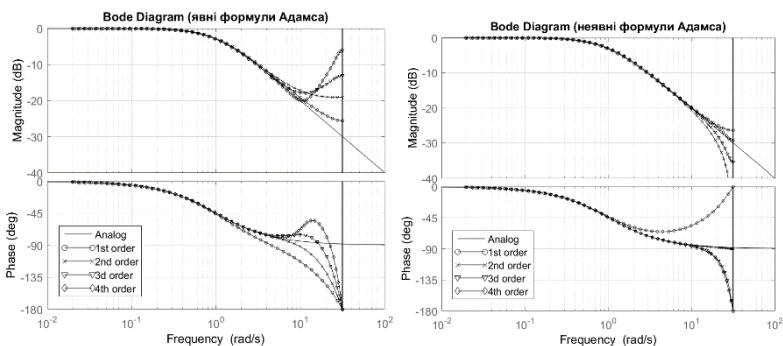


Рис. 1.

Проведені дослідження підтверджують, що вплив на поведінку синтезованих цифрових систем здійснюють частотні характеристики числових інтеграторів. Це узгоджується з раніше висловленими твердженнями про перспективність застосування для цифрових систем керування інтегральних методів [5], зокрема, z -перетворення.

Список використаних джерел:

1. Мороз В. Числові інтегратори в цифрових системах керування / В. Мороз // Вісник Національного університету "Львівська політехніка" "Електроенергетичні та електромеханічні системи". – 2006. – №563. – С. 99-104.
2. Eliahu I. Jury. Theory and Application of the Z-Transform Method. – KriegerPubCo, 1973. – [ISBN 0-88275-122-0]
3. Katsuhiko Ogata. Discrete-Time Control Systems, 2nd edition. – Published by Pearson, 1995. – [ISBN-13: 9780130342812]

4. E. Hairer, S. Nørsett, G. Wanner. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. 2nd Edition. – Springer, 2008. [ISBN 978-3-540-56670-0]
5. Верлань А. Ф. Вычислительные процессы в системах управления и моделирования / А.Ф. Верлань, И.Е. Ефимов, А.В. Латышев. – Л. : Судостроение, 1981. – 248 с.

УДК 681.5.015.52

В. Д. Павленко, д-р техн. наук,

Т. В. Шаманіна

Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса

ПОБУДОВА МОДЕЛІ ВОЛЬТЕРРИ ОКО-РУХОВОЇ СИСТЕМИ НА ОСНОВІ ДАНИХ АЙТРЕКІНГУ

Інноваційна інформаційна технологія айтрекінгу (Eye-Tracking) останнім часом отримала подальший розвиток та ефективно застосування при побудові математичної моделі процесу неперервного відстеження руху ока з метою виявлення аномалій в даних відстеження для кількісної оцінки психофізіологічного стану людини [1-2]. При цьому використовується інтегральна нелінійна динамічна модель – модель Вольтерри, для побудови якої використовуються дані експериментальних досліджень око-рухової системи (ОРС) «вхід-вихід» [2].

Метою роботи є розробка інструментальних алгоритмічних та програмних засобів побудови непараметричної динамічної моделі ОРС на основі даних експериментальних досліджень «вхід-вихід» з застосуванням тестових візуальних стимулів та технології айтрекінгу.

Беручи до уваги фізіологічні особливості ОРС, для побудови моделі Вольтерри використовуються тестові візуальні стимули – ступінчасті сигнали різної амплітуди, які реалізуються у вигляді яскравої точки на моніторі комп'ютера з різною відстанню a_i ($i = 1, 2, \dots, L$) від стартової позиції. Тоді тестові візуальні стимули можна формально представити у вигляді функцій $x_i(t) = a_i \theta(t)$, де $\theta(t)$ – одинична функція (функція Хевісайда). На основі даних відгуків ОРС, отриманих за допомогою технології айтрекінгу, визначаються перехідна функція 1-го порядку і діагональні перетини перехідних функцій n -го порядку ($n \geq 2$) [2].

У дослідженні кожного респондента послідовно реалізовані три експерименти для 3-х амплітуд тестових сигналів в напрямку «погоризонталі». Між стартовою позицією та тестовими стимулами відстані дорівнюють: $0.33lx$, $0.66lx$, $1.0lx$, де lx – довжина екрану монітора. Координати стартової позиції ($x = 0$; $y = 0.5ly$), ly – ширина екрану монітора.

Експериментальні дослідження ОРС проводилися з використанням високотехнологічного обладнання – айтрекера TobiiProTX300 (300 Hz),

наданого для досліджень Центром інновацій та просунутих технологій Люблінського технологічного університету (Люблін, Польща) [3].

Експерименти організовано з метою класифікації респондентів (інформантів) за станом втоми. Збір даних полягає в вимірюваннях відгуків ОРС на однакові тестові сигнали, які здійснюються в різний час дня: «Вранці» (до роботи) і «Вечері» (після роботи). Усереднені значення відгуків ОРС «Вранці» і «Вечері» наведено на рис. 1. На основі усереднених даних айтрекінгу визначено перехідні функції 1-го, 2-го та 3-го порядку ОРС для станів респондента «Вранці» та «Вечері» (рис. 2).

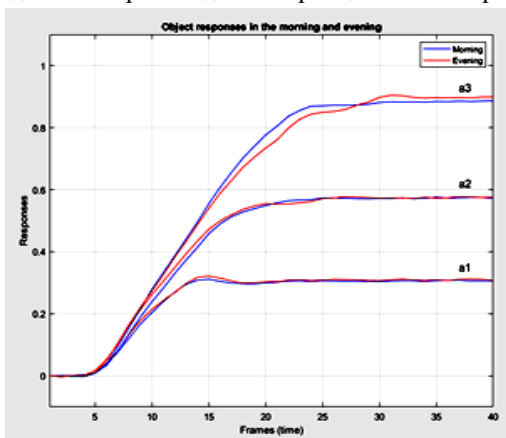


Рис. 1. Усереднені відгуки ОРС при різних амплітудах тестових сигналів «Вранці» і «Вечері»

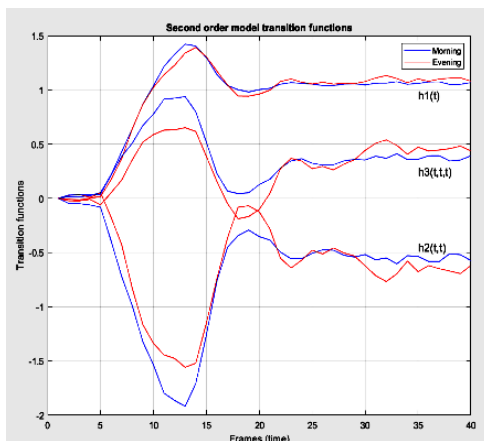


Рис. 2. Оцінки перехідних функцій 1-го, 2-го та 3-го порядку «Вранці» і «Вечері»

З рис. 2 видно суттєва змінність перехідних функцій 2-го та 3-го порядків для різних психофізіологічних станів респондента (за рівнем втоми). Таким чином, їх можна використовувати в діагностичних дослідженнях в області нейронаук та психології.

Список використаних джерел:

1. Jansson D., Medvedev A., Axelson H., Nyholm D. Stochastic anomaly detection in eye-tracking data for quantification of motor symptoms in Parkinson's disease // *Advances in Experimental Medicine and Biology*. – 2015. – 823 – P. 63-82.
2. Pavlenko V., Salata D., Dombrovskiy M. and Maksymenko Yu. Estimation of the Multidimensional Transient Functions Oculo-Motor System of Human // *Mathematical Methods and Computational Techniques in Science and Engineering: AIPConf. Proc. MMCTSE'2017, Cambridge, UK.* – 2017. – Vol. 1872. – Melville, New York. Published by AIP Publishing. – P.110-117.
3. Салата Д.В., Чори В.В., Mishchenko I., Павленко В.Д., Milosz M., Dzienkowski M. Экспериментальные исследования глазодвигательной системы с помощью айтрекера TОВІPROTХ300 // *Матеріали VIII Міжнар. конф. студентів і молодих науковців «Сучасні інформаційні технології 2018»*, МІТ-2018. – Одеса: ОНПУ ІКС, 2018. – С.105-106.

УДК 004.942:519.642.5

В. В. Понеділок, канд. техн. наук,

В. А. Грищук, асистент

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРИ МЕТОДОМ КОЛОКАЦІЙ

Апарат інтегральних рівнянь набув широкого використання в фізиці (теорія хвиль на поверхні рідин, кристалографія, акустика), геофізиці (задачі сейсміки), механіці (коливання конструкцій), теорії керування (задача оптимальної лінійної фільтрації), теорії масового обслуговування (задача відновлення). Крім того, розвиваються нові напрями, що пов'язані з використанням рівнянь Вольтерри, в тому числі деякі розділи біології (задача розповсюдження епідемії, моделювання взаємодії між клітками та всередині них), іконіки (відновлення спотвореного зображення). Для цих задач виникає необхідність у розв'язуванні зворотних задач динаміки на основі моделей в формі інтегральних рівнянь Вольтерри, де використовуються класичні методи розв'язування: аналітичні, операційні, квадратурні, ітераційні та інші.

Значна кількість наукових праць присвячені наближеним методам розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри, серед яких моно-

графія Н. Brunner [1], vander Houwen, в якій наведена як класична теорія інтегральних рівнянь Вольтерри, так чисельні методи їх розв'язання. В книгах А.Ф. Верляня та В.С. Сізікова [2], А.Д. Поляніна та А.В. Манжирова [3] описана значна кількість чисельних методів розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри та Фредгольма першого та другого роду.

При розв'язуванні нелінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерри I роду виникають певні обмеження при застосуванні методу квадратур. Зокрема в праці Апарцина А.С. доведено, що на практиці важко підібрати квадратурні формули більш точніші, ніж формула трапецій [4]. Тому виникає необхідність розвитку інших методів для реалізації процесу відновлення вхідного сигналу на основі моделей, поданих у вигляді інтегральних рівнянь Вольтерри. У зв'язку з цим, актуальним є застосування методу колокацій для розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри.

Для нелінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерри I роду є можливість отримувати розв'язки на проміжках, обираючи їх довжину і застосовуючи на кожному з них апроксимуючий вираз з невеликим числом лінійно-незалежних базисних функцій.

Нехай задано нелінійне інтегральне рівняння типу Вольтерри I роду

$$\int_a^x K[x, s, y(s)] ds = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (1)$$

де $K(x, s, y(s))$ – ядро; $f(x)$ – права частина; $y(s)$ – шукана функція, $[a, b]$ – інтервал.

Застосування методу колокацій при розв'язуванні нелінійних інтегральних рівнянь (1) полягає в наступному. Проміжок $[a, b]$ розбивається на N частин, на кожному з яких шуканий розв'язок подається у вигляді функції

$$\tilde{y}(x) = \Phi(x, C_1, C_2, \dots, C_m), \quad (2)$$

яка залежить від вільних параметрів C_i , $i = 1, m$.

Рівняння на кожному $(k+1)$ відрізку $x_k \leq x \leq x_{k+1}$, $k = \overline{0, N-1}$, записується у вигляді

$$\int_{x_k}^x K[x, s, \tilde{y}(s)] ds = f(x) - \varphi_k(x), \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad (3)$$

де функцією $\varphi_k(x)$ є інтеграл

$$\varphi_k(x) = \int_a^{x_k} K[x, s, \tilde{y}(s)] ds, \quad s \in [a, x_k], \quad x \in [x_k, x_{k+1}],$$

що завжди може бути обчислений на проміжку $a \leq x \leq x_k$ за відомим наближеним значенням $\tilde{y}(x)$, яке отримане заздалегідь для $k-1$ проміжку. Початкове значення шуканого розв'язку $y(a)$ вважається заданим.

Для розв'язання рівняння (3) використовується запис (2), а вільні параметри C_i , $i = 1, m$, визначаються з умови нульової нев'язки

$$\omega(C_i, x_{k,j}) = \int_a^{x_{k,j}} K[x_{k,j}, s, \Phi(s, C_1, C_2, \dots, C_m)] ds - f(x_{k,j}) - \varphi_k \quad (4)$$

де $x_{k,j}$, $i = \overline{1, m}$ – вузли, що відповідають розбиттю відрізка $[x_k, x_{k+1}]$ на m частин. Вираз (4) – система m рівнянь відносно C_1, C_2, \dots, C_m .

Для зручності обчислень шуканий розв'язок на проміжку доцільно подавати у вигляді деякого поліному

$$y(x) = \sum_{i=1}^m C_i \psi_i(x),$$

де $\psi_i(x)$ – лінійно-незалежні функції.

Аналогічно застосовується метод колокацій для розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри II роду:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K[x, s, y(s)] ds, \quad s, x \in [a, b]. \quad (5)$$

Рівняння (5) можна розглядати у вигляді

$$y(x) = f(x) + \int_{x_{k-1}}^x K[x, s, y(s)] ds + \varphi_k(x), \quad s, x \in [x_{k-1}, x_k], \quad (6)$$

де

$$\varphi_k(x) = \int_a^{x_{k-1}} K[x, s, y(s)] ds, \quad s \in [a, x_{k-1}], x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Для побудови наближеного розв'язку рівняння (5) кожен з N відрізків проміжку $[a, b]$ розбивається на m частин довжиною h і, таким чином, весь проміжок інтегрування утворює сітку з кроком h , а довжина кожного відрізка mh .

Таким чином, застосування чисельного алгоритму на основі методу колокацій для нелінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерри дозволяє отримувати розв'язок на кожному з проміжків. Враховуючи регуляризаційні властивості кроку розбиття та побудову апроксимуючого виразу підінтегральної функції на основі невеликого числа лінійно-незалежних базисних функцій, метод дає змогу підвищити точність чисельного розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерри.

Список використаних джерел:

1. Brunner H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 597 p.
2. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986. 544 с.
3. Полянин А. Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. Москва. ФИЗМАТЛИТ, 2003. 608 с.
4. Апарцин А.С. Полилинейные интегральные уравнения Вольтерри первого рода: элементы теории и численные методы. Известия ИГУ.2007. №1. С. 13-42.

УДК 004.32

О. В. Рудковський,

С. А. Положаснко, д-р техн. наук

Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НЕТЯГЛОВОГО РУХОМОГО СКЛАДУ ЗАЛІЗНИЦІ ТА СТАНУ ВАНТАЖІВ, ЩО ТРАНСПОРТУЮТЬСЯ НЕЮ

Розглянуто питання побудови математичних моделей (ММ) нетяглового рухомого складу (РС) залізниці (вагонів) і класу наливних, сипких, гранульованих та кускових вантажів, що в них транспортуються, на всіх етапах циклу транспортування (міжстанційні перегони, завантажувально-розвантажувальні операції, «відстій» і складське зберігання).

Враховуючи виконану також систематизацію і класифікацію РС залізниці та вантажів, які транспортуються нею [1, с.30], можна представити (як приклад) ММ наливних вантажів та відповідного РС – вагона-цистерни (рис. 1). Остання являє собою металевий бак циліндричної форми радіусу r та довжиною z .

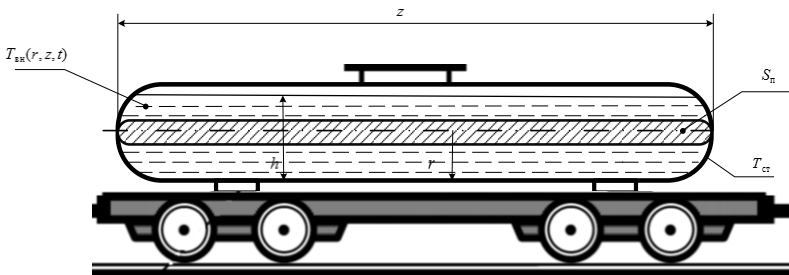


Рис. 1. Розрахункова схема вагона-цистерни

Область Ω в просторі \mathcal{R}^n , яку займає рідина-вантаж в порожнині вагону-цистерни, в перетині по осі уздовж останньої (для простоти) розглядається як прямокутник, границю Γ якого утворює зверху «дзеркало» рідини-вантажу, а з боків та низу – стінки баку вагону-цистерни. Час перебування вантажу у вагоні-цистерні представляється інтервалом $t = [0, t_k]$. Бак вагона-цистерни характеризується площиною горизонтального перетину S_{Π} та висотою h стовпа рідини (вантажу). Рідина-вантаж має температуру внутрішньої порожнини баку вагона-цистерни $T_{\text{вн}} = T_{\text{вн}}(r, z, t)$, а зовнішня стінка баку $T_{\text{ст}}$ може приймати температуру оточуючого середовища T_{oc} або зазнавати радіаційного опромінення до температури $T_{\text{рад}}$. Об'єм рідини, що перебуває в порожнині баку вагона-цистерни, характеризується початковим $V_{\text{поч}}(t_{\Pi})|_{t_{\Pi}=0} = V_{\text{поч}}$, та поточним $V_{\text{пот}}(t_k)$ значеннями.

Рівняння матеріального та енергетичного балансів для баку вагона-цистерни у диференціальній формі мають вигляд:

$$S_{\Pi} \frac{\partial h(r, z, t)}{\partial t} = \frac{V_{\text{поч}} - V_{\text{пот}}(t_k)}{t_k - t_{\Pi}} = \frac{V_{\text{поч}} - V_{\text{пот}}(t_k)}{t_k}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{\text{вн}}(r, z, t)}{\partial t} = & - \frac{m\alpha V_{\text{пот}}(t_k)}{\rho C_p S_{\Pi}} \left[\frac{\partial T_{\text{вн}}(r, z, t)}{\partial z} + \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial T_{\text{вн}}(r, z, t)}{\partial r} \right] - \\ & - \frac{2\pi r m \alpha}{\rho C_p S_{\Pi}} [T_{\text{ст}}(t_k) - T_{\text{вн}}(r, z, t)] \end{aligned} \quad (2)$$

з початковими

$$T_{\text{вн}}(r, z, t)|_{t=0} = T_{\text{вн}_0}, \quad T_{\text{ст}}(t)|_{t=0} = T_{\text{ст}_0}, \quad (3)$$

та граничними умовами

$$\begin{aligned} h(r, z, t)|_{r=0} = 0, \quad T_{\text{вн}}(r, z, t)|_{r=0} = T_{\text{вн}}(0, z, t), \\ h(r, z, t)|_{r=2r} = 2r, \quad T_{\text{вн}}(r, z, t)|_{r=2r} = T_{\text{вн}}(2r, z, t), \\ T_{\text{ст}}(t) = T_{\text{ст}}(t_k); \quad T_{\text{ст}}(t_k) = [T_{\text{oc}}(t_k), T_{\text{рад}}(t_k)] \end{aligned} \quad (4)$$

де m – маса рідини-вантажу; ρ, C_p, α – відповідно щільність та теплоємність рідини-вантажу (середні значення), а також коефіцієнт теплопередачі від стінки баку до його порожнини.

Рівняння (1)-(4) утворюють ММ вагона-цистерни з рідиною-вантажем, де (1) та (2) є рівняннями динаміки, а (3) та (4) – відповідно задають початкові та граничні умови.

З метою уніфікації (на умовах типізації) підходів щодо подальшої числової та обчислювальної реалізації запропонованих ММ досліджуваного класу вантажів та РС залізниці, в яких вони транспортуються, визначено можливості узагальненого математичного опису цих вантажів (або РС).

Список використаних джерел:

1. Polozhaenko S.A. Fore casting Modelling the Condition of a Non-trailing Mobile Railway and a Class of Bulk, Brake and Pulled Cargoes to be Carried in / S.A. Polozhaenko, J.V. Rudkovsky // Colloquium-journal. – №5(57), 2020. – P. 30 – 33. DOI: 10.24411/2520-6990-2020-11438.

UDK519.6

F. R. Saucedo-Zendejo

Research Center on Applied Mathematics,
Autonomous University of Coahuila, Mexico

MESHFREE MATHEMATICAL MODELING AND COMPUTER SIMULATION OF MOULD FILLING PROCESSES

Abstract. This paper reports the application of a Generalized Finite Differences Method (GFDM) method for the numerical modeling and simulation of three-dimensional mould filling processes in metal casting. This meshfree formulation provides the advantage of naturally capture the motion and filling pattern evolution without the need of adaptive remeshing algorithms. The main features of this meshfree formulation and details of its implementation are presented and finally, numerical results are reported which show that this formulation is suitable for the simulation of this kind of processes.

1. Introduction

Metal casting techniques are one of the most used processes to mass produce metal components of different dimensions with specific and complex shapes. These processes begin with a step in which molten metal is poured into a mould followed by a step where a complete material solidification occurs. Mould filling is one of the most important factors that determine the quality in the end products and unfortunately, it is very difficult to improve and optimize the mould filling step with experimental techniques since it is impossible to exactly measure velocities, temperatures and pressures without interfering with the process. Numerical simulation is commonly used to improve such processes since it provides a large amount of information that cannot be obtained through other methods [1].

Numerical mesh-based methods such as the Finite Element Method (FEM), Finite Difference Method (FDM), Finite Volume Method (FVM), and more recently, meshless methods as Smoothed-particle hydrodynamics (SPH) have already been used to analyse mould filling processes [2]. The advantages of meshless methods over mesh-based methods are that they use a set of nodes to discretize the problem domain and its boundaries without requiring any information about the relationship between nodes such that they do not form an element mesh which lets to model deformations and discontinuities in the domain without the mesh-based methods drawbacks [3].

A truly meshfree GFDM is the so called Finite Pointset Method (FPM) developed by J. Kuhnert [4]. It has proven to be far superior to traditional meshbased and some other meshfree methods to treat fluid dynamics problems with rapidly changing domains, free surface or multi-phase flows, and heat transfer problems [5-7]. Therefore, in this article we propose the application of this novel formulation for the modeling and simulation of mould filling processes.

2. Mathematical model

The governing equations for mould filling processes are the incompressible Navier-Stokes equations which in Lagrangian form read

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

where ρ is the density, p is the pressure, ν is the kinematic viscosity, \mathbf{f} is the body force and \mathbf{v} is the velocity. The problem is completed with the following initial and boundary conditions

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \quad (3)$$

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_i)}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad (6)$$

$$(\tau - Ip)\mathbf{n}|_{\partial\Omega_3} = \sigma k\mathbf{n}, \quad (7)$$

$$\mathbf{t}_i^T \tau \mathbf{n}|_{\partial\Omega_3} = 0, \quad (8)$$

where $\partial\Omega_1$ is a solid wall boundary with no-slip condition, $\partial\Omega_2$ is a solid wall boundary with free-slip condition, $\partial\Omega_3$ is a free surface, \mathbf{v}_0 is the initial velocity over the entire domain Ω , τ is the viscous stress tensor,

σ is the surface tension, κ is the free surface boundary curvature, \mathbf{n} is an outward orthonormal vector and \mathbf{t}_i is a tangential unitary vector to the boundary, for $i = 1, 2$.

In order to solve the system of equations (1) and (2) with the boundary and initial conditions (3)-(8) in a natural and simple way, a first order Chorin-Uzawa's projection formulation will be used which consists of the following steps [6]:

- Explicitly update the nodes positions through

$$\mathbf{r}^{n+1} = \mathbf{r}^n + \Delta t \mathbf{v}^n . \quad (9)$$

- Implicitly solve for the intermediate velocities

$$\mathbf{v}^* - \Delta t \nu \nabla^2 \mathbf{v}^* = \mathbf{v}^n + \Delta t \mathbf{f}^{n+1} \quad (10)$$

with the boundary and initial conditions (3)-(8),

- Implicitly solve for the artificial pressure

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^* \quad (11)$$

with the following boundary conditions

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \Omega_1, \partial \Omega_2} = 0 , \quad (12)$$

$$\varphi|_{\partial \Omega_3} = 0 . \quad (13)$$

- Correct/Update the velocity field

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \varphi . \quad (14)$$

- Correct/Update the pressure field

$$p^{n+1} = \varphi - \rho \nu \nabla \cdot \mathbf{v}^* . \quad (15)$$

where \mathbf{r}^n and \mathbf{v}^n are initially given and they denote the nodes positions and velocities at time step t^n , respectively.

3. Meshfree formulation

The FPM is a member of the family of the GFDM and it is based on the WLSM. Following [6]: Let Ω be a given domain with boundary $\partial \Omega$ and suppose that the set of points $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ are distributed with corresponding function values $f(\mathbf{r}_1), f(\mathbf{r}_2), \dots, f(\mathbf{r}_N)$. The problem is to find an approximate value of f at some arbitrary location $f(\mathbf{r})$ using its discrete values at particles positions inside a neighbourhood of \mathbf{r} . To define the set of nodes and the neighbourhood of \mathbf{r} , a weight function $w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ is introduced

$$w_i = w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \begin{cases} e^{-\gamma \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^2 / h^2}, & \text{if } \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|}{h} \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (16)$$

Where h is the smoothing length, γ is a positive constant whose value is considered to be 6.5 and \mathbf{r}_i is the position of the i -th point inside the neighbourhood. A Taylor's series expansion of $f(\mathbf{r}_i)$ around \mathbf{r} reads

$$f(\mathbf{r}_i) = f(\mathbf{r}) + \sum_{k=1}^3 f_k(r_{k_i} - r_k) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 f_{kl}(r_{k_i} - r_k)(r_{l_i} - r_l) + \epsilon_i, \quad (17)$$

where ϵ_i is the truncation error of the Taylor's series expansion, r_{k_i} and r_k represent the k -th components of the position vectors, f_k and f_{kl} ($f_{kl} = f_{lk}$) represent the set of first and second spatial derivatives at node position \mathbf{r} . The values of f_k and f_{kl} can be computed minimizing the error ϵ_i for the n_p Taylor's series expansion of $f(\mathbf{r}_i)$ corresponding to the n_p nodes inside the neighbourhood of \mathbf{r} . But equations (10) and (11), and the corresponding boundary conditions should be taken together with this set of Taylor's series expansions. The general form of these problems is

$$A f + \mathbf{B} \cdot \nabla f + C \nabla^2 f = D \quad (18)$$

whilst the general form of the boundary conditions is

$$E f + G \nabla f \cdot \mathbf{n} = H. \quad (19)$$

This system of equations can be written in matrix form as $\mathbf{e} = \mathbf{M}\mathbf{a} - \mathbf{b}$, where

$$\mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_{n_p}]^t, \quad \mathbf{a} = [f, f_1, f_2, f_3, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{22}, f_{23}, f_{33}]^t,$$

$$\mathbf{b} = [f(\mathbf{r}_1), f(\mathbf{r}_2), \dots, f(\mathbf{r}_{n_p}), D, H]^t, \quad M = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_{n_p}, \mathbf{s}_E, \mathbf{s}_B]^t,$$

$$\mathbf{s}_i = [1, \Delta r_{1i}, \Delta r_{2i}, \Delta r_{3i}, \Delta r_{11i}, \Delta r_{12i}, \Delta r_{13i}, \Delta r_{22i}, \Delta r_{23i}, \Delta r_{33i}]^t,$$

$$\Delta r_{k_i} = r_{k_i} - r_k, \quad \Delta r_{kl_i} = (r_{k_i} - r_k)(r_{l_i} - r_l)$$

and

$$\Delta r_{kk_i} = 0.5(r_{k_i} - r_k)(r_{k_i} - r_k) \text{ for } k, l = 1, 2, 3$$

and

$$k \neq l, \quad \mathbf{s}_E = [E, B_1, B_2, B_3, C, 0, 0, C, 0, C]^T$$

and

$$\mathbf{s}_B = [E, n_1, n_2, n_3, 0, 0, 0, 0, 0]^T.$$

The unknown vector \mathbf{a} is obtained through WLSM by minimizing the error \mathbf{e} , which reads $(M^t W M) \mathbf{a} = (M^t W) \mathbf{b}$, where

$$W = \text{diag}(W_1, W_2, \dots, W_{np}, 1, 1).$$

Therefore, $\mathbf{a} = (M^t W M)^{-1} (M^t W) \mathbf{b}$. In this way we automatically get the values of f and its derivatives at points \mathbf{r} . If we define $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_{10}]^t$ as the first row of $(M^t W M)^{-1}$ and the terms in the moving least squares solution $\mathbf{a} = (M^t W M)^{-1} (M^t W) \mathbf{b}$ are worked out, we can see that the following linear equations arises

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}_i) - \sum_{i=1}^{n(j)} (w_i q_1 + q_2 \Delta r_{1i} + q_3 \Delta r_{2i} + q_4 \Delta r_{3i} + q_5 \Delta r_{11i} + \\ + q_6 \Delta r_{12i} + q_7 \Delta r_{13i} + q_8 \Delta r_{22i} + q_9 \Delta r_{23i} + q_{10} \Delta r_{33i}) f(\mathbf{r}_i) = \quad (20) \\ [Aq_1 + b_1 q_2 + b_2 q_3 + b_3 q_4 + (q_5 + q_8 + q_{10}) C] D + \\ + [Eq_1 + Gn_1 q_2 + Gn_2 q_3 + Gn_3 q_4] H \end{aligned}$$

where $f(\mathbf{r}_i)$ denotes the unknown function value at particle j and $n(j)$ the number of j -th particle neighbours. Since equation (20) is valid for $j = 1, 2, N$, this can be arranged in a full sparse system of linear equations $LF = P$, which can be solved by iterative methods. For further information on this kind of problems, we refer to [5]. Therefore, all kind of problems as (9-15) can be solved with this formulation, just adding appropriate entries in the corresponding systems of equations.

4. Numerical Example

In this section the suitability of this meshfree formulation for the modeling and simulation of mould filling processes in casting will be evaluated considering the filling of a pump cover.

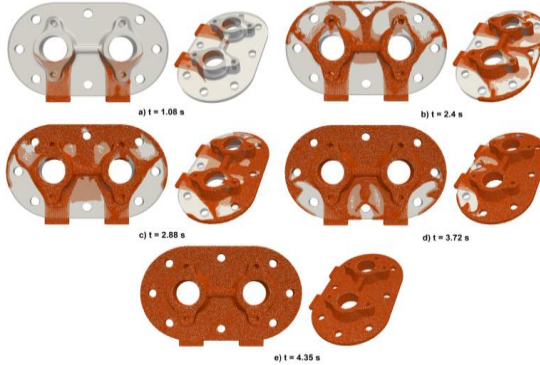


Fig. 1. Numerical filling patterns at different time steps

Two perspective views of the filling patterns at different time steps are depicted in Fig. 1. There, the picture on the left shows the view exactly from the top whilst the second one shows the view from the top at some angle to the right. As it is shown in this figure, the leading material is divided in four liquid fronts when it impacts the two annular central sections of the die. Two central jets partially merge forming a single liquid front which is split again when it impacts the central cylindrical obstacle. The emerging jets move backwards and starts filling the rear part of the mould. Splashing droplets and liquid fragmentations are visible in this part. The remaining two jets flow around the curved outsides of the die until they collide with the fronts coming from the rear and central parts of the mould. In the two annular central sections of the mould, the liquid flow up into the upper extensions. At this point the rear part of the mould is substantially filled and the fluid flow is towards the front part of the mould. Afterwards, almost all the mould cavity is filled and the biggest voids are principally behind two of the cylindrical obstacles near the inflow jets. They are uniformly filled until the filling process finishes. These pictures show the robustness of this FPM formulation for the simulation of complex 3D mould filling processes since the splashing into droplets, the fluid fragmentation into jets and the fronts collisions observed in this example are well reproduced and predicted by this approach.

5. Conclusions

Based on the numerical performance shown in the numerical example we can conclude that the current approach is suitable and feasible for the simulation of 3D mould filling processes. It is stable and it has enough accuracy in order to capture the splashing into droplets, the fluid fragmentation into jets and fronts collisions which are observed in this kind of processes. Since this formulation is a truly meshfree method it could be used for the study and analysis of complex problems involving high deformations and domain fragmentations with a great computational advantage since it does not need to compute any numerical quadrature and it does not need remeshing approaches. Further, it is able to naturally and easily handle any kind of boundary conditions without requiring any special treatment or stabilization and it is really simple to implement. Therefore, it could be a promising numerical tool for the simulation of industrial processes involving complex flows and other phenomena described by elliptic partial differential equations as heat transfer. Consequently, it depicts a rich source of research opportunities.

References:

1. Kermanpur, A., Mahmoudi, S., Hajipour, A Numerical simulation of metal flow and solidification in the multi-cavity casting moulds of automotive components. *J. Mater. Process. Technol.* 206(1-3), 62–68 (2008).

2. Cleary P.W., Savage G., Ha J., Prakash M. Flow analysis and validation of numerical modelling for a thin walled high pressure die casting using SPH. *Comput. Part. Mech.* 1(3), 229–243 (2014).
3. Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M., Krysl, P.: Meshless methods: An overview and recent developments. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 139 (1-4), 3–47 (1996).
4. Kuhnert, J.: General Smoothed Particle Hydrodynamics. Ph.D. thesis, Technische Universität Kaiserslautern (1999).
5. Reséndiz-Flores EO, Saucedo-Zendejo FR. Numerical simulation of coupled fluid flow and heat transfer with phase change using the Finite Pointset Method. *International Journal of Thermal Sciences.* 2018 Nov 1;133:13-21.
6. Saucedo-Zendejo, F.R., Reséndiz-Flores, E.O.: A new approach for the numerical simulation of free surface incompressible flows using a meshfree method. *Comput. Method. Appl. M.* 324, 619–639 (2017).
7. Tiwari, S., Kuhnert, J.: Modeling of two-phase flows with surface tension by finite pointset method (FPM). *J. Comput. Appl. Math.* 203(2), 376–386 (2007).

УДК 519.85

Н. В. Семенова, доктор фіз.-мат. наук,

В. О. Колєчкін, аспірант

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, м. Київ

БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІ МОДЕЛІ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ ЗАХИСТУ ІНФОРМАЦІЙНИХ МЕРЕЖ

Захист інформації на сьогодні є важливим аспектом на будь-якому підприємстві чи в установі. Інформаційній системі приділяється ряд вимог, які можна поділити на такі групи: економічні, технічні, програмні та організаційні. В літературі оптимальні за економічними показниками системи розглядаються з двох різних позицій: при заданих ресурсах встановлюється максимальний рівень безпеки інформації або при заданому рівні безпеки визначаються мінімальні витрати на ресурси, які виділяються для забезпечення безпеки інформаційних технологій [1]. Для моделювання і розв'язування такої прикладної задачі доцільно скористатися математичними моделями комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. Такі функції часто зустрічаються для опису різних прикладних задач, де один з показників треба мінімізувати, а інший максимізувати, чи навпаки. Тому, враховуючи, що побудова комплексної системи захисту інформації має бути проведена з максимальною економічною ефективністю і з мінімальними затратами, очевидно, що використання в моделях комбінаторної оптимізації дробово-лінійних цільових функцій є ефективним для вирішення зазначених задач [2].

При відображенні комбінаторної множини $A(B)$ розміщень в евклідов простір R^n сформулюємо задачу $Z(F, X)$ мінімізації векторного критерію $F(x)$ на множині альтернатив $X \subset R^n$, причому кожному елементу $b \in A(B)$ відповідає точка $x \in X$, така, що $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_l(x))$:

$$Z(F, X) : \min \{F(x) \mid x \in X\}, \quad f_i : R^n \rightarrow R^1,$$

$$f_i(x) = \frac{\langle c^i, x \rangle + c_0^i}{\langle d^i, x \rangle + d_0^i}, \quad i \in N_l = \{1, 2, \dots, l\}, \quad c^i \in R^n, d^i \in R^n, c_0^i \in R, d_0^i \in R,$$

X – не порожня дискретна множина в R^n , що має властивості: $\text{vert } M \subseteq X \subset M$, де

$$M = \left\{ x \in R^n \mid \sum_{j=1}^{|\omega|} b_j \leq \sum_{i \in \omega} x_i \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} b_{q-j+1} \quad \forall \omega \subset N_n \right\},$$

$M = \text{conv } A(B)$ [3, 4].

Допустима область задачі $Z(F, X)$ може містити також додаткові лінійні обмеження, що утворюють опуклу многогранну множину $D \subset R^n$, вигляду $D = \{x \in R^n \mid Tx \leq p\}$, де $p \in R^m, T \in R^{m \times n}$. Таким чином, допустима множина X задовольняє співвідношення $\text{vert } M \cap D \subseteq X \subset M \cap D$.

Розв'язання задачі $Z(F, X)$ полягає у знаходженні елементів наступних множин: $P(F, X)$ – ефективних (Парето-оптимальних), $SI(F, X)$ – слабо ефективних (ефективних за Слейтером), $Sm(F, X)$ – строго ефективних (за Смейлом) розв'язків. Справедливі включення: $Sm(F, X) \subset P(F, X) \subset SI(F, X)$

Для розв'язання задачі $Z(F, X)$ можна застосувати полієдральні методи, представлені, зокрема в [2]. В запропонованому підході в процесі розробки комплексних систем захисту інформації розв'язується задача визначення оптимального обсягу ресурсів для реалізації підсистеми і вибору оптимального рівня захисту інформації. Цей підхід можна застосувати до ряду задач [1], в яких пропонується визначати вимоги до забезпечення інформаційної безпеки на основі експертних оцінок за сукупністю таких факторів, як характер та обсяг інформаційного і програмного забезпечення, тривалості перебування інформації на об'єкті обробки інформації, структурі самого об'єкта та ін.

Список використаних джерел:

1. Опірський І.Р. Визначення математичної моделі конфлікту загроз з комплексною системою захисту інформації в інформаційних мережах держави // Системи обробки інформації. – 2016. – Вип. 5. – С. 102-104.
2. Семенова Н.В., Колечкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи їх дослідження та розв'язання. – Київ: Наукова думка, 2009. – 262 с.
3. Емелічев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 342 с.
4. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещении. – К.: Наук. думка, 2008. – 159 с.

УДК 004.61

О. О. Ситник, д-р техн. наук,

С. Ю. Протасов, канд. техн. наук,

К. М. Ключка, канд. техн. наук

Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси

ПЕРЕТВОРЕННЯ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Методологія математичного моделювання, що склалася на даний час, в якості динамічних моделей вимірювальних перетворювачів (ВП) з розподіленими параметрами передбачає використання переважно диференціальних рівнянь з частинними похідними, які відносяться до найбільш складних видів математичних моделей. В цих випадках необхідно проводити апроксимаційні або еквівалентні перетворення вихідних моделей ВП, щоб мати можливість вибору однієї або декількох еквівалентних чи допустимих форм математичного опису.

Для широкого класу лінійних ВП з розподіленими параметрами загальна форма рівнянь і крайових умов має вигляд [1, 2]:

$$B_1(x, t) \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} + B_2(x, t) \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{i,j}(x, t) \frac{\partial U}{\partial x_j} \right] + \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^3 b_i(x, t) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x_i} + a(x, t) U(x, t) = f(x, t),$$

$$U(x, t) \Big|_{x \in S} = 0, \quad (2)$$

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x). \quad (4)$$

(у разі крайових умов першого роду). Для випадку крайових умов третього роду змінюється лише умова (2) на

$$\left[\sum_{i,j=1}^3 a_{i,j}(x, t) \frac{\partial U}{\partial x_j} \cos(v, x_i) + \sigma(x, t)U \right]_{x \in S} = 0 \quad (5)$$

(у виразах (1)...(5) введено позначення S , що є межею області Ω зміни координат $x(x_1, x_2, x_3)$, v – зовнішня нормаль до S). Можливі три окремі випадки:

- а) $B_1(x, t) > 0, B_2(x, t) \equiv 0$;
- б) $B_1(x, t) \equiv 0, B_2(x, t) > 0$, при цьому умова (4) відсутня;
- в) $B_1(x, t) = B_2(x, t) = 0$, при цьому відсутні обидві умови (3), (4).

Взагалі можна розглядати тільки граничну умову (5) третього роду, оскільки з неї як окремі випадки випливають інші граничні умови (першого і другого роду).

У доповіді розглянуто підхід перетворення динамічних моделей ВП з розподіленими параметрами із використанням послідовних наближень та послідовним отриманням еквівалентних інтегральних рівнянь. Цей спосіб можна застосувати для дослідження нестационарних ВП, які представлені рівняннями з частинними похідними другого порядку. Отримані модифіковані ітерації приводять до подання розв'язку у вигляді ряду, що швидко збігається.

Наступним запропонованим підходом є приведення задачі до еквівалентного інтегрального рівняння Фредгольма II роду, що дає змогу скористатися функцією Гріна. У випадку, якщо функція Гріна буде сепарабельною, то задача зводиться до двовимірного рівняння Фредгольма II роду, з якого можна отримати систему однорідних (звичайних) диференціальних рівнянь другого порядку, яку розв'язують аналогічно, як і для випадку ВП із зосередженими параметрами.

Список використаних джерел:

1. Верлань А.Ф. Методы и алгоритмы восстановления сигналов и изображений / А.Ф. Верлань, И.О. Горошко, Е.Ю. Карпенкои др. – К. : НАН України Інститут моделювання в енергетиці ім. Г.Е. Пухова, 2011. – 368 с.
2. А. А. Sytnyk, S. U. Protasov, K. N. Klyuchka. Methods of receipt of integral form of description of non stationary measuring transformers with the distributed parameters // In of the IV International Research and Practice Conference European Science and Technology, Munich, Germany, 2013, Vol. I, pp. 342–348.

Н. В. Семенова, д-р фіз.-мат. наук,

Д. О. Чайка,

Д. О. Мановицька

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, м. Київ

БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА МОДЕЛЬ ВИЗНАЧЕННЯ СКЛАДУ ЕНЕРГОГЕНЕРУЮЧИХ ОБ'ЄКТІВ РЕГІОНУ

Забезпечення усіх сфер економіки України різними видами енергії, палива виступає одним із найважливіших завдань системи управління, економічної політики країни, необхідною умовою для її успішного і гармонійного розвитку. Як свідчать результати багатьох наукових досліджень, використання традиційних енергоресурсів (вугілля, нафта, газ) наносить значну шкоду екосистемі планети та спричиняє зміни клімату, що у свою чергу позначається на здоров'ї та умовах життя населення і, як наслідок, на світовій та національній економіках. Через це в останні десятиріччя світова спільнота активно розвиває технології та засоби використання невичерпних і чистих джерел енергії, таких як вітер, сонячне випромінювання, відновлювані біоенергетичні ресурси та ін. Запропоновано формування енергетичного балансу із використанням нетрадиційних та відновлюваних джерел енергії. Відмова від будівництва нових енергогенеруючих об'єктів може призвести до виникнення дефіциту енергії, та, як наслідок, до неможливості забезпечення стійкого розвитку інших галузей економіки.

Розроблено математичну модель задачі, вирішення якої дозволить оптимальним чином залучати для виробництва енергії в регіоні нетрадиційні і вторинні (відновлювальні) джерела. Для моделювання і розв'язування такої прикладної задачі доцільно скористатися математичними моделями дискретної оптимізації [1]. Виберемо за критерій моделі визначення складу енергогенеруючих об'єктів регіону, які використовують нетрадиційні або вторинні джерела енергії, мінімум дефіциту енергії регіону, що включає в себе різницю між сумою обсягів енергії, необхідних для виробничої, сільськогосподарської, соціальної сфер регіону та сумою обсягів енергії, що отримується від основних, традиційних, нетрадиційних та вторинних джерел енергії. Оскільки необхідно мінімізувати дефіцит енергії регіону за рахунок вторинних та нетрадиційних джерел енергії, потрібно максимізувати обсяги виробництва цих видів енергії та мінімізувати витрати людських, фінансових, технологічних ресурсів, необхідних для розміщення зазначених джерел енергії за наявності обмежених можливостей розміщення обладнання та за обсягами виробництва в залежності від використовуваних технологій.

Побудуємо багатокритеріальну задачу цілочислової оптимізації визначення енергогенеруючих об'єктів регіону. Перший критерій максимізує обсяги енергії, отриманої з нетрадиційних та вторинних джерел енергії: $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \sum_{p \in P_i} v_{ijp} x_{ijp} \rightarrow \max$, другий мінімізує витрати ресурсів, необ-

хідних для розміщення в регіоні зазначених джерел енергії: $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \sum_{p \in P_i} c_{ijp} x_{ijp} \rightarrow \min$, де v_{ijp} – мінімальний необхідний обсяг вироб-

ництва енергії по кожному з об'єктів в залежності від виду; c_{ijp} – витрати ресурсів, необхідних для можливого розміщення $j \in J_i$ в регіоні одного об'єкту i -го виду зазначених джерел енергії; x_{ijp} – кількість нетрадиційних та вторинних джерел енергії виду $i \in I$, розміщення $j \in J_i$, марки $p \in P_i$; I – множина видів нетрадиційних та вторинних джерел енергії; J_i – множина можливого розміщення в регіоні нетрадиційних та вторинних джерел енергії i -го виду; P_i – множина марок обладнання

використання нетрадиційних та вторинних джерел енергії i -го виду для виробництва електроенергії. Обмеження: а) на обсяг енергії, який отримується від нетрадиційних та вторинних джерел енергії $e^{(0)} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \sum_{p \in P_i} v_{ijp} x_{ijp} \geq e$, де $e^{(0)}$ – існуючий обсяг енергії від нетради-

ційних та вторинних джерел; б) за обсягом виробництва в даному розміщенні $v_{ij} \leq \sum_{p \in P_i''} v_{ijp} x_{ijp}$, $i \in I, j \in J_i$, де v_{ij} – мінімальний необхідний

обсяг виробництва енергії на даному розміщенні; в) за кількістю об'єктів можливого розміщення

$$\sum_{j \in J_i} x_{ijp} \geq 1, i \in I, p \in P_i,$$

$$\sum_{j \in J_i} x_{ijp} \leq k_{ip}, i \in I, p \in P_i, x_{ijp} \geq 0, i \in I, j \in J_i, p \in P_i,$$

де k_{ip} – кількість можливих джерел за кожним з видів нетрадиційних та вторинних джерел енергії.

Список використаних джерел:

1. Семенова Н.В., Колечкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи їх дослідження та розв'язання. Київ: Наукова думка, 2009. 262 с.

Є. А. Сторожук, д-р фіз.-мат. наук,

І. С. Чернишенко, д-р техн. наук,

О. В. Піголь

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, м. Київ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ЕЛІПТИЧНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ, ОСЛАБЛЕНОЇ КРУГОВИМ ОТВОРОМ

Тонкі циліндричні оболонки кругового і некругового перерізу знаходять широке застосування в різноманітних галузях сучасної техніки як конструктивні елементи машин і приладів. В більшості випадків ці елементи по конструктивним або технологічним міркуванням мають отвори і вирізи різноманітної форми. При значних рівнях діючих навантажень біля вказаних концентраторів виникають зони підвищених напружень, а властивості їх матеріалу характеризуються нелінійною діаграмою деформування.

Розглянемо циліндричну оболонку еліптичного поперечного перерізу, виготовлену з однорідного ізотропного матеріалу і ослаблену круговим отвором. Віднесемо оболонку до криволінійної ортогональної системи координат (x, φ, γ) з початком в центрі отвору, де x, γ – довжини твірної і нормалі до серединної поверхні оболонки, φ – параметр напрямної.

Рівняння поперечного перерізу оболонки запишемо в параметричній формі:

$$y = a \cos \varphi; \quad z = b \sin \varphi \quad (\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_N), \quad (1)$$

де a, b – півосі еліпса.

Для параметрів Ламе маємо вирази:

$$A_1 = 1; \quad A_2 = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}; \quad A_3 = 1. \quad (2)$$

Геометричні співвідношення представимо згідно теорії непологих оболонок Кірхгофа-Лява у векторній формі [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{A_1 \partial x}; \quad \varepsilon_{22} = \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{A_2 \partial \varphi}; \quad \varepsilon_{12} = \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{A_1 \partial x} + \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{A_2 \partial \varphi}; \\ \mu_{11} &= \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{g}}{A_1 \partial x}; \quad \mu_{22} = \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{g}}{A_2 \partial \varphi}; \quad 2\mu_{12} = \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{g}}{A_1 \partial x} + \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{g}}{A_2 \partial \varphi}, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\bar{u} = u_1 \bar{e}_1 + u_2 \bar{e}_2 + w \bar{n}$ – вектор переміщень точок серединної поверхні оболонки; $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{n}$ – орти системи координат (x, φ, γ) ;

$\vec{g} = g_x \vec{e}_1 + g_\varphi \vec{e}_2$ – вектор кутів повороту нормалі, які визначаються за формулами:

$$g_x = -\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial x}; \quad g_\varphi = -\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_2 \partial \varphi}.$$

Вважаючи, що навантаження просте, фізичні співвідношення запишемо на основі теорії малих пружнопластичних деформацій [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11}^0 + \sigma_{11}^P; \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}^0 + \sigma_{12}^P; \\ \sigma_{11}^0 &= \frac{2G}{1-\nu} (e_{11} + \nu e_{22}); \quad \sigma_{12}^0 = G e_{12}; \quad \sigma_{12}^P = -G \omega_i e_{12}; \\ \sigma_{11}^P &= 2G \left[\left(\frac{1-\omega_i}{1-\nu_i} - \frac{1}{1-\nu} \right) e_{11} + \left(\frac{(1-\omega_i)\nu_i}{1-\nu_i} - \frac{\nu}{1-\nu} \right) e_{22} \right]; \\ e_{11} &= \varepsilon_{11} + \gamma \mu_{11}; \quad e_{12} = \varepsilon_{12} + 2\gamma \mu_{12} \quad (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (4)$$

Тут G, ν – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки; ω_i, ν_i – функція пластичності і змінний коефіцієнт поперечної деформації.

Систему розв’язувальних рівнянь отримаємо з принципу можливих переміщень за допомогою методу додаткових напружень і варіанту методу скінченних елементів, в якому гіпотези Кірхгофа–Лява реалізовані дискретно.

З використанням запропонованої методики досліджено пружнопластичний стан в області кругового отвору на бічній поверхні еліптичної циліндричної оболонки, виготовленої з сплаву АМг-6 і навантаженої рівномірним внутрішнім тиском.

Список використаних джерел:

1. Максимюк В.А. Вариационно-разностные методы в линейных и нелинейных задачах деформирования оболочек из металлических и композитных материалов (обзор) / В.А. Максимюк, Е.А. Сторожук, И.С. Чернышенко // Прикл. механика. – 2012. – Т. 48, №6. – С. 3–80.

В. А. Федорчук, д-р тех. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОДНОВИМІРНИХ ОБ'ЄКТІВ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

У процесі розв'язування задач проектування, керування, контролю і діагностики складних динамічних систем, що містять одновимірні протяжні нелінійні елементи виникає необхідність створення для них ефективних алгоритмів функціонування, які шляхом використання адекватних комп'ютерних моделей враховують їх динамічні особливості [1]. Традиційно такі моделі реалізуються за допомогою скінченноелементних розв'язувачів, які потребують значних обчислювальних ресурсів, що унеможливає їх використання у вмонтованих комп'ютеризованих засобах. Отже, створення адекватних моделей складних динамічних систем з урахуванням нелінійних залежностей та розподіленості параметрів окремих ланок, а також вимог щодо ефективної їх комп'ютерної реалізації є на сьогоднішній час далеко невіршеною і актуальною задачею.

Пропонується метод побудови структурних комп'ютерних моделей нелінійних одновимірних об'єктів з розподіленими параметрами, який дає можливість використання стандартних нелінійних блоків. Суть методу полягає у отриманні апроксимаційної моделі об'єкта з розподіленими параметрами шляхом дискретизації диференціального рівняння з частинними похідними за просторовою змінною [2]. Далі проводяться еквівалентні перетворення отриманої моделі для можливості відтворення на рівні її структурних елементів неоднорідності просторових ділянок об'єкта, а також можливості доповнення структурної моделі нелінійними блоками [3].

Розглядається приклад моделювання лінійно протяжного розподіленого об'єкта, що складається з розподілених ланок, які взаємодіють через механічні з'єднання із зоною нечутливості типу люфт. Для комп'ютерної реалізації нелінійної підсистеми в середовищі Simulink використано блок DeadZone (рис. 1). Такий прийом став можливим через те, що в Simulink-моделі є з'єднання між структурними елементами, через яке передається зміщення перерізу розподіленого об'єкта в якому присутній люфт.

Для перевірки адекватності комп'ютерної моделі знайдено залежність швидкості зміщення однієї сторони розподіленого об'єкта від прикладеної стрибкоподібної сили до іншої його сторони (рис. 2).

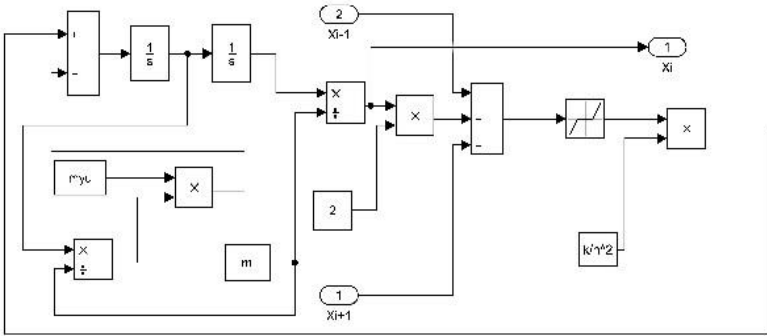


Рис. 1. Simulink підсистема, що реалізує частину розподіленого об'єкта із зоною нечутливості

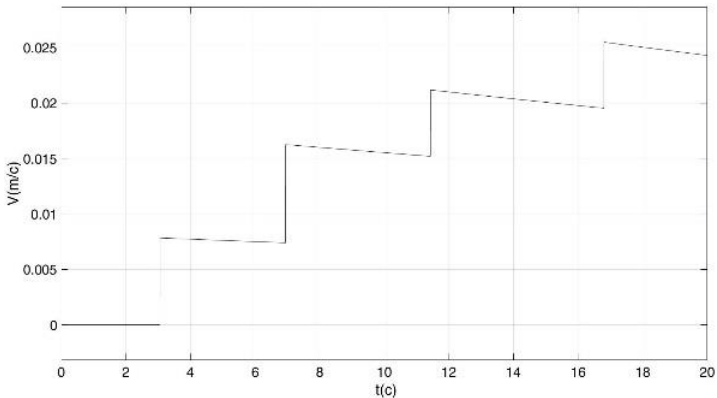


Рис. 2. Графік зміни швидкості на протилежному кінці розподіленого нелінійного об'єкта з врахуванням опору руху

Оскільки кожна підсистема моделі допускає встановлення індивідуальних параметрів, то модель може відображати неоднорідний розподілений об'єкт, а присутність в моделі нелінійних елементів дає змогу відображати нелінійні властивості об'єкта. Особливістю моделі із зоною нечутливості є те, що при її комп'ютерній реалізації зникає небажаний ефект Гіббса, який є джерелом суттєвих похибок.

Отримана Simulink-модель дає змогу відносно просто відображати такі властивості об'єкта, як нелінійність, неоднорідність, а також розподільність параметрів за однією просторовою координатою.

Список використаних джерел:

1. Верлань А.Ф. Моделі динаміки електромеханічних систем / А.Ф. Верлань, В.А. Федорчук. – К. : Наук. думка, 2013. – 222 с.

- IEEEExplor Digital Library. 14th International Conference on Advanced Trends in radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET) 20-24 Feb. 2018. – P. 346-350. DOI: 10.1109/TCSET.2018.8336216
- Федорчук В.А., Канарчук Ю.В. Комп'ютерне моделювання динаміки одновимірних нелінійних об'єктів з розподіленими параметрами // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, КІПУ імені Івана Огієнка. Кам'янець-Подільський: КІПУ, 2018. Вип. 18. С. 91-102.

UDK 519.21

R. O. Chorny,
O. M. Kinash, PhD

Ivan Franko National University of Lviv, Lviv

INSURANCE RATE IN CASE OF LARGE PAYMENTS

In this article we addressed the task of an insurance rate determination in case of factorization model [1, p.248]. The formula for optimal insurance rate has been defined as well. For payments with heavy tails, in particular with Weibull distribution with a parameter $0 < \gamma < 1$ and the distribution function:

$$F(x) = 1 - \exp(-c_1 x^\gamma), c_1 > 0, x > 0.$$

Then with these assumptions, for z_0 – optimal insurance rate the following correlation is fair:

$$z_0 \sim \frac{1}{c_1^{1/\gamma}} \cdot \Gamma\left[1 + \frac{1}{\gamma}\right] + \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{c_1^{1/\gamma}}\right)^2 \cdot \left(\Gamma\left[1 + \frac{2}{\gamma}\right] - \left\{\Gamma\left[1 + \frac{1}{\gamma}\right]\right\}^2\right)}{\left[N - V^2 \Psi^2(Q)\right]^{1/2}} \left[1 + V^2\right]^{1/2} \Psi(Q)$$

[see [2]], where $0 < Q < 1$ – predefined number, N – amount of insurance contracts, V – variation coefficient of insurance amount for appropriate contract, $\Psi(x)$ – an inverse function to standard normal distribution function.

Also, we considered an asymptotic of insurance rate in case of the payments with Lognormal and Pareto distributions.

References:

- Korolev V.Y. Mathematical foundations of risk theory / V.Y. Korolev, V.E. Bening, S.Y. Shorgin. – M. : Fizmatlit, 2011. – 620 p.
- Chorny R.O. The Bankruptcy probability and an optimal insurance rate in case of payments with lognormal distribution / Chorny R.O., Kinash O.M. // Modern engineering and innovative technologies. – 2018 – Issue №6, Part 3 – p. 99 – 104.

В. С. Щирба, канд. фіз.-мат. наук,
О. В. Фуртель

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНОЇ ТРАЄКТОРІЇ РАКЕТИ З ВИМОГОЮ МАСКУВАННЯ ТОЧКИ СТАРТУ

Дослідження польоту ракети, зокрема обчислення фазових траєкторій літального апарату в умовах захисних маневрів, є досить багатогранною задачею. Навіть у випадку зосереджених параметрів можна розглядати різні етапи польоту ракети: запуск ракети із задачею маскування точки старту, підйом на максимальну висоту, перехід з однієї траєкторії на іншу, ураження цілі із використання захисних маневрів тощо.

Варто зауважити, що моделі, описані в [1], не враховують специфіку окремих етапів польоту. Зокрема, в [1] сказано, що «Для обчислення траєкторій ЛА за заданими керуваннями використовується інерційна стартова система координат $OXYZ$ із початком координат у точці старту (на поверхні Землі), віссю OX направленою на лінію горизонту у напрямку на ціль (на термінальну точку), віссю OY направленою вертикально вгору і віссю OZ , яка доповнює інерційну систему координат до правої системи». Принциповим виявилось положення, що вісь OX повинна бути направлена у напрямку на ціль, а, наприклад, при старті ракети при вертикальному вильоті напрямком на ціль не співпадає з напрямком на лінію горизонту.

Тому потрібно вносити корективи в побудову моделі. Якщо використовувати праву систему координат, то теоретичні викладки в основному співпадатимуть. Відмінності будуть лише в формулі визначення висоти ракети і моделі гравітаційного поля.

На етапі старту маневр варто проводити в площині стрільби. Тоді відхилення вздовж осі OZ буде відсутнім, що значно полегшує обчислювальні процеси. Якщо сюди ще накласти умову проведення розрахунків на рівномірній сітці, то математична модель ще спроститься і зведеться до задачі лінійного програмування хоча і гіпервеликої розмірності, але у двічі меншій за об'ємом, ніж для моделі описаної в [1].

Список використаних джерел:

1. Щирба О.В. Побудова математичних моделей для обчислення фазових траєкторій літальних апаратів в умовах захисних маневрів / О.В. Щирба // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет, 2016. – Вип. 13. – С. 201-212.

СЕКЦІЯ 3
МОДЕЛЮВАННЯ І ОПТИМІЗАЦІЯ КЕРОВАНИХ ПРОЦЕСІВ.
СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ І ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ.
ПИТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ

УДК 004.94

І. В. Бейко, д-р техн. наук

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ

**МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУЮЧИХ ОПЕРАТОРІВ ДЛЯ
КОМПЛЕКСНОГО МОДЕЛЮВАННЯ І ОПТИМІЗАЦІЇ
КЕРОВАНИХ СИСТЕМ В УМОВАХ НЕПОВНИХ ДАНИХ**

Практичні труднощі комплексного розв'язання задач оптимально-керування із одночасною побудовою оптимізованої математичної моделі бувають пов'язані із неповними даними про причинно-наслідкові залежності між взаємодіючими підсистемами, з великою розмірністю та нелінійністю моделей, з багатоекстремальністю та багатокритеріальністю тощо. Для розв'язання таких задач розробляється математично-комп'ютерний інструментарій комплексної оптимізації математичних моделей підсистем, оптимізації стратегій керування та оптимізації підсистем спостереження для добування «оптимальних даних спостережень» і їх використання для оптимізації графо-операторної моделі керованої системи, вузлами якої є математично-комп'ютерні моделі взаємодіючих підсистем. Комплексна оптимізація всіх підсистем здійснюється зазвичай за критеріями мінімізації часу, необхідного для виконання розрахунків, мінімізації витрат на виконання розрахунків та мінімізації похибок, і реалізується, зокрема, з використанням методів розв'язуючих операторів для оптимального використання даних натурних спостережень. Розв'язуючі оператори узагальнюють (на випадок неповних даних) псевдо обернені матриці та функції Белмана. Якщо побудова розв'язуючого оператора виявляється надто трудомісткою, то замість розв'язуючого будуються або асимптотично-розв'язуючі або мінімаксно розв'язуючі оператори. Асимптотично-розв'язуючі оператори другого порядку узагальнюють на випадок недиференційованих критеріїв оптимальності відому в теорії автоматичного керування функцію чутливості. Асимптотичні апроксимації вищих порядків використовуються в прискорених алгоритмах розв'язування крайових задач для понтрягінських π -систем оптимального керуван-

ня. Із використанням методів розв'язуючих та асимптотично-розв'язуючих операторів отримуємо залежність функціонала критерію оптимальності від керування в явному вигляді і цим суттєво спрощуються алгоритми оптимізації керування та підсистеми керування.

УДК 519.6

І. В. Бейко, д-р. техн. наук,
О. М. Десницький

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ

ЗАДАЧІ І АЛГОРИТМИ ШВИДКОДІЇ ТА ПЕРЕСЛІДУВАННЯ

Розглядаються фазові траєкторії $x(t) = A(t, u)$, $y(t) = B(t, v)$ керованих систем

$$A(t, u) = x^0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad B(t, v) = y^0 + \int_0^t g(\tau, y(\tau), v(\tau)) d\tau$$

із заданими множинами U і V допустимих керувань $u \in U$ і $v \in V$.

Нехай P_1 і P_2 – задані відображення фазових X і Y в деякі множини гільбертового простору H . Позначимо через $U(v)$ множину допустимих керувань u , які задовольняють рівність $P_1 A(T, u) = P_2 B(T, v)$. Потрібно знайти для заданого на множині U функціонала $F(u)$ максимінні керування u^* і v^* , які реалізують зустріч за критерієм оптимальності $F(u^*) = \max_v \min_{u \in U(v)} F(u)$.

Якщо $Y(T)$ і $X(T, P)$ множини станів $y(T)$ і $x(T)$, які відповідають всім керуванням v і u з обмеженням $F(u) \leq P$, і якщо множини $P_2 Y(T)$ і $P_1 X(T, P)$ для $P \in \left[\min_u F(u), F(u^*) \right]$ замкнуті (з межами $\overline{P_2 Y(T)}$ і $\overline{P_1 X(T, P)}$ відповідно) і якщо для будь-якого $h \in P_1 X(T, P) \setminus \overline{P_1 X(T, P)}$ мінімальне значення R , яке задовольняє умову $P_1 X(T, R) \ni h$ і яке позначимо через $P(h)$, задовольняє нерівність $P(h) < P$, то необхідними і достатніми умовами оптимальності є наступні умови:

$$P_1 A(T, u^0) = P_2 B(T, v^0), \quad P_2 Y(T) \subset P_1 X(T, F(u^0)) \\ P_2 B(T, v^0) \in \overline{P_1 X(T, F(u^0))}, \quad F(u^0) = \min_{u \in U(v^0)} F(u).$$

Будується метод для відшукування керувань, які задовольняють необхідним умовам оптимальності. Вважається, що розв'язок задачі 1 існує і для всіх $P \in \left[\min_u F(u), F(u^*) \right]$ множини $P_1 X(T, P)$ обмежені і строго опуклі.

УДК 519.6

І. В. Бейко*, д-р техн. наук,
В. С. Щирба**, канд. фіз.-мат. наук,
О. В. Фуртель**

*Національний технічний університет України
 «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ,
 **Кам'янець-Подільський національний університет
 імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПОБУДОВА ОПОРНИХ ТРАЄКТОРІЙ КЕРОВАНОЇ СИСТЕМИ ЗА ОПТИМІЗОВАНИМИ ТРАЄКТОРІЯМИ ПІДСИСТЕМ

У роботі розглядається задача оптимального керування системою, яка складається із M керованих підсистем

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = f(i, x^i(t), u^i(t), p^i, t), \quad x^i(t) \in R^{n_i}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}),$$

$$f(i, \bullet) : R^{n_i} \times R^{r_i} \times R^{q_i} \times [t_i, t_{i+1}) \rightarrow R^{n_i}, \quad i = 1, \dots, M,$$

де $p^i \in R^{q_i}$ – параметри робочої моделі i -ої підсистеми, $p^i \in R^{q_i}$ – значення параметрів i -ої підсистеми, для яких знайдені оптимальні відрізки фазових траєкторій підсистем. Будуються прискорені алгоритми для відшукування опорної траєкторії всієї системи з використанням оптимізованих відрізків фазових траєкторій $\{u_0^{s_i}, x_0^{s_i}\}$ у зонах $s \in \{1, \dots, S_i\}$ для заданої множини параметрів $p^i \in R^{q_i}$ робочої моделі i -ої підсистеми. Прискорення побудови опорної траєкторії досягається за допомогою відшукування векторів \bar{x}^i та керувань $\bar{u}^i : [t_i, t_{i+1}) \rightarrow R^{r_i}$ $i = 1, \dots, M$ за критерієм мінімізації сумарної нев'язки

$$F(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^{M-1}) = \sum_{k=1}^{M-1} \|\bar{x}^k - w^k\|^2 + \|x^{**} - w^M\|^2,$$

де значення $w^i = \bar{x}^i(t_{i+1})$ обчислюються як розв'язки задач Коші

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = f(i, x^i(t), \bar{u}^i(t), p^i, t), \quad x^i(t_i) = \bar{x}^i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}).$$

Така задача виникає при побудови опорних траєкторій ЛА, де на різних відрізках фазової траєкторії ставляться різні вимоги і тому задалегідь розв'язуються різні локальні задачі оптимального керування із використанням різних чисельних алгоритмів з метою найшвидшого розв'язання всіх локальних задач до моменту часу, коли стартує алгоритм завершальної побудови опорної траєкторії.

УДК519.6

І. В. Бейко*, д-р техн. наук,

О. В. Фуртель**

* Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ,

** Кам'янець-Подільський національний університет

імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ДО ПОБУДОВИ ГРАДІЄНТНИХ АЛГОРИТМІВ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСІВ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

У задачах керування процесами з розподіленими параметрами, які описуються системою диференціальних рівнянь із частинними похідними

$$\Phi'_i(s, t) = f(\Phi(s, t), \Phi'_s(s, t), \Phi''_{ss}(s, t), \dots, u(s, t), s, t), \quad s \in \Omega \subset R^3, \quad t \in [0, T]$$

потрібно знайти керування u , яке максимізує заданий функціонал $F_0(\Phi, u)$ і задовольняє умовам $F_k(\Phi, u) \leq 0, k = 1..n_k$. Чисельні алгоритми відшукування оптимального керування будуємо або за допомогою методів лінеаризації (з метою апроксимації керованих процесів із розподіленими параметрами процесами із зосередженими параметрами), або з використанням дискретних апроксимацій усіх частинних похідних з метою апроксимації задачі оптимального керування задачею (не)лінійного програмування. При використанні методів лінеаризації вибираємо дискретні множини $S = \{s^i, i \in I \subset N\} \subset \Omega$, елементи яких дозволяють з належною точністю апроксимувати похідні за просторовими змінними адекватними їх дискретними апроксимаціями

$$\partial^\alpha \Phi(s^i, t) / \partial s^{\alpha_1} \partial t^{\alpha_2} = \bar{\Phi}(i, \alpha, t), \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad u_i = u(s_i, t),$$

$$\Phi_i(t)_i = \Phi(s_i, t)$$

і керований процес із розподіленими параметрами апроксимувати керованим процесом із зосередженими параметрами

$$d\Phi_i(t) / dt = f(\Phi_i(t), \bar{\Phi}(i, 1, t), \bar{\Phi}(i, 2, t), \dots, u_i(t), s_i, t).$$

Із використанням аналогів методів Рунге-Кутти побудовано чисельні алгоритми для обчислення градієнтів апроксимованих функціоналів $F_k(\Phi, u)$ і на цій основі будуються прискорені алгоритми та їх модифікації для обчислення оптимального керування апроксимованим процесом із зосередженими параметрами та вихідним процесом з розподіленими параметрами.

І. В. Бейко*, д-р техн. наук,

Т. І. Бейко**, засл. тренер України,

Т. І. Бейко***, чемпіон світу 2019 (теніс 50+)

* Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ,

** Тенісна Федерація України, м. Київ,

*** Тенісна Федерація Канади, м. Монреаль

ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ У ВЕЛИКОМУ ТЕНІСІ

Математичні моделі і методи оптимального керування вже допомогли не тільки автомобілями найкраще керувати та бойовими ракетами найточніше атакувати, але допомагають вже також і в спортивних іграх вигравати. Від математиків все більше залежать результати світових чемпіонатів. Перемоги в тенісі все частіше здобуваються тими, кому пощастило тренуватися оптимальними вправами для опанування оптимальними атакуючими ударами та контрударами, які максимізують ймовірності виграшів. А це є математичні поняття і оптимальні вправи та оптимальні удари знаходяться тільки за допомогою математичних моделей. Про це геніальний Піфагор сказав геніальними словами: "Де нема числа і міри, там хоас і химери". Звичайно, і без математичних моделей перемоги здобуваються, але не на найвищому світовому рівні. Зрештою, чемпіонами ставали ті спортсмени, яким пощастило виконували вправи, що найбільше максимізували ймовірність виграшів. А математичне моделювання є саме тим майже єдиним інструментарієм, який допомагає серед багатьох факторів та тренувальних вправ знайти найбільш важливі для підвищення спортивної майстерності. Для цього розв'язуються математичні задачі, названі військовими «диференціальні ігри», з урахуванням всіх основних показників спортивної майстерності суперників, а саме: сили та точності подачі, сили та точності підготовчих та атакуючих ударів (справа, зліва, смещу) та контрударів. За даними оцінками показників спортивної майстерності суперників знаходиться оптимальний розв'язок диференціальної гри, за яким визначається оптимальна стратегія виграшних атакуючих та захисних ударів у грі проти даного супер-

ника, тобто, визначаються найбільш виграшні для атаки ситуації, а також визначаються найбільш виграшні в цих ситуаціях атакуючі удари. І вже недалеко той час, коли чемпіонами світу з тенісу будуть ті серед тенісистів, яким пощастить тренувати і на кортах реалізувати оптимальні стратегії, знайдені як розв'язки диференціальних ігор.

УДК 517.988

Я. И. Ведель, аспирант,
Е. Н. Голубева, канд. физ.-мат. наук,
В. В. Семёнов, д-р физ.-мат. наук

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, г. Киев

АДАПТИВНЫЙ ЭКСТРАПРОКСИМАЛЬНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ В ПРОСТРАНСТВАХ АДАМАРА

Одним из популярных направлений современного прикладного нелинейного анализа является исследование задач о равновесии (неравенств Ки Фаня, задач равновесного программирования) [1-3]. В виде задачи о равновесии можно сформулировать задачи математического программирования, вариационные неравенства и многие игровые задачи.

В последнее десятилетие возник обусловленный проблемами математической биологии и машинного обучения интерес к построению теории и алгоритмов решения задач математического программирования в метрических пространствах Адамара (полных $CAT(0)$ пространствах) [4-6].

В данном сообщении рассматриваются задачи о равновесии в метрических пространствах Адамара вида:

$$\text{найти } x \in C : F(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (1)$$

где C – выпуклое замкнутое подмножество пространства Адамара (X, d) , $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ – выпуклая полунепрерывная снизу по первой переменной бифункция, удовлетворяющая определенным условиям.

Для приближенного решения задач (1) предложен и изучен следующий адаптивный экстрапроксимальный алгоритм.

Адаптивный алгоритм.

Инициализация. Выбираем элемент $x_1 \in C$, $\tau \in (0, 1)$, $\lambda_1 > 0$.

Полагаем $n = 1$.

Шаг 1. Вычислить

$$y_n = \text{prox}_{\lambda_n F(x_n, \cdot)} x_n = \arg \min_{y \in C} \left(F(x_n, y) + \frac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n) \right).$$

Если

$$x_n = y_n,$$

то остановить, x_n – решение. Иначе перейти на шаг 2.

Шаг 2. Вычислить

$$x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda_n F(y_n, \cdot)} x_n = \arg \min_{y \in C} \left(F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n) \right).$$

Шаг 3. Вычислить

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{если } F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \leq 0, \\ \min \left\{ \lambda_n, \frac{\tau}{2} \frac{d^2(x_n, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n)}{(F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n) - F(y_n, x_{n+1}))} \right\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положить $n := n + 1$ и перейти на шаг 1.

В отличие от применявшихся ранее правил выбора величины шага [2, 3, 6] в предлагаемом методе не производится вычислений значений бифункции в дополнительных точках и не требуется знания информации о липшицевых константах бифункции. Для псевдомонотонных бифункций липшицевого типа доказана теорема о Δ -сходимости порожденных алгоритмом последовательностей. Доказательство основано на использовании фейеровского свойства алгоритма относительно множества решений задачи, т.е. неравенстве

$$d^2(x_{n+1}, z) \leq d^2(x_n, z) - \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(x_{n+1}, y_n) - \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n),$$

где z – произвольное решение задачи о равновесии (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН Украины (проект «Математичне моделювання та оптимізація динамічних систем для оборони, медицини та екології», 0219U008403) и НАН Украины (проект «Нові методи дослідження коректності та розв'язання задач дискретної оптимізації, варіаційних нерівностей та їх застосування», 0119U101608).

Список использованной литературы:

1. Kassay G., Radulescu V.D. Equilibrium Problems and Applications. London: AcademicPress, 2019. xx+419 p.
2. Lyashko S.I., Semenov V.V. A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming. In: Goldengorin B. (ed.) Springer Optimization and Its Applications, vol. 115, Springer, Cham, 2016. P. 315-325.
3. Quoc T.D., Muu L.D., Hien N.V. Extragradient algorithms extended to equilibrium problems. Optimization. 2008. Vol. 57. P. 749-776.
4. Bacak M. Convex Analysis and Optimization in Hadamard Spaces. Berlin-Boston: De Gruyter, 2014. viii+185 p.

5. Colao V., Lopez G., Marino G., Martin-Marquez V. Equilibrium problems in Hadamard manifolds. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2012. Vol. 388. P. 61-77.
6. Khatibzadeh H., Mohebbi V. Approximating solutions of equilibrium problems in Hadamard spaces. *Miskolc Mathematical Notes*. 2019. Vol. 20. No. 1. P. 281-297.

UDC 004.78;004.891.2;007.3

Oleksii Kovalenko, Cand. Eng. Sci.,
Vladimir Kosolapov, Cand. Eng. Sci

Institute of Mathematical Machines and Systems Problems
NAS of Ukraine, Kyiv

OPTIMIZATION OF LOADING OF A NETWORK OF DISTRIBUTED SITUATIONAL CENTERS

An urgent issue for the development of information technologies and systems is the task of creating a Network of Distributed Situation Centers (NDSCs) based on convergent technological solutions. In this regard, it is of particular importance to develop information services for information and analytical systems based on NDSCs to support and make decisions at different levels of state governance. Developing and implementing into practice the system of situation centers (SSCs) for solving public administration tasks is an integral part of the creation of effective management systems in Ukraine of the country's economic complex.

Standard ISO/IEC 10746 [1] defines the essential concepts necessary to specify reference model of open distributed processing (RM-ODP) systems from five prescribed viewpoints. It provides a well-developed framework for the structuring of specifications for large-scale, distributed systems.

When implementing the information-analytical process of processing information on the preparation and decision-making in NDSC, the task is to control the sequence of processing information and control flows so that the system associated with one problem of the SC provides the necessary level of interoperability in the processes of information, analytical and expert servicing for participants of situation management processes (PSMP) at a minimum cost of time. The PSMP set includes experts, analysts, decision-makers, and other involved stakeholders and sites. The information and analytical process is formed in the form of an application that determines the need for information resources and analytical and expert capabilities and time of service of each SC. The convergent approach involves the composition of heterogeneous components in a single system [2], ensuring compliance with 12 basic interoperability principles [3].

A heterogeneous network of SCs is considered. Let M be the set of users (PSMP) of NDSC; n is the number of SCs (in our case, $M > n$, that is, multi-user and content-different nodes of monitoring and analysis of the information being processed (economic, environmental, military, etc.); ck – estimation of the k -th user information needs ($k \in L$); R_i is the bandwidth estimation of the i -th SC of the NDSC; Prs – information flow among r -th and s -th SC ($r, s \in L$) in the network; q is the maximum permissible information flow among two SCs.

We introduce a variable

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{if the } k\text{-th user is served by the } i\text{-th SC of the NDSC, } i = 1, \dots, n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

The formalized view of the model for task of user's servicing in NDSC is as follows:

$$H_i = \max_i \sum_{k \in M} c_r x_{ki} \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{k \in M} c_i x_{ki} \leq R_i, i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ki} \leq 1, k \in M, \quad (3)$$

$$P_{ij}(x_{ji}, x_{ki}) \leq q; j, k \in M, j \neq k, i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Condition (2) expresses the limitation on bandwidth information of the i -th SC, condition (3) is a requirement of obligatory service of all users (PSMP) and belonging of the user to the service group of local SC, condition (4) regulates the service flows between users (PSMP) of NDSC. The algorithm for solving the problem (1)-(4) of optimization of loading for MRSC based on zero-one programming allows to increase qualitatively the level of information service of users in the distributed NDSC and thereby to increase the efficiency of its functioning.

The proposed methods and algorithms can be used to solve the problems of public administration as an integral part of e-governance to improve the efficiency of managing the country's economic complex. The proposed models of technical interoperability support and algorithms for managing the distributed NDSC information and analytical environment create opportunities for further improvement of strategic planning systems based on the capabilities management of complex situational systems.

References:

1. ISO/IEC 10746-2:2009 – Information technology – Open distributed processing – Reference model: Foundations. <https://www.iso.org/ru/standard/55723.html>

2. Kovalenko O.E. Compositional convergence of information technologies in systems of situational management based on the knowledge domain model. *Mathematical modeling in economy*. 2 (15), 39-44. (2019). doi: 10.35350/2409-8876-2019-15-2-40-45
3. New European Interoperability Framework (EIF). ISA² – Interoperability solutions for public administrations, businesses and citizens. https://ec.europa.eu/isa2/eif_enhttps://ec.europa.eu/isa2/sites/isa/files/eif_brochure_final.pdf

УДК 519.85

Л. М. Колєчка, д-р фіз.-мат. наук, професор,

В. В. Кильник, аспірант

Полтавський університет економіки і торгівлі, м. Полтава

МОДЕЛІ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРОБЛЕМ СЬОГОДЕННЯ

Задачі дискретної оптимізації, а зокрема задачі на комбінаторних множинах, є моделями багатьох прикладних задач [1, 2]. Їх актуальність визначається і тим, що такі моделі на комбінаторних множинах можуть бути застосовані для вирішення проблем сьогодення [3, 4]. В наш час, коли по всьому світі відбуваються спалахи коронавірусної інфекції виникають різноманітні проблеми, які можливо вирішити використовуючи комбінаторні моделі і підходи до їх розв'язання задач. Одна з таких проблем може бути сформульована, як виготовлення та транспортування медичних масок, які мають критично важливе значення в запобіганні розповсюдження інфекції між людьми. Отже, маємо прикладну задачу оптимізації доставки масок від виробників до аптек, з мінімізацією витрат на транспортування.

Побудуємо математичну модель задачі перевезення медичних масок з мінімальними витратами. Нехай маємо m можливих підприємств виробництва масок $A_i, i \in J_m$. Максимальні обсяги виробництва масок в i -му пункті відповідають a_i , де $i \in J_m$. Ці маски розподілені між аптеками $B_j, j \in J_r$.

Мінімальна допустима кількість масок в j -ій аптеці задана і рівна відповідно $b_j, j \in J_r$. На транспортування партії масок від кожного i -го виробника до кожної j -ї аптеці витрачається відома кількість грошей для всіх $i \in J_m, j \in J_r$ і відповідно рівна C_{ij} .

Вирішення задачі полягає у визначенні обсягів перевезень масок X_{ij} від i -го виробника до j -ї аптеки для всіх $i \in J_m$, $j \in J_r$, при відповідно мінімальних витратах на транспортування. Для перевезення використовується різноманітний транспорт який має певну місткістю в кількості ki допустимими обсягами g_1, g_2, \dots, g_k відповідно. Для побудови математичної моделі використаємо евклідову комбінаторну задачу на множині переставлень.

Відомо що $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ – мультимножина, де кожен елемент $\in B_j$, $j \in J_r$ місткості (транспорту) для перевезення медичних масок. Тоді всі можливі – вибірки з мультимножини G_i вони утворюють загальну множину перестановок $E_{kn}(G)$, де $n \in$ числом різних елементів у G . Введемо позначення x_{ij} – кількість масок, які транспортуються з A_i в B_j ; c_{ij} – вартість перевезення масок від i -го виробника до j -ї аптеки; a_i – кількість масок, що виготовляють на підприємстві A_i , $i \in J_m$; b_j – потреби аптек B_j , $j \in J_r$; g_k – об'єм місткості, в яких можуть перевозитись маски. Візьмемо p_{ij} – кількість місткостей, що використовуються для перевезення масок від i -го виробника до j -ї аптеки; $y_{a_i^j}$ – об'єми місткостей (транспорту), в яких можуть перевозитись маски від i -го виробника до j -ї аптеки де $a_i^j \in J_k$, $i \in J_m$, $j \in J_r$, $i \in J_{p_{ij}}$. З цього

$$\text{отримуємо наступне } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r p_{ij} = k$$

$$y = \left(y_{a_1^1}, \dots, y_{a_{n_1}^1}, \dots, y_{a_1^m}, \dots, y_{a_{n_m}^m} \right) \in E_{kn}(G),$$

Де k – кількість елементів, n – число різних елементів в G .

Позначимо

$$mr = s, x = \left(x_{11}, \dots, x_{1r}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{nr} \right) \in E_{kn}(G).$$

Таким чином математична модель отримує наступний вигляд: знаходження впорядкованої пари $\left\langle F(x^*), x^* \right\rangle$, такої, що

$$F(x^*) = \min_{x \in R^r} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r c_{ij} \cdot x_{ij}, x^* = \arg \min_{x \in R^r} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r c_{ij} \cdot x_{ij}.$$

При комбінаторній умові

$$y = \left(y_{a_1^1}, \dots, y_{a_{n_1}^1}, \dots, y_{a_1^m}, \dots, y_{a_{n_m}^m} \right) \in E_{kn}(G),$$

і наступних додаткових лінійних обмеженнях на обсяги поставок масок:

$$\sum_{j=1}^r x_{ij} \leq a_i, \forall i \in J_m.$$

Обмеження на обсяги отримання масок аптекою:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \forall j \in J_r.$$

Обмеження на обсяги перевезень:

$$x_{ij} \leq \sum_{l=1}^{P_{ij}} y_{a_l^i}^j, \text{ де } a_i^j \in J_k, i \in J_m, j \in J_r.$$

Дана задача є моделлю задачі комбінаторної оптимізації, як класу дискретних задач. Для розв'язання вище сформульованої моделі можна застосувати різноманітні методи комбінаторної оптимізації. Але, найбільш цікавими для даної моделі є методи, які побудовані на властивостях комбінаторних конфігурацій. Такі методи представлені, зокрема в [3]. Для вище запропонованої задачі можуть бути застосовані підходи, що ґрунтуються на встановленні зв'язку між задачами на евклідових комбінаторних множинах і графами відповідних комбінаторних многогранників. Такі підходи можна застосувати до ряду задач, в яких пропонується визначати вимоги до забезпечення оптимізації різних економічних і транспортно-логістичних параметрів та ін.

Список використаних джерел:

1. Kolietchkina, L., Pichugina, O., Yakovlev, S.: A Graph-Theoretic Approach to Multiobjective Permutation-Based Optimization. In: Ja'cimovi'c, M., Khachay, M., Malkova, V., and Posypkin, M. (eds.) Optimization and Applications. pp. 383–400. Springer International Publishing, Cham (2020).
2. Стоян Ю.Г. Теория и методы евклидовой комбинаторной оптимизации: современное состояние и перспективы / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев // Кибернетика и системный анализ. – 2020. – Т. 56, №3 – С. 29-45.
3. Семенова Н.В., Колечкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи їх дослідження та розв'язання. Київ: Наукова думка, 2009. 262 с.

Л. М. Колечкіна, д-р фіз.-мат. наук, професор

С. В. Ховбень, аспірант

Полтавський університет економіки і торгівлі, м. Полтава

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ НА КОМБІНАТОРНІЙ КОНФІГУРАЦІЇ ПЕРЕСТАНОВОК ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ

На сьогодні кожна людина знаходиться в інтенсивному інформаційному просторі, а використання Інтернету та телекомунікаційних мереж посилює вплив на неї інформації. В цьому аспекті досить актуальним предметом вивчення є соціальні інформаційні мережі [1-3].

Соціальні інформаційні мережі ґрунтуються на соціальних структурах, складаються з множини соціальних об'єктів та використовують соціальні медіа-сховища. Соціальні медіа-сховища призначені для зберігання, обміну, передачі та класифікації різного виду інформації, тому досить важливо оптимізувати інформацію та інформаційний ресурс, а саме – об'єм інформації, її вид і процес передачі. Для оптимізації такого роду параметрів можна використати математичне моделювання [4, 5]. В ряді праць пропонується використовувати математичну модель мережі, що представляє собою набір графів, які можуть відрізнятися як кількістю ребер та вершин, так і загальною структурою графу і властивостями [2]. В цьому сенсі цікавими є моделі комбінаторної оптимізації, а зокрема багатокритеріальної, оскільки практичні задачі оптимізації інформаційних систем мають як правило дві і більше цілей [6]. Її математична модель виглядає наступним чином:

$$\begin{aligned} f_l(x) &\rightarrow \min, \quad l \in J_L; \\ f_l(x) &\rightarrow \max, \quad l \in J_L \setminus J_L'; \\ x &\in X \in E'. \end{aligned} \quad (1)$$

де E' – комбінаторний простір, X – множина допустимих розв'язків задачі, а функції $f_l(x)$, $l \in J_L$ визначені на E' . Набір цільових функцій в (1) можна представити у вигляді вектор-функції:

$$F = (-f_1(x), \dots, -f_{L'}(x), f_{L'+1}(x), \dots, f_L(x)), \quad (2)$$

максимум якої необхідно знайти. Слід зазначити, що кожний розв'язок $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ характеризується відповідною векторною оцінкою, тобто вектором $F(x)$. Тому вибір оптимального розв'язку із множини всіх розв'язків зводиться до вибору оптимальної оцінки із множини оцінок:

$$Y = F(X) = \left\{ y \in R^l \mid y = F(x), x \in X \right\}.$$

При цьому оптимальність оцінок (розв'язків) визначається деяким принципом оптимальності, заданим у критеріальному просторі.

Якщо множина E' є образом в R^N деякої множини A реальних комбінаторних об'єктів, причому між елементами E' та A можна встановити бієкцію, то множини E' і A будуть евклідовими комбінаторними множинами, а (2) являтиме собою загальну математичну модель багатокритеріальної задачі евклідової комбінаторної оптимізації [6].

Одним з поширених методів розв'язання задач векторної оптимізації є метод зведення багатокритеріальної задачі до однокритеріальної шляхом згортання векторного критерію в суперкритерій.

Після формування супер-критерія, від задачі (1) здійснюється перехід до задачі

$$\Phi(x) \rightarrow \max; x \in X \subseteq E' \subset R^N. \quad (3)$$

Вона являє собою задачу дискретної оптимізації, до розв'язання якої застосовувані відповідні методи такі як метод меж та гілок, метод відсіків, метод гілок та меж та ін. [6, 7].

Список використаних джерел:

1. T. Aichner and F. Jacob, Measuring the Degree of Corporate Social Media Use, *International Journal of Market Research*, vol.57, no. 2, pp.257-275, 2015 <https://journals.sagepub.com/doi/10.2501/IJMR-2015-018>
2. Колечкіна Л.М., Пічугіна О.С. Математичне моделювання при оптимізації телекомунікаційних мереж. Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання: матеріали Міжнародної науково-практичної конференції. Івано-Франківськ: Супрун В.П., 2016. – 232с.
3. Farzad, B., Pichugina, O., Kolietchkina, L.: Multi-Layer Community Detection. In: 2018 International Conference on Control, Artificial Intelligence, Robotics Optimization (ICCAIRO). pp. 133–140 (2018).
4. Pardalos P.M. Handbook of combinatorial optimization / P.M. Pardalos, D-Z. Du, R.L. Graham. – New York: Springer, 2013. – 3409 p.
5. Модели и методы комбинаторной оптимизации в проектировании и управлении / [В.В. Семенец, И.В. Гребенник, С.В. Листровой та ін.]. – Киев : Наукова думка, 2019. – 176 с.
6. Семенова Н.В., Колечкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи їх дослідження та розв'язання. Київ: Наукова думка, 2009. 262с.
7. Колечкіна Л.М. Огляд методів розв'язування екстремальних задач на комбінаторних конфігураціях / Л.М. Колечкіна, О.А. Двірна, С.В. Ховбень // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем : Тези доповідей XVII Міжнародної науково-практичної конференції МПЗІС–2019, Дніпро, 20–22 листопада 2019 р. – Дніпро: ДНУ, 2019 р. – С. 136-137с.

О. М. Литвин*, д-р фіз.-мат. наук, професор,

О. О. Литвин*, д-р фіз.-мат. наук,

О. В. Ткаченко**, канд. фіз.-мат. наук,

А. А. Білбородов***, аспірант

*Українська інженерно-педагогічна академія, Харків,

**Запоріжжя,

***Харківський національний університет радіо-електроніки, Харків

ОПТИМІЗАЦІЯ ВИБОРУ ПАРАМЕТРІВ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ ФОРМУЛІ ДАЛАМБЕРА ДЛЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Тема присвячена розв'язанню питання про класи функції, які точно відновлюються за допомогою узагальненої формули Даламбера запропонованої О.М. Литвином в 1989 р. На відміну від полінома Тейлора ця формула зберігає той же клас диференційовності якому належить наближувана функція, навіть якщо частинні похідні s -го порядку $s = 1, 2, \dots, N$ не належать до того ж класу диференційовності якому належить наближування функція

О.М. Литвином була сформульована і доведена наступна теорема [1, 2]:

Теорема 1. Хай $r, N \in \mathbb{N}$, $r > N$. $f(x, y) \in C^r(R^2)$, β_i , $(i = \overline{0, N})$ – задані числа, що не дорівнюють одне одному, $\beta_k \neq \beta_l, k \neq l; k, l = \overline{0, N}$. Тоді оператор

$$D_N f(x, y) = \sum_{i=0}^N \lambda_{N0i} f(x + \beta_i y, 0) + \sum_{s=1}^N \sum_{i=0}^N \lambda_{Nsi} \int_0^{x+\beta_i y} f^{(0,s)}(t, 0) \frac{(x + \beta_i y - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt \quad (1)$$

де числа λ_{Nsi} ($0 \leq s, i \leq N$) є розв'язками $(N+1)$ – системи лінійних алгебричних рівнянь, відповідних значенням $s = \overline{0, N}$

$$\sum_{i=0}^N \lambda_{Nsi} \beta_i^p = \delta_{p,s}, \quad 0 \leq p \leq N$$

має властивості

$$f(x, y) \in C^r(R^2) \rightarrow D_N f(x, y) \in C^r(R^2)$$

$$\left. \frac{\delta^s D_N f(x, y)}{\delta y^s} \right|_{y=0} = \left. \frac{\delta^s f(x, y)}{\delta y^s} \right|_{y=0}, \quad s = \overline{0, N}.$$

Наголошуємо що твердження теореми 1 виконуються для довільних $\beta_i, i = \overline{0, N}$ які задовольняють вказаним вище умовам, тому актуальною є задача вибору параметрів $\{\beta_i\}$, з умови мінімуму похибки наближення $R_N f(x, y) = (I - D_N) f(x, y)$.

При цьому для залишку оператора (1) була сформульована і доведена наступна теорема [1, 2]:

Теорема 2. Хай $r, N \in N, r > N, f(x, y) \in C^r(R^2), \beta_i, (i = \overline{0, N})$ – задані числа, що не дорівнюють одне одному, $\beta_k \neq \beta_l, k \neq l; k, l = \overline{0, N}$ задана система чисел, а числа λ_{Nsi} це розв'язок системи

$\sum_{i=0}^N \lambda_{Nsi} \beta_i^p = \delta_{sp}$, тоді залишок оператора (1) $R_N f(x, y)$ має вид:

$$R_N f(x, y) = \int_0^y \left[\sum_{i=0}^N \Delta_{Ni}^{-1} \int_0^{x+\beta_i(y-z)} (A_{N+1}f)(t, z) \frac{(x+\beta_i(y-z)-t)^{N-1}}{(N-1)!} dt \right] dz,$$

де

$$(A_{N+1}f)(x, y) = \prod_{i=0}^N \left(-\beta_i \frac{\delta}{\delta x} + \frac{\delta}{\delta y} \right) f(x, y),$$

$$\Delta_{Ni} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^N (\beta_i - \beta_k), 0 \leq s, i \leq N.$$

Ці дві теореми дозволяють довести наступні теореми:

Теорема 3. Хай $\{\beta_k\}, 0 < \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_N < \infty$ задана система чисел, а числа λ_{Nsi} це розв'язок $\sum_{i=0}^N \lambda_{Nsi} \beta_i^p = \delta_{sp}, 0 \leq s, p \leq N$, тоді для системи чисел $\tilde{\beta}_i = \beta_i C, i = \overline{0, N}, C > 0$ числа $\tilde{\lambda}_{Nsi} = \lambda_{Nsi} C^{-s}$ будуть розв'язками системи $\sum_{i=0}^N \tilde{\lambda}_{Nsi} \tilde{\beta}_i^p = \delta_{sp}$.

Теорема 4. Хай

$r, N \in N, r > N, f(x, y) \in C^r(R^2), \{\beta_k\}, 0 < \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_N < B < \infty$ задана система чисел, а числа λ_{Nsi} це розв'язок системи

$\sum_{i=0}^N \lambda_{Nsi} \beta_i^p = \delta_{sp}$, тоді оператор

$$\hat{D}_N f(x, y) = \sum_{i=0}^N \lambda_{N0i} f(x + \beta_i y, 0) + \sum_{s=1}^N \sum_{i=0}^N \lambda_{Nsi} \int_x^{x+\beta_i y} f^{(0,s)}(t, 0) \frac{(x + \beta_i y - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt$$

дорівнює оператору (1) $D_N f(x, y)$.

З теореми 3 випливає, що при побудові оператора $D_N f(x, y)$ є можливим рахувати інтеграли по меншій області інтегрування. Це має сенс у випадку програмної реалізації, де інтеграли можуть наближено, таким чином зменшення області інтегрування може зменшити похибку від наближення. Враховуючи теореми 3, 4 можна досягти вибору чисел $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$ в межах від 0 до 1, що дозволить зробити область інтегрування ще менше.

Теорема 5. Якщо функція f має вид $f(x, y) = g(x + y)$, то залишок наближення $R_N f(x, y)$ оператору (1) має вид:

$$R_N f(x, y) = \prod_{i=0}^N (1 - \beta_i) \int_0^y \left(\sum_{i=0}^N \Delta_{N_i}^{-1} \cdot \int_x^{x+\beta_i(y-z)} g^{(N+1)}(t+z) \cdot \frac{(x + \beta_i(y-z) - t)^{N-1}}{(N-1)!} dt \right) dz.$$

З використанням теореми 5 доводиться наступна теорема:

Теорема 6. Якщо наближування функція, $f(x, y)$ має вид $f(x, y) = g(x + y)$, $f(x, y) \in C^r(R^2)$ то оптимальні значення $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$ при обмеженні $-1 \leq \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_N \leq 1$ будуть такими: $-1 \leq \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_{N-1} < 1$ – довільні, не рівні один одному, $\beta_N = 1$. При цьому залишок оператору дорівнює $R_N f(x, y) \equiv 0$. Тобто при запропонованому виборі чисел $\{\beta_k\}$, оператор $D_N f(x, y)$ відновлює функцію точно.

Список використаних джерел:

1. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Монографія Харків: Основа, 2002.-544.с
2. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові розділи / О.М. Литвин – Київ: Наук. думка, 2005. – 331 с.

Н. В. Семенова*, д-р фіз.-мат. наук,

М. М. Ломага**, старший викладач

*Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ,

** ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород

СТОХАСТИЧНІ ЗАДАЧІ ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

На практиці, зокрема при прогнозуванні, часто доводиться враховувати невизначений та імовірнісний характер багатьох факторів, що впливають на досліджуваний процес. Годі в умовах невизначеності та ризику оптимальний вибір здійснюється на основі стохастичних одно чи багатокритеріальних моделей, тобто моделей, в яких відображається випадковий характер вхідних даних.

Розглядається одноетапна стохастична задача лексикографічної оптимізації

$$L(F, X) : \min^L \{F(x) | x \in X\},$$

де $F(x) = (f_1(x), \dots, f_l(x))$, $f(i), i \in N_l = \{1, 2, \dots, l\}$, f_i – функції, що залежать від випадкової величини ω , $X = \{x \in R^n | Ax \leq b, x \geq 0\}$, $A \in R^{m \times n}$, $a_{ij} \in R$, $i \in N_m$, $j \in N_n$, $b \in R^m$.

Позначимо Mf_i – математичне сподівання $f_i(x)$, $i \in N_l$. Нехай Mf_i – опуклі функції. Задачу $L(F, X)$ подаємо у вигляді наступної еквівалентної детермінованої моделі:

$$ML(F, X) : \min^L \{MF(x) | x \in X\},$$

де $MF(x) = (Mf_1, \dots, Mf_l)$.

Для розв'язання вище наведеної задачі $ML(F, X)$ використано алгоритм [1, с.258-259], в основі якого лежать ідеї методів можливих напрямків і лінеаризації. Процес пошуку оптимуму детермінованої задачі лексикографічної оптимізації зводиться до розв'язання однієї або послідовності допоміжних лексикографічних задач лінійного програмування.

Список використаних джерел:

1. Семенова Н. Алгоритм решения многокритериальных задач лексикографической оптимизации с выпуклыми функциями критериев / Н. Семенова, М. Ломага, В. Семенов // International Journal "Information Theories and Applications", Vol. 21, N. 3, 2014. P.254-262.

О. В. Слободянюк*, канд. техн. наук,

В. В. Бараннік**, д-р техн. наук,

В. В. Бараннік**,

В. Н. Бабенко**

*Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,

**Харківський національний університет
Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, м. Харків

РОЗРОБКА АЛГОРИТМУ ПЕРЕВІРКИ ВЕБ РЕСУРСІВ НА СТІЙКІСТЬ ДО КІБЕРАТАК

Важливою умовою для якісної роботи сайту є регулярні діагностичні та відновлювальні процедури різного характеру та рівня в складі комплексного аудиту безпеки сайту, який спрямований на підвищення безпеки і надійності інтернет-ресурсу. Частина таких робіт присвячена пошуку вразливостей у структурі самого сайту, його коду та серверного програмного забезпечення. Розробка методики проведення таких досліджень дозволить ефективно реалізовувати комплекси заходів із запобігання порушень роботи веб ресурсів та несанкціонованого доступу до них.

При проведенні аудиту інформаційної безпеки веб ресурсів можна використовувати рекомендації, що пропонуються спільнотами OWASP, NIST, PTES та іншими [3, 5]. Однак усі вони містять лише загальні вказівки щодо тестування. Крім того швидкість їх оновлення не завжди відповідає тенденціям ринку інформаційної безпеки та можуть не враховувати нові типи вразливостей, що постійно з'являються та оновлюються. Тому ми пропонуємо свій алгоритм проведення безпекового аудиту із використанням елементів пентестингу.

Для проведення аудиту веб сайту, що досліджується, пропонується використовувати наступний алгоритм дій:

1. Збір інформації про сайт.
2. Дослідження архітектури сайту.
3. Виявлення вразливостей на сайті.
4. Перевірка сайту на стійкість до атак.
5. Формування звіту із зазначенням переліку рекомендацій щодо усунення знайдених вразливостей.

Перевірка веб ресурсу завжди має розпочинатися із збирання повної інформації про нього. Це можна виконати за допомогою спеціальних інструментів, таких як надбудови для веб браузерів (Built With Profiler, Wappanalyzer) або спеціалізованих ресурсів (2ip.ru,

WhatCMS.org, rescan.io). При цьому визначається тип програмної платформи, бібліотеки й фреймворки, що на ньому використані та загальну інформацію про місце його розташування, включаючи із інформацією про хостинг, адресацію та інше. Після цього проводиться дослідження архітектури сайту. Найкраще це проводити за допомогою дебагера Burp Suite. Також з його допомогою можна провести сканування на наявність вразливостей з переліку OWASPTOP-10, використовуючи модуль Burp Suite Scanner. На основі отриманого переліку вразливостей проводимо перевірку здатності програмного забезпечення, встановленого на хостингу, боротися із активним втручанням до сайту ззовні. Для цього використовуємо модуль Burp Suite Intruder, вибираючи у ньому той чи інший тип атаки (BruteForce, SQL injection, XSS тощо).

Аналіз отриманих результатів після серії проведених перевірок випадкових сайтів мережі показав, що на кількість вразливостей, які можуть міститися на веб сайті, впливає цілий ряд факторів. Серед головних факторів, що впливають на наявність вразливостей є наявність активної системи захисту від несанкціонованих втручань та стан оновлення програмного забезпечення хостингу, на якому розміщено конкретний веб ресурс. Саме через це найменшу кількість вразливостей було виявлено на сайтах, які були захищені фаєрволами веб застосунків (WAF) та побудовані на основі сучасних систем керування або веб фреймворках.

Список використаних джерел:

1. Аудит безопасности сайта: что это такое и почему без него не обойтись [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: <https://itfb.com.ua/audit-bezopasnosti-sajta/>.
2. Бараннік В.В. Архітектурні особливості систем захисту веб-ресурсів від несанкціонованого доступу / В.В. Бараннік, О.В. Слободянюк, Н.В. Бараннік // Наукоємні технології в інфокомунікаціях: Матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції. – Харків : Друкарня Мадрид, 2019. – С. 45-47.
3. OWASP Testing Guide [Електронний ресурс]. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: https://owasp.org/index.php/OWASP_Testing_Guide_v4_Table_of_Contents.
4. Weidman G. Penetration testing: A hands-on introduction to hacking / Georgia Weidman. – San-Francisco: No Starch Press, Inc, 2014. – 531 с.
5. Zhu C. Experimental study of vulnerabilities in a web application : Master's Degree Programme in Computer, Communication and Information Sciences / Zhu Can – Espoo: Aalto University, 2017. – 50 с.
6. Yaworski P. Web Hacking 101. How to Make Money Hacking Ethically / Peter Yaworski. – Victoria: Lean Publishing, 2017. – 216 с.

Я. Чабанюк, професор,

У. Хімка, доцент,

О. Кошів, студентка

Львівський національний університету імені Івана Франка, м. Львів

ЗАДАЧА ЗНАХОДЖЕННЯ КООРДИНАТ БЕЗПІЛОТНИХ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ РОЗШИРЕНОГО ФІЛЬТРА КАЛМАНА

До актуальних задач сучасної навігації безпілотних літальних апаратів (БПЛА) належить задача підвищення точності визначення координат. Цю задачу можна вирішити шляхом поєднання різних варіантів навігаційних систем. Серед варіантів є поєднання gps/глонасс-навігації з розширеним фільтром Калмана, яке рекурсивно оцінює точність за допомогою неповних і зашумлених вимірювань. Окрім існуючих розробляються інші варіації розширеного фільтра Калмана[1].

Розглянемо рух БПЛА в горизонтальній площині, так звана проблема 2d локалізації. На практиці часто трапляються ситуації, коли БПЛА може залишатися приблизно на одній і тій же висоті. Це припущення використовується для спрощення моделювання динаміки літальних апаратів. Запропонована динамічна модель БПЛА, яка задається системою рівнянь, буде наближеною через нелінійність і присутність шуму. Найпростіший спосіб апроксимації в даному випадку – наближення методом Ейлера.

Сигнали часто мають нелінійну динаміку і ненормальний шум. В таких випадках використовується розширений фільтр Калмана. Якщо дисперсії шумів не надто великі (лінійна апроксимація є адекватною), застосування розширеного фільтра Калмана дає рішення задачі з високою точністю. Проте, коли шуми не є гаусівськими, розширений фільтр Калмана застосовувати не бажано. В такому випадку зазвичай застосовують частковий фільтр, в якому використовуються чисельні методи взяття інтегралів на основі методів Монте-Карло з марківськими ланцюгами.

З метою розширення ідеї розширеного фільтра Калмана розглянемо один з алгоритмів – частковий фільтр. Часткова фільтрація є неоптимальним способом фільтрації і працює при виконанні об'єднання методом Монте-Карло на множині частинок, які являють собою розподіл ймовірностей процесу. Основна ідея часткового фільтра полягає в тому, що велика кількість частинок може бути використана для подання оцінки розподілу.

Алгоритм фільтрації частинок показує хорошу продуктивність обчислення місцеперебування для стаціонарних цілей і в разі відносно повільно рухомих цілей з невідомою динамікою прискорення. У загальному випадку, алгоритм фільтрації частинок є більш стабільним, ніж розширений фільтр Калмана, і менш схильним до виродження і серйозних збоїв. У випадках нелінійного, негаусового розподілу даних алгоритм фільтрації показує досить високу точність визначення місця розташування цілі, в той час як алгоритм розширеної фільтрації Калмана не можна використовувати при таких умовах. До мінусів даного підходу можна віднести його більш високу складність щодо розширеного фільтра Калмана, а також те, що не завжди очевидно, як правильно підібрати параметри для цього алгоритму[2].

Використання фільтра Калмана в системах визначення місця розташування БПЛА, підвищення точності, особливо в разі відмови стандартних супутникових навігаційних систем, можливість фільтрувати негаусівські шуми пов'язані з розробкою точних і відмовостійких навігаційних систем для різних літальних апаратів.

Постановка задачі знаходження координат зводиться до задачі прийняття рішення[3]. Варіанти досягнення мети (множини багатокритеріальних функцій – альтернатив) скорочуються згідно принципу Парето, а якісна оцінка при співставленні таких альтернатив дає змогу особі, що приймає рішення, визначити кращий (оптимальний) варіант.

Список використаних джерел:

1. Дегтярьов А.А. Елементи теорії адаптивного розширеного фільтра Калмана / А.А. Дегтярьов, Ш. Тайль. – М., 2003. – № 26. – 35 с.
2. Цібізова Т.Ю. Дослідження алгоритмів оцінювання в задачі корекції навігаційних систем літальних апаратів / Т.Ю. Цібізова, Кай Шень, К.А. Неусипін // Фундаментальні дослідження. – 2015. – № 6-2. – С. 301-305.
3. Волошин О.Ф. Моделі та методи прийняття рішень : навч. посіб. для студентів вищ. навч. закл. / О.Ф. Волошин, С.О. Мащенко. – 2-ге вид., переробл. та допов. – К. : Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2010. – 356 с.

УДК 37.091.26

А. Б. Андруховський

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ТЕХНОЛОГІЇ OMR ДЛЯ ПІДГОТОВКИ БЛАНКОВОГО ТЕСТУВАННЯ

Застосування тестових методик у різних сферах людської діяльності набуло системного характеру, однак не завжди масовість застосування супроводжується дотриманням процедур і забезпеченням відповідної якості. Саме така ситуація і забезпечує актуальність досліджень щодо використання інформаційно-комунікаційних технологій у сфері розробки тестів і тестових завдань.

Педагогічні тести класифікуються за різними ознаками і такі класифікації можна побачити у різних джерелах [1],[2].

За можливістю використання інформаційно-комунікаційних технологій педагогічне тестування поділяють на два види бланкове (paper-and-pencil) та комп'ютерне (computer-based).

Бланкове тестування частіше використовують для оцінки знань, вмінь чи навичок, пов'язаних з професійною діяльністю, рідше – для оцінки знань учнів та студентів, виняток складає проведення ЗНО. Така ситуація зумовлена тим, що до недавнього часу для розпізнавання бланків доводилось застосовувати дорогі сканери, та й процес обробки результатів також вимагав великих фінансових затрат і часу. Логічно припустити, що скорочення витрат на проведення бланкового тестування дало би можливість навчальним закладам підвищити якість освітніх послуг.

Метою даного дослідження було визначено вивчення особливостей підготовки бланкового тестування із використанням сучасних OMR технологій. Зазначимо, що під OMR (OpticalMarkRecognition) розуміють процес збору інформації від людей шляхом розпізнавання спеціальних символів у документах.

Поетапна формалізація задачі розпізнавання виглядатиме так:

- Підготовка бланків відповідного зразку;
- Отримання зображення за допомогою мобільного пристрою;
- Перетворення зображення до деякого стандартного вигляду;

- Визначення і розпізнавання клітинок;
- Збереження відповідей.

На сьогоднішній день декілька розробників надають можливість роботи з технологією OMR: Amazon, Aspose, Microsoft, OmrHome, PsiGen. У даній роботі, в якості прикладу, було обрано продукт Aspose.OMRCloud як такий, що надав найбільше можливостей для вільного тестування і апробації.

Коротко опишемо кожен з етапів:

Підготовка бланків. На даному етапі визначаються з макетом бланку, описують його за допомогою спеціальної мови розмітки, яка дозволяє визначити фрагменти тексту, місця для розташування відповідей і штрих-кодів;

Отримання зображення. Після проведення тестування бланки потрібно перевести в цифровий формат. Для цього може бути використано мобільний телефон або планшет та веб-застосунок, який надсилає отриманні зображення до хмарного сховища;

Перетворення зображення. На даному етапі проводиться вирівнювання зображень, напр. за кутом нахилу, чи поворот до портретної орієнтації, а також видалення інформації про кольори (перетворення до grayscale);

Визначення і розпізнавання клітинок виконується за допомогою хмарного ML-сервісу Aspose.Cloud на основі моделі побудованою за допомогою опису з п.1.

Збереження результатів. Після розпізнавання бланку ML-сервіс повертає результат у форматі JSON, який може бути збережений в нереляційній базі, або перетворений для збереження в реляційній.

З практичним прикладом реалізації (у вигляді прикладного ПЗ) зазначених вище етапів можна ознайомитися за адресою [3].

У підсумку хочеться зазначити, що запропонований метод дозволяє організувати процедуру тестування близькою до процедури тестування ЗНО, що є актуальним для проведення пробних тестувань ЗВО в рамках вступної кампанії.

Результати такого тестування будуть точнішими (ближчими) до результатів ЗНО, а це дасть змогу чіткіше визначити аудиторію, зорієнтовану на вступ до конкретного університету і організувати надання ним якісніших освітніх послуг.

Список використаних джерел:

1. Аванесов В.С. Композиция тестовых заданий / В.С. Аванесов. – М.: Центр тестирования, 2002. – 240 с.
2. Булах І.Є. Створюємо якісний тест : навч. посіб. / І.Є. Булах, М.Р. Мруга. – К.: Майстер-клас, 2006. – 160 с.

3. AsposePtyLtd. Aspose.OMRCloudfor.NET [Електронний ресурс] / AsposePtyLtd // 2020 – Режим доступу до ресурсу: <https://github.com/aspose-omr-cloud/aspose-omr-cloud-dotnet>.

УДК 004.94

І. В. Бейко, д-р. техн. наук

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ

ПІДВИЩЕННЯ ЯКОСТІ КОМП'ЮТЕРИЗОВАНОГО НАВЧАННЯ ІЗ ПОГЛИБЛЕННЯМ ЗНАТЬ НА ОСНОВІ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Глобальна комп'ютеризація та оптимізація у різних сферах діяльності проникає також в освіту і суттєво підвищує якість навчання на різних рівнях, від дошкільного і до післядипломного. Проблема підвищення якості навчання є важливою виходячи також із того, що вже в недалекому майбутньому зростання національного прибутку та добробуту буде суттєво залежати від інтелектуального потенціалу нації. А цей потенціал визначається якістю сучасної освіти, її неспроможністю на даний час розвивати і поглиблювати здібності математичного мислення, розпізнавання причинно-наслідкових залежностей у складних переплетіннях різноманітних процесів навколишньої реальності. У доповіді розглядаються великі можливості підвищення якості навчального процесу за допомогою впровадження інформаційних технологій комп'ютеризованого навчання. Ці технології стимулюють вже в середній школі включати до навчальних програм елементи вищої математики та математичної статистики. Адже в епоху глобальної комп'ютеризації вже дійсно є велика необхідність кожному усвідомлювати такі поняття як випадкова величина, похідна, інтеграл. І з огляду на ці потреби розумний Світ вже відкриває вільний доступ до безплатного опанування новими знаннями, викладеними в Інтернет мережах провідними університетами світу. Для цього достатньо тільки зайти на www.edx.org і записатися на бажані курси будь-якого університету-партнера. Аналогічні можливості надаються універсальними відкритими програмними забезпеченнями від WolframAlpha, Python, Octava, SciLab, R-Studio тощо. Особливо великих успіхів досягнуто у створенні інтерактивного «блокноту Wolfram» (WolframNotebook), де користувач може вводити дані на живій мові і миттєво отримувати результати, які разом із програмними кодами можуть зберігатися в блокноті в активному стані, щоб зробити можливим у будь-який час продовжувати проведення в цьому блокноті додаткових обчислювальних експериментів, зокрема, для поглиблення отриманих

знань. Таке навчання на основі здобування нових знань чисельними експериментами у блокнотах Wolfram (які звільняють від рутинної праці, зазвичай великих в експериментах обсягах) перетворює процес навчання на «радість творчої праці»! Подяка Вольфраму!

УДК 378.147:371.134:53:004.92:004.55

А. М. Кух, д.-р пед. наук,
О. М. Кух

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЦИФРОВА КОМПЕТЕНТНІСТЬ ТА ЗАДАЧІ ЇЇ ФОРМУВАННЯ

Сьогодення розвитку суспільства вимагає від кожного фахівця володіння цифровою компетентністю. Основи ЦК виявляються у розумінні суті цифрової технології у підтримці комунікації, творчості та креативності, усвідомленні їх можливостей, обмежень, наслідків та ризиків, розумінні загальних принципів, механізмів та логіки цифрових технологій, знанні основ функціонування та використання різних пристроїв, програм та мереж. Важлива роль при формуванні ЦК відводиться критичному мисленню в підході до достовірності, надійності та впливу інформації та даних, що є доступними цифровими засобами та усвідомленні юридичних та етичних принципів, що пов'язані з використанням цифрових технологій. При формуванні ЦК перевага віддається використанню цифрових технологій для підтримки активного громадянства та соціальної інтеграції, співпраці з іншими, творчості для досягнення особистих, соціальних чи комерційних цілей.

Тому основними ознаками сформованості ЦК є вміння зберігати дані, доступатись, фільтрувати, відбирати і здійснювати пошук, копіювати інформацію, розпізнавати її достовірність, класифікувати її; оновлювати та поширювати цифровий контент; використовувати інформацію, змінювати дані, креативно реагувати на контент, варіювати та захищати дані, безпечно використовувати технології, критично оцінювати їх вплив, створювати новий контент, використовувати цифрову ідентичність та персоніфікувати свою присутність в соціальних мережах та суспільстві, а також ефективно працювати з програмами, пристроями, штучним інтелектом та роботами.

Робота з цифровими технологіями та вмістом вимагає рефлексивного та критичного, і водночас допитливого, відкритого та перспективного ставлення до їх розвитку. Вона також вимагає етичного, безпечного та відповідального підходу до використання цих інструментів.

На рівні мети – формування компетентностей перевага надається констатації фактів з відповідними посиланнями, генералізація ідей, програмування розв’язків та рішень, оцінка інформації, перебудова оформлення (редизайн). Для цього вимагається оволодіти комбінуванням, прийняттям відповідних рішень, методами просування контенту або програмного продукту, чи і визначається самовираження; систематизація є основою досягання мети, і в кінцевому випадку, трактується як вчинок; відстоювання своєї позиції досягається у дискусії, при цьому забезпечується обмін думками і аргументуванням позиції (ранжування).

Освоєння інноваційних технологій передбачає їх дослідження, що створює передумови для здійснення контролю діяльності через формування точності у виконанні операцій та здійснення обчислень. Разом з автоматизацією це стає основою для організації діяльності, сприяє впровадженню технологій, залучення нових партнерів, виділяються оригінальні ідеї і способи їх втілення. Важливим етапом є концептуалізація – узгодження внутрішніх мотивів із зовнішніми нормами і вимогами.

В процесі дослідження технологій здобути навички присвоюються, привласнюються – натуралізуються, – а способи вирішення проблем набувають ознак цінностей, які узгоджуються із світоглядними чинниками – інтерналізуються. Описуючи ЦК в ознаках професійних вимог (рис. 4) визначаємо здатність до лідерства, здійснення інноваційної діяльності, інтегрованого використання засобів цифрових технологій для розв’язання професійних задач, здійснення експертизи даних і результатів діяльності та натуралізації – удосконалення власних умінь використання цифрових технологій в повсякденному та громадському житті.

Таким чином, приходимо до трьох задач і основних компонентів цифрової компетентності: формування цифрової обізнаності, розвиток цифрової грамотності і вирішенні проблем та розв’язання професійних задач за допомогою цифрових технологій.

Пропонована структура цифрової компетентності легко вписується і узгоджується з технологією уточнення компетентностей [2].

Отже, сформовано ієрархічну п’ятирівневу структуру цифрової компетентності в ознаках результату, в ознаках мети (компетентності), в ознаках організації діяльності, в ознаках професійних вимог та в ознаках основних задач.

Список використаних джерел:

1. Ключові компетентності для навчання впродовж життя 2018 – Цифрова компетентність – Режим доступу: <http://dystosvita.blogspot.com/2018/01/2018.html>

2. Кух А.М. Технологія уточнення компетентностей і професійно-методична підготовка учителя фізики / А.М. Кух, О.М. Кух // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету ім. Івана Огієнка. Серія : Педагогічна. – 2017. – Вип. 23. – С. 166-170. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/znpkp_ped_2017_23_52

УДК 378.147:371.134:53:004.92:004.55

О. М. Кух,

А. М. Кух, д-р пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ІНФОРМАЦІЙНА КУЛЬТУРА СТУДЕНТІВ ТА ПРОЦЕС ЇЇ ФОРМУВАННЯ

Інформаційна культура (ІК) – «одна із складових загальної культури людини; сукупність інформаційного світогляду та системи знань та вмінь, що забезпечують цілеспрямовану самостійну діяльність за оптимальним задоволенням індивідуальних інформаційних потреб з використанням як традиційних, так і нових інформаційних технологій»[1]. Інформаційна культура є продуктом різноманітних творчих здібностей людини і проявляється в наступних аспектах: в конкретних навичках з використання цифрових засобів (від арифмометра до персонального комп'ютера і комп'ютерних мереж); у здібностях використовувати в своїй діяльності сучасну комп'ютерну інформаційну технологію, що має чисельні програмні продукти; в умінні видобувати інформацію з різних джерел, як з періодичної преси, так і з електронних комунікацій, подавати її в зрозумілому наочному вигляді і вміти ефективно її використовувати; в оволодінні основами аналітичної обробки інформації; в умінні опрацьовувати різноманітні дані; в знаннях особливостей інформаційних потоків у своїй галузі діяльності; в використанні правових актів, які забезпечують інформаційні процеси; у володінні основами ергономічної та інформаційної безпеки.

Дослідження рівня сформованості рівня ІК проводилося методом анкетування на контингенті студентів фізико-математичного факультету (спеціальностей «Фізика», «Математика», «Комп'ютерні науки») при вивченні дисципліни за вибором студента «Інформаційна культура діяльності сучасного фахівця». Вибірка складала 48 студентів. За результатами анкетування, можна назвати необхідні умови успішного впровадження інформаційно-комунікаційних технологій в професійній діяльності: 26% респондентів відчувають труднощі в оволодінні ІКТ, 22% відзначають недостатність нових зразків комп'ютерного обладнання, 18% вказує на недостатню інформованість викладача.

Більшість студентів (73%), вважають за краще використовувати інтернет для пошуку необхідної інформації, ніж інші джерела інформації. При цьому 15% запитують про відсутню інформацію в соціальних мережах (діаграма 2). Більшість опитаних (65%) вважають за краще хоч іноді перевіряти достовірність одержуваної ними інформації і лише 23% регулярно це роблять. Студенти в більшості (35%) легко знаходять інформацію за контекстом в інтернет, проте із зростанням його складності відчують труднощі у відшуканні інформації (53%). Більша частина опитаних намагається регулювати, інформацію, яку вони одержують, відсіваючи непотрібне (61%). Великий відсоток студентів віддають перевагу запам'ятовуванню (23%). 59% студентів вважають, що реклама не завжди корисна. При зіткненні з великою кількістю "штампованих" фраз в тексті, багато опитаних реагують негативно (41%). В умовах інформаційної війни більшість вважає, що необхідно підвищувати рівень інформаційної компетентності самостійно (72%). Проте, більшість студентів не прагнуть підвищувати свій рівень інформаційної культури (57%). Багато опитаних вважає, що фахівець повинен отримувати знання у своїй галузі шляхом читання електронних книг за своєю спеціальністю (61%).

В результаті проведеного дослідження було виявлено, що рівень інформаційної культури групи досить посередній (52%), багато студентів навіть після ознайомлення з курсом «Інформаційна культура» не володіють ні з методами інформаційної культури, ні навіть з правилами використання інтернету. Так само студенти вважають, що інформаційна культура не стосується їх спеціалізації, а є лише супутньою дисципліною (53%). Вважаємо, що тільки інтенсивна робота з вивчення методів інформаційної культури сприятиме підвищенню інформаційної компетентності студентів фізико-математичного профілю.

Список використаних джерел:

1. Кух О.М. Розвиток інформаційної культури майбутніх фахівців фізико-математичного профілю / О.М. Кух, А.М. Кух // Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Серія : Педагогічні науки. – 2015. – Вип. 127. – С. 99-101. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/VchdpuP_2015_127_26
2. Кух О.М. Інформаційно-освітнє середовище в системі методичної підготовки майбутнього вчителя фізики [Електронний ресурс] / О.М. Кух, А.М. Кух // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету ім. Івана Огієнка. Серія : Педагогічна. – 2016. – Вип. 22. – С. 140-143. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/znkp_ped_2016_22_46

УДК 004.75:004.9

Ю. М. Лисецкий*, д-р техн. наук,

Н. П. Каревина**, к.и.н.

*ДП «ЭС ЭНД ТИ УКРАИНА», г. Киев,

**Институт проблем математических машин и систем
НАН Украины, г. Киев

КЛАСТЕРНЫЕ СИСТЕМЫ ХРАНЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ И НАУЧНЫХ ДАННЫХ НА БАЗЕ HITACHI GLOBAL ACTIVE DEVICE

Развитие современного образовательного процесса невозможно без использования информационных технологий [1]. Это необходимое условие для качественной подготовки будущих специалистов, а также повышения уровня самого высшего учебного заведения (ВУЗ). Для достижения этой цели необходимо создание единого информационного пространства в образовании, что позволит добиться интеграции национальных информационных образовательных систем в мировое информационно-образовательное пространство, а это значительно облегчит доступ к международным информационным ресурсам в области образования и науки [2].

Одна из важных задач, которую при этом надо решить, – перенос различного рода информации, находящейся в ВУЗах, научных центрах, библиотеках и других учреждениях из печатного вида в цифровой, обеспечив их целостность и надежное хранение. Целостность данных в процессе переноса имеет два представления: физическая целостность и логическая целостность.

Физическая целостность предполагает сохранность информации на каких-либо носителях (оптический диск, магнитная лента, HDD или SSD-диск). Но так как накопитель не вечен, рано или поздно на нем появятся ошибки, что будет приводить к потере части данных, а при наихудшем варианте возможен его полный отказ. Для повышения надежности хранения данных, как правило, применяют технологию RAID (Redundant Array of Independent Disks) [3]. Данная технология предполагает использование избыточного количества носителей для повышения физической целостности данных. В настоящее время существует много вариантов построения RAID, но в случае отказа носителя восстановление данных всегда сводится к одному из двух возможных сценариев: взять данные из готового дубликата (RAID1, RAID10, Triple Mirror) или воссоздать дубликат из бита четности (Paritybit) (RAID5, RAID6). Обеспечение физической целостности данных при наличии достаточно надежного оборудования не яв-

ляется на сегодня сложной задачей. Ее можно реализовать как на уровне аппаратного, так и программного обеспечения.

Логическая целостность данных реализуется конкретными приложениями, работающими с этими данными. Вместе с тем, обеспечение целостности данных является всего лишь одним из необходимых условий хранения информации для современных ВУЗов, научных центров, библиотек. Вторым, не менее важным условием, является обеспечения доступности этой информации в текущий момент времени. Задача сохранения целостности данных и обеспечения непрерывного доступа к ним решается с помощью использования кластерных систем, которые можно разделить на два типа: Active-standby (cold failover) и Active-active (hot failover).

Использование кластерных систем первого типа требует некоторых временных затрат (от минут до часов) для переключения проблемного ресурса на работающую копию. Во втором типе переключение производится практически мгновенно и простоя в доступе к данным не происходит. Как следствие, кластерные системы Active-active позволяют обеспечить «5 nine availability» – доступность к данным на уровне 99,999%, а допустимый простой при этом не более 5 минут в год.

Кластерные системы Active-standby предлагают такие производители, как IBM Power HA System Mirror (HACMP), HP Service guard, Symantec / Veritas Cluster Server. Кластерные системы уровня Active-active также предлагают несколько производителей: Solaris Cluster компании Oracle для ОС Solaris; IBMDB2pure для ОС AIX; RedHatClusterSuite, также известен как High Availability Add-On для серверов с Red Hat Enterprise Linux.

По мере роста популярности баз данных Oracle все большую долю кластерных систем начинает занимать Oracle Real Application Clusters (RAC). OracleRAC поддерживаются с 2004 года. В последнее время предлагаются уже готовые программно-аппаратные платформы Oracle Exadata (на базе x86-64 серверов и ОС Linux) и Oracle Super Cluster (на базе SPARC серверов и ОС Solaris).

На наш взгляд, наиболее эффективным для надежного хранения большого объема данных и быстрого непрерывного доступа к ним является использование кластерной системы Global Active Device (GAD) от Hitachi Vantara (до 2017 года Hitachi Data Systems), которая может использоваться совместно с Oracle RAC на географически разнесенных площадках [4]. Изначально кластерная система от Hitachi называлась Hitachi High Availability Manager (HAM) и была системой active/passive. Позже, благодаря появлению новой операционной системы (ОС) Storage Virtualization Operating System (SVOS), появилась active/active система GAD, которая позволяет при обращении к данным переключаться на резервную площадку в режиме реального

времени в случае аварии на основной площадке. Такое переключение «прозрачно» для приложений и не требует прерывания их работы.

Основной функционал, реализованный в GAD, рассмотрим на примере внедрения кластерной системы для одного из ВУЗов. До начала реализации проекта в ВУЗе имелось несколько систем хранения данных (СХД) – HP3PAR 7200, HPP4000, EMCСХ-4, VSPG400/G200, Sun Storage Tek 6140, Pillar Axiom 600, которые располагались на одной площадке, причем каждая из СХД имела различную нагрузку по IOPS и MB/s и использовалась для конкретных приложений. Внедрение кластерной системы GAD позволяло провести миграцию всех данных и нагрузки с имеющихся СХД, а для обеспечения дополнительной отказоустойчивости систему разнесли на две удаленные площадки. GAD представляет собой аппаратный кластер из СХД и гарантирует высокую доступность данных. В качестве аппаратной части были выбраны две СХД HDSVSPG600 и одна HDSVSPG200 для реализации кворума (рис. 1). Синхронная репликация между СХД выполнялась по оптической сети, построенной на базе коммутаторов Brocade. Для обеспечения синхронной репликации между удаленными площадками была проведена модернизация части коммутаторов и расширен оптический канал связи между площадками.

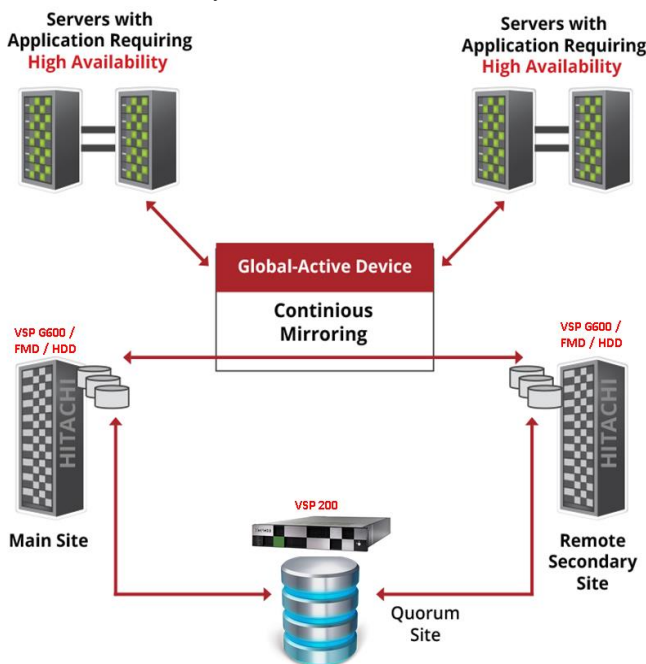


Рис. 1. Кластерная система Global Active Device от Hitachi Vantara

В результате реализации проекта GAD объединила СХД в единый кластер, работающий в режиме active/active. При этом серверы могут обращаться на чтение или запись к данным через любую из СХД. Посмотреть текущее состояние кластера можно как через web-интерфейс, так и через консоль управления. В случае какого-либо рода аварий на основной площадке полный доступ к данным обеспечивается с резервной площадки без временных задержек и потерь данных.

Таким образом, СХД компании Hitachi Vantara отличаются своей высокой надежностью, быстродействием и возможностью онлайн-миграции данных и сервисов, благодаря многолетней скрупулёзной работе над развитием микрокодов СХД [5]. Поэтому внедрение кластерной системы GAD является эффективным решением в случае необходимости надежного хранения больших объемов данных и организации возможности быстрого и непрерывного доступа к ним для любых ВУЗов, научных центров, библиотек.

Список использованных источников:

1. Лисецкий Ю.М., Павленко Д.Г. Информационные технологии в современной образовательной, профессиональной и научной деятельности. Наукова діяльність як шлях формування компетентностей майбутнього фахівця (НПК-2019): матеріали Міжнар. наук.-практ. конф.: у 2 ч. (Суми, 5–6 грудня 2019 р.). Суми: ФОП Цьома С.П., 2019. Ч. 1. С. 93–94.
2. Авраамов Ю.С. Практика формирования информационно-образовательной среды на основе дистанционных технологий. Телекоммуникации и информатизация образования. 2004. № 2. С. 40–42.
3. Common raid Disk Data Format (DDF). SNIA.org. URL: https://www.snia.org/tech_activities/standards/curr_standards/ddf.
4. Protect Database Oracle 12c with Global-Active Device on Hitachi Virtual Storage Platform G Series. URL: <https://www.hitachivantara.com/>.
5. Hitachi Vantara's Approach to 3-Data-Center Business Continuity and Disaster Recovery. URL: <https://www.hitachivantara.com/>.

УДК 004.738

Р. В. Моцик, канд. пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ВИКОРИСТАННЯ ІТ-ІНСТРУМЕНТІВ ДЛЯ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНИХ ДИСТАНЦІЙНИХ ЗАНЯТЬ

Цифровізація освіти змінює підходи до використання цифрових технологій вчителями та сприяє розвитку змішаного навчання на основі запровадження ІТ-інструментів в освітньому процесі. Виклики сьогодення, у вигляді запровадження карантинів в зв'язку з загрозою

здоров'ю людей, також впливають на інтерес педагогів до ІТ-інструментів, за допомогою яких можна провести лекції, консультації, практичні роботи під час дистанційного навчання. Проаналізуємо можливості ІТ-інструментів для проведення вебінарів.

Основними функціями вебінарів є: демонстрація презентації, перегляд відео, групове спілкування (за наявності мікрофонів у учасників), онлайн дошки або білі дошки (white board), спільний простір для коментарів, малюнків всіх учасників, текстовий чат (спільний та для особистих повідомлень), віддалений доступ, дозволяє показати екран того, хто виступає; опитування та голосування для організації зворотнього зв'язку з аудиторією. Для проведення відеодзвінків та вебінарів можна використати велику кількість безкоштовних і платних інструментів.

Сучасні платформи для онлайн-конференцій: <https://zoom.us>; <https://hangouts.google.com>; <https://www.skype.com/uk/>; <https://products.office.com/uk-ua/microsoft-teams/group-chat-software>; <https://www.webex.com>; <https://bigbluebutton.org/>.

Інструменти взаємодії з учнями: <https://www.classdojo.com> (особливо рекомендовано для початкової школи); <https://classroom.google.com>; https://www.google.com/intl/ru_ua/docs/about/; <https://ru.padlet.com>.

Найпопулярніші серед тих, які найчастіше використовуються освітянами: Bigbluebutton, Zoom, Hangout, Youtube, Skype.

Big Blue Button та Zoom забезпечують обмін аудіо, відео, слайдами, чатом та екраном у режимі реального часу та дозволяють створити запис вебінару для подальшого перегляду.

Студенти або учні беруть участь у обміні значками смайлів, опитуваннях та можуть працювати на спільній онлайн дошці.

Перевагами Big Blue Button є безкоштовність та відсутність потреби його інсталяції на пристрої учасників, можливість налаштування україномовного інтерфейсу. Запис вебінару зберігається в обліковому записі того, хто ініціював її та доступна до перегляду за наявності дозволу автора. Для роботи з різними учнями можна використати різні кімнати з одним і тим самим доступом в різний час.

В безкоштовній версії Zoom педагог може використати 40 хвилин для 100 учасників на проведення вебінару, але кількість таких сесій не обмежена. Перевагою є можливість приєднатись до вебінару без додаткової реєстрації. За бажанням вчитель може інстальювати програму Zoom на пристрій і планувати та організувати вебінари з встановленого додатку.

Перевагою є і те, що всі онлайн зустрічі можна запланувати заздалегідь та запис завантажити на комп'ютер.

Сервіс Hangout для миттєвого обміну повідомленнями, безкоштовними відео та аудіо дзвінками використовується тими навчальними закладами, які активно запроваджують сервіси Google для дистанційного або змішаного навчання. Всі учасники повинні мати облікові записи Google для приєднання до відеоконференції. Кількість учасників обмежена.

На період карантину Google зняв попередні обмеження і запропонував освітнім закладам долучати до відеоконференцій до 250 учасників. При наявності облікового запису Google можна скористатись трансляцією Youtube та запланувати прямий ефір для обмеженої аудиторії або для загалу <https://support.google.com/youtube/answer/2853700?hl=ru>.

Вчителі які звикли використовувати для організації відеодзвінків Skype або Viber не мають можливості зберегти цю подію у вигляді відеофайлу. Skype для бізнесу, який входить в пакет Office 365 має додаткові функції щодо організації відеотрансляцій та їх запису.

Кожен із запропонованих ІТ-інструментів можна використати для візуалізації навчальних дистанційних занять, Biglbutton та Zoom також дозволяють організувати спілкування, співпрацю, опитування і тестування.

УДК 372.853.53

А. О. Пищаль,

А. М. Кух, д-р пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ВИКОРИСТАННЯ ПЕДАГОГІЧНИХ ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ У ОЗНАЙОМЛЕННІ УЧНІВ З ОСНОВАМИ ЕЛЕКТРОНІКИ

Одним із способів реалізації STEM-освіти є використання педагогічних програмних засобів. ППЗ «Початки електроніки» – мультимедійний застосунок, що є віртуальним електронним конструктором, який дозволяє збирати різноманітні електричні схеми пристроїв і спостерігати за режимом роботи будь-якого вузла схеми, знімаючи покази напруги і змінного струму, підключаючи відповідні прилади. «Початки електроніки» – безкоштовна програма-конструктор, для школярів і студентів, які тільки починають освоювати курс електроніки. У процесі своїх досліджень учень може користуватися сучасними вимірювальними приладами, моделювати роботу різних електричних схем та приладів.

Конструктор можна також використовувати в рамках його можливостей для постановки завдань у самостійній творчій роботі учнів.

Ця навчальна програма дозволяє досліджувати особливості роботи схем, а також виконати вимірювання електричних величин подібно до того, як це відбувається в реальному експерименті. Особливість конструктора – це максимальна реалістичність імітації реальних електричних процесів в наочному вигляді. Всі деталі на робочій поверхні конструктора наводяться в їх реальному вигляді. У процесі своїх досліджень учень може використовувати цифровий мультиметр і двоканальний осцилограф.

Програма «Початки Електроніки» дозволяє вивчити:

- закони паралельного та послідовного з'єднання котушок, провідників і конденсаторів;
- закони постійного струму – закон Ома для ділянки кола і закон Ома для повного кола;
- закони виділення теплової енергії в електронагрівальних та освітлювальних приладах, принципи узгодження джерел струму з навантаженням;
- залежності опору провідників від довжини, поперечного перерізу і питомого опору матеріалів;
- принципи застосування запобіжників в електронних схемах;
- принципи створення електричних фільтрів;
- досліджувати явище резонансу в ланцюгах з послідовним і паралельним коливальним контуром;
- освоїти принципи проведення вимірювань струму і напруги в електронних схемах за допомогою сучасних вимірювальних приладів (мультиметр, осцилограф);
- вимірювати ємнісні та індуктивні опори, їх залежність від частоти генератора змінного струму і номіналів деталей в ланцюгах змінного струму.

Створені схеми можна зберігати в спеціальний файл, щоб була можливість повернутися до побудованої схемою. Для користувачів пропонується довідник з формулами і законами, завдання для лабораторних робіт і докладний довідник для роботи з програмою.

Програма розроблена співробітниками Казахського Державного Національного Університету імені Аль-Фарабі під керівництвом доцента кафедри теплофізики та технічної фізики Кашкарова Володимира Васильовича. Перша версія конструктора «Початки Електроніки» побачила світ у 2000 році. Програмний комплекс «Початки Електроніки» розповсюджується безкоштовно і вільно. Додаток містить короткі правила роботи, довідкові матеріали, що стосуються електричного струму і елементів електричних ланцюгів, ряд лабораторних робіт для виконання. Крім того разом з конструктором поширюється безліч файлів з уже готовими схемами.

Програма представлена на двох мовах – російською та англійською.

Лабораторний комплекс «Початки Електроніки» не вимогливий до ресурсів комп'ютера і працює під управлінням операційної системи Microsoft Windows. Для підтримки аудіо ефектів необхідна звукова карта.

Отже, за допомогою ППЗ «Початки електроніки» можна розвинути в учні допитливість, гнучкість мислення, пам'ять, цілеспрямованість, вміння передбачати. Програма проста і зрозуміла у використанні завдяки графічному інтуїтивному інтерфейсу. З її допомогою можна за короткий час опанувати базовими знаннями з фізики, за темою «Електродинаміка» і реалізувати методи STEM-освіти.

Список використаних джерел:

1. Начала електроніки 1.2 – Электронный конструктор [Електронний ресурс]. – 2011. – Режим доступу до ресурсу: <http://www.ex.ua/12145929>.
2. Начала ЭЛЕКТРОНИКИ 1.2 [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу <http://www.softportal.com/software-12305-nachala-lektroniki.html>.
3. Програма для начинающих электронщиков [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://www.youtube.com/watch?v=IN622L71Fq8>.

УДК 517.5

Olena Radziewska*, PhD,
Iryna Kovalska**, PhD

*Kyiv National University of Food Technology, Kyiv,

**Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University,
Kamianets-Podilskyi

SOME MATHEMATICAL METHODS TO STUDY OF ECONOMIC MODELS

Introduction. The article discusses some mathematical methods of studying very important concepts for building economic models.

The concept of function and the concept of derivative are used to analyze the examples and tasks that characterize economic processes.

Results. The functional relationship between the quantities is identified as a kind of machine-converter with certain properties, and the derivative of the function is characterized as the rate of change of the studied processes under certain conditions.

The basic task of analyzing economic processes is to investigate the relationship of economic indicators, which are written in the form of functional dependence. For example, how will the income of the state be affected if the tax or import duties are changed? Will the revenue of the en-

terprise increase or decrease if the price of the goods increases? Functional dependencies between economic variables, which are then investigated by differential calculus, must be built to solve such problems. These tasks include the tasks of finding the maximum profit, minimum losses, optimal production output and size of purchases, etc.

To solve such problems, you need to use the concept of a derivative and illustrate in a specific example the importance of the influence of the differential calculus on the analysis of the economic situation. To do this, we can consider the following simplified model of choosing the optimal volume of production by a firm whose profit function looks like $P(x) = R(x) - C(x)$, where $R(x)$ – the firm's revenue, $C(x)$ – the firm's costs, x – the volume of production. Using the results of the study of the function and production capacity of the firm, it is necessary to determine recommendations for the strategy of the firm. An important area of application of differential calculus in economic processes is to introduce with it the concept of elasticity. The coefficient of elasticity shows the relative change in the studied economic indicator due to a single relative change in the economic factor on which it depends, with the invariance of other factors affecting it.

Conclusions. As we can see, the range of functions used in the theory that describes economic processes is quite wide: from linear and quadratic to functions of a special kind (demand, consumption and cost functions, Tornquist functions).

And the directions of application of differential calculus in economic processes are not counted at all. This is the introduction of the concept of elasticity and determination of optimal prices, marginal costs, the choice of the optimal volume of production, optimization of taxation of enterprises and more. And in all these tasks, the derivative characterizes the rate of change of the process under certain conditions.

References:

1. Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі : навч. посібник / М.В. Грисенко. – К. : Либідь, 2007. – 720 с.
2. Вища математика: Основні означення, приклади і задачі / за ред. Г.Л. Кулініча. – К. : Либідь, 1992.
3. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. – М. : ЮНИТИ, 1998.
4. Вища математика: у 2 кн. – 2-ге вид / за ред. Г.Л. Кулініча. – К. : Либідь, 2003.

О. Б. Розумовська

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ ПРОФЕСІЙНОГО РОЗВИТКУ ВЧИТЕЛІВ ІНФОРМАТИКИ В СИСТЕМІ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ ОСВІТИ

Сучасний етап розвитку людської цивілізації характеризується докорінними змінами на ринку праці. Зменшується потреба в робітниках для рутинних операцій, частина професій іде в небуття, виникає ряд нових професій, змінюються вимоги до компетентності фахівців різних галузей. Саме в цей час особливу роль набуває професія вчителя. І уроки історії, і оцінка сучасного стану речей вказує на те, що від рівня професіоналізму вчителів, їх готовності до інноваційної діяльності та неперервної освіти і самоосвіти залежить якість підготовки фахівців усіх галузей людської діяльності та рівень життя суспільства в цілому. Ця теза чітко визначена Концепцією розвитку педагогічної освіти: «На шляху розвитку інформаційного суспільства якісна освіта стає одним з головних чинників успіху, а педагог є одночасно і об'єктом, і провідником позитивних змін.» [2, с.2].

У цьому контексті педагоги різних рівнів освітніх закладів мають характеризуватися наступними рисами: професійною компетентністю; конкурентоспроможністю; творчим підходом до реалізації ідей; гнучким, креативним і критичним мисленням; володінням іноземними мовами та новими інформаційними технологіями; здатністю до ефективної самоосвіти та самовдосконалення впродовж життя.

Для підготовки педагога, який володітиме вказаними рисами, необхідні докорінні зміни не лише в передвищій і вищій освіті, а й реалізація парадигми навчання впродовж життя.

Для пошуку та реалізації шляхів впровадження в життя такої парадигми важливим моментом є аналіз актуальних проблем підготовки вчителя та подальшого вдосконалення його професіоналізму.

Першою проблемою на шляху професійного розвитку вчителя інформатики ми вбачаємо у відсутності якісного відбору молоді для педагогічної діяльності. Вчителями інформатики стають або ті, хто не зміг себе реалізувати як фахівець в галузі ІТ, або для кого це є додатковою спеціальністю.

Друга проблема виникає на етапі отримання передвищої та вищої освіти. Зміст педагогічної освіти не встигає за швидкими змінами реальної шкільної практики, збільшуючи відірваність між актуальни-

ми потребами сучасної школи та якістю підготовки вчителів загалом, і вчителів інформатики зокрема. Застарілі зміст та технології навчання в системі педагогічної освіти не забезпечують майбутніх вчителів інформатики інструментарієм для якісної професійної діяльності. Зокрема мова може йти і про відсутність в закладах освіти сучасного обладнання та відповідного програмного забезпечення.

Наступна проблема породжена особливістю такої дисципліни як інформатика. Зміни в програмному забезпеченні та технічних характеристиках пристроїв відбуваються настільки стрімко, що вчителю інформатики необхідне постійне оновлення навчального матеріалу.

Сьогоднішня система післядипломної освіти дуже багата на стереотипи минулого, і це значно гальмує удосконалення освітнього процесу. І з боку закладів післядипломної освіти, і з боку багатьох вчителів шкіл зберігається «викладацька модель» організації навчання. А підвищення кваліфікації раз на 5 років стало формальним елементом при атестації.

Наостанок, актуальною проблемою професійного зростання вчителів інформатики стає відсутність навичок організації ефективної самоосвіти та самовдосконалення.

Вирішення окреслених проблем ми вбачаємо у формуванні якісного контингенту здобувачів педагогічної освіти, реальному оновленні матеріально-технічної бази закладів освіти усіх рівнів, створенні освітнього середовища, навчання у якому носить випереджувальний характер, зміни форм і змісту підвищення кваліфікації педагогічних працівників, впровадження в життя різноманітних моделей професійного розвитку вчителів в системі післядипломної педагогічної освіти.

Список використаних джерел:

1. Воротникова І.П. Моделі професійного розвитку вчителя в умовах реформи післядипломної педагогічної освіти // Неперервна професійна освіта: теорія і практика (серія: педагогічні науки), випуск № 3-4 (56-57), 2018. С. 21-27
2. Концепція розвитку педагогічної освіти. Київ, 2018. URL: <https://mon.gov.ua/ua/npa/pro-zatverdzhennya-konceptsiyi-rozvitku-pedagogichnoyi-osviti>.
3. Олійник В.В. Професійне удосконалення науково-педагогічних працівників: проблеми та шляхи вирішення // Проблеми та перспективи формування національної гуманітарно-технічної еліти: зб. наук. пр. Харків : НТУ "ХПІ", 2010. Вип. 27 (31) : в 3 ч. Ч. 1. С. 88-97.
4. Порядок підвищення кваліфікації педагогічних і науково-педагогічних працівників. Київ, 2019. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/800-2019-%D0%BF#n114>.

О. А. Смалько, канд. пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

БЕЗПЛАТНІ ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ СТАТИСТИЧНОГО АНАЛІЗУ ДАНИХ

При вирішенні окремих завдань освітнього менеджменту час від часу доводиться проводити статистичний аналіз різноманітних даних. Функціональних можливостей поширених табличних процесорів інколи буває недостатньо, тому виникає потреба використання професійних програмних пакетів відповідного призначення.

На ринку комп'ютерних програм порівняно небагато засобів для проведення статистичного аналізу даних і дуже мало подібних безплатних рішень.

Програмний застосунок SciDAVis (Scientific Data Analysis and Visualization), що створений міжнародною командою розробників і поширюється за ліцензією GNUGPL, може працювати в операційних системах Linux, Microsoft Windows і macOS. Він призначений для аналізу наукових даних, їх візуалізації та підготовки до друку. В програму вбудовано засоби підрахунку базових статистичних показників. При цьому їх можна розраховувати як для таблиці в цілому, так і для стовпців або рядків таблиці.

Програма SciDAVis надає також функції для розрахунку кореляції, автокореляції, згортання. Має вона функції прямого і зворотного швидкого перетворення Фур'є та функції для роботи зі спектрами і сигналами. Апроксимація даних може здійснюватися як за допомогою функцій, що задаються користувачем, так і за допомогою вбудованого набору лінійних і нелінійних функцій апроксимації з використанням вільної багатоплатформної бібліотеки математичних підпрограм GNU Scientific Library.

За допомогою SciDAVis можна будувати різні типи 2D і 3D-графіків на основі даних, що імпортовані з ASCII файлів, введені вручну або обчислені за формулами. Ця програма поєднує простий та інтуїтивно зрозумілий інтерфейс з великими можливостями, такими, як можливість написання скриптів і створення власних модулів. Нова версія програми стала доступною у лютому місяці 2020 року.

Ще один вільно поширюваний (за ліцензією GNUGPL) програмний засіб PSPP (раніше він називався Fiasco) також призначений для статистичного опрацювання даних. Він має командний та графічний інтерфейс. Існують версії PSPP для операційних систем GNU, macOS, Microsoft Windows і Linux.

У програмі PSPP реалізовано широкий спектр інструментів статистичного аналізу, зокрема для обчислення частот, порівняння середніх (за t -критерієм Стьюдента та на основі однофакторного дисперсійного аналізу), для побудови лінійних і логістичних регресій, перепорядкування даних, для факторного та кластерного аналізу, для хі-квадрат-аналізу тощо. Щоправда, можливості графічного подання результатів опрацювання даних у цьому програмному засобі вельми обмежені. Останній раз програма PSPP оновлювалась у листопаді місяці 2018 року.

Розробники окремих повнофункціональних комерційних програмних продуктів, призначених для статистичного опрацювання даних, також пропонують користувачам деякі види безкоштовних ліцензій. Наприклад, ліцензію на безплатне використання програмного засобу StatPlus компанії AnalystSoft може отримати студент, аспірант, науковець чи викладач одним із таких способів: процитувати цю програму в письмовій роботі (у статті, тезах тощо), застосувати в курсі навчання чи допомогти розробникам з перекладом документації з англійської мови.

Програма StatPlus має простий і зрозумілий інтерфейс, забезпечує користувача можливостями для базового одновимірного та багатофакторного статистичного аналізу, а також для аналізу часових рядів, непараметричної статистики, статистичних діаграм, включаючи контрольні діаграми, і крім того підтримує якісне представлення опрацьованих даних.

Компанія SAS (Statistical Analysis Software) свій однойменний професійний програмний статистичний пакет, призначений для аналітичної роботи, надає у безкоштовний доступ для навчальних цілей через академічні програми SAS Analytics U та SAS On Demand for Academics. З 2014 року компанія пропонує усім бажаючим своє безплатне університетське видання, яке можна використовувати лише в некомерційних цілях. Розроблено також онлайн-версію SAS-програм, орієнтованих на реалізацію навчальних цілей.

Усі задачі, пов'язані зі статистичним аналізом різноманітних даних, зокрема, освітньої сфери можна успішно вирішувати, використовуючи функціональні можливості описаних програмних засобів.

В. П. Тагауров

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ СЕРВІСАМИ MS OFFICE 365

Питання адаптації і налаштування засобів та сервісів інформаційно-технологічного освітнього середовища з метою максимально-реалізувати педагогічний потенціал використання найсучасніших ІКТ, зокрема, хмарних, досягти поліпшення результатів навчання, а також удосконалення процесу науково-дослідної діяльності студентів, розвитку навичок спільної роботи, потребує запровадження інноваційних підходів. Ці підходи мають забезпечити найбільш доцільні способи організації доступу до програмного забезпечення навчального призначення, зокрема, на базі хмароорієнтованих підходів, що належать до провідних моделей інформаційно-технологічних рішень організації інфраструктури освітнього середовища, а також постають катализатором запровадження інноваційних методів і підходів в освітню практику.

Результати останніх досліджень свідчать, що використання хмарних сервісів в освітньому процесі закладів вищої освіти є актуальним предметом досліджень. Аналіз вітчизняного та міжнародного досвіду використання хмарних технологій в процесі навчання педагогічних дисциплін свідчить проте, що такий клас засобів навчання на основі ІКТ, як сервісів *Microsoft Office 365*, постійно привертає увагу дослідників [1, 2, 6].

Використання хмарних сервісів для вирішення практичних задач передбачає: розуміння проблем навчальної дисципліни для належного використання сервісів; розуміння методології розробки моделі до формулювання та вміння застосовувати її; та можливість здійснювати реалізацію та оцінювати складність алгоритму під час виконання.

Можливості використання *Microsoft Office 365* для вирішення задач пошуку, обробки, обміну, зберігання та представлення інформації досить широкі. Студент, використовуючи хмарні сервіси, вирішує поставлену перед ним задачу, і, таким чином, він не має психологічного бар'єру у застосуванні сучасних засобів ІКТ, а крім того, він також усвідомлює, які сервіси потрібно добрати для успішної реалізації проблеми. Рішення задач прикладного характеру за допомогою хмарних сервісів забезпечує можливість формування професійних компетентностей. Цікавим є також дослідження проблем органі-

зації командної групової (командної роботи), а саме забезпечення рівноправного доступу до завдання з можливістю одночасного його розв'язання. Це, у свою чергу, сприяє вдосконаленню навичок командної роботи.

Розроблена модель та методика використання сервісів *Office 365* була запроваджена в освітній процес на фізико-математичному факультеті Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Методику використання сервісів *Microsoft Office 365* як засобу навчання основ використання інформаційних технологій в освіті студентів закладів вищої освіти визначено як теоретично обґрунтовану систему мети, змісту, методів, засобів, форм використання сервісів *Microsoft Office 365* у навчанні даної дисципліни.

Для перевірки ефективності розробленої методики навчання було виконано порівняння навчальних досягнень студентів за рівнями підготовки та традиційною методикою та розробленою.

В ході експерименту було забезпечено дотримання всіх вимог щодо застосування статистичних методів опрацювання результатів дослідження: випадковий характер вибірок; однорідність та незалежність вибірок.

В результаті формувального етапу експерименту було побудовано гістограму порівняльного розподілу навчальних досягнень студентів за результатами підсумкового екзамену з дисципліни «Інформаційно-комунікаційні технології в освіті». Було отримано результати, що свідчили про підвищення загальних показників успішності з дисципліни в експериментальних групах – кількість студентів, які мали низьку кількість балів (1-39), знизилася з 15,09% до 8,36%; кількість тих, які мали середню кількість балів (40-74), знизилася з 56,34 до 43,61; кількість тих, які мали достатню кількість балів (75-89), підвищилася з 22,23% до 40,21%; кількість тих, які мали високу кількість балів, (90-100), підвищилася з 6,34% до 8,83%. Перевірку отриманих під час формувального експерименту вибірок було проведено за λ -критерієм Колмогорова-Смирнова. Емпіричне значення критерію $= 4,27$ лем p , тоді як табличне значення цього критерію $\lambda_{кр}(0,05) = 1,36$ для рівня значущості $\alpha = 0,05$, Емпіричне значення перевищує табличне, таким чином, з імовірністю 95 % можна стверджувати, що існує статистично значуща відмінність між рівнем навчальних досягнень в експериментальній і контрольній групах, зумовлена використанням розробленої методики [5, с.127].

Аналіз результатів експериментального випробування запропонованої методики використання сервісів *Microsoft Office 365* як засобу навчання основ інформаційних технологій в освіті показав, що рівень навчальних досягнень студентів в експериментальних групах

має статистично значущі відмінності у порівнянні з рівнем досягнень студентів в контрольних групах. На підставі цього можна дійти висновку, що зростання рівня було зумовлено саме застосуванням вказаної методики використання хмарних сервісів MS Office 365 для формування компетентностей студентів з дисципліни, що і підтверджує гіпотезу дослідження. Перспективою подальших досліджень є розроблення нових компонентів методики або окремих методик використання хмарних сервісів в аспекті формування освітнього середовища закладів вищої освіти.

Список використаних джерел:

1. Вакалюк Т.А. Модель хмаро орієнтованої системи підтримки навчання бакалаврів інформатики. Інформаційні технології і засоби навчання, 2016. № 6 (56). С. 64-76. <http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/1415/1098>
2. Литвинова С.Г. Проектування хмаро орієнтованого навчального середовища загальноосвітнього навчального закладу : монографія. Київ : Компринт, 2016. 354 с.
3. Литвинова С.Г., Спирін О.М., Анікіна Л.П. Хмарні сервіси Office 365. Київ. : Компринт, 2015. 170 с.
4. Татауров В.П., Чевська К.С. Використання сервісів для організації освітньо-інформаційного середовища студентів ІТ спеціальностей. Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія педагогічна, 2018. Вип. 24: С. 120-124.
5. Татауров В.П., Шишкіна М.П. Використання сервісів Microsoft Office 365 у процесі навчання дисципліни «Інформаційні технології в освіті» у закладі вищої педагогічної освіти. Фізико-математична освіта. 2019. Випуск 4(22). С. 124-129.
6. Arpacı Ibrahim. Antecedents and consequences of cloud computing adoption in education to achieve knowledge management. Computers in Human Behavior, 2017. Vol.70. Pp. 382-390.

УДК 004.62

С. Г. Удовенко*, д-р техн. наук,

Л. Е. Чала**, канд. техн. наук,

Д. В. Водяницький**

* Харківський національний економічний університет

ім. С. Кузнеця, м. Харків,

** Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

КОНТЕНТ-АНАЛІЗ САЙТІВ ЗАКЛАДІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДІВ ТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Для найкращого представництва закладів вищої освіти (ЗВО) у міжнародних рейтингах необхідно організувати інформацію на сайті ЗВО таким чином, щоб пошукові системи рейтингових агентств могли легко знаходити актуальну інформацію. Відзначимо, що рейтинг формуються за різними показниками та критеріями, тому необхідним є створення максимально зручної структури веб-сайтів ЗВО. Наприклад, рейтинг кращих університетів світового значення за версією британського видання Times Higher Education (THE) включає так званий рейтинг впливу університетів University Impact Rankings, що вимірює успіхи університетів світу в досягненні цілей ООН у галузі сталого розвитку. В ньому використано відкалібровані індикатори для всебічного та збалансованого порівняння. Для участі у цьому рейтингу університет мусить мати активності з виконання задач для досягнення цілей сталого розвитку (ЦСР). THE University Impact Rankings потребує доказів проведення активностей, які мають бути розміщені на сайті університету. Доцільно створити окремий розділ на сайті, щоб відобразити досягнення університету у даному напрямку. Такий розділ має періодично наповнюватися записами про події та заходи відповідної направленості. Але на сайтах університетів та на окремих сайтах кафедр щоденно з'являється чимало новин, які можуть стосуватися тематик ЦСР, але не завжди їх зв'язок з ЦСР вдається відстежити в онлайн режимі. Тому актуальною є задача автоматичного аналізу контенту сайту університету та сайтів кафедр з метою класифікації новин, записів та текстово-графічних фрагментів сторінок за конкретними темами.

В доповіді пропонується вирішення цієї задачі з використанням сучасних методів тематичного моделювання, до яких, насамперед, належать методи ймовірнісного латентно-семантичного індексування (Probabilistic Latent Semantic Indexing, – PLSI) [1, с.77-84]. Латентно-семантичні методи тематичного моделювання дозволяють здійснювати

автоматичну категоризацію документів сайту, засновану на близькості їх концептуального змісту. Слід відзначити їх незалежність від мови, що є важливим для аналізу мультимовних веб-сайтів ЗВО. В PLSI використовується аспектна модель, яка пов'язує приховані змінні кожної з аналізованих тем зі змінними, що спостерігаються в текстах (словами або документами). Таким чином, кожен документ може стосуватися кількох тем з певною ймовірністю, що є відмінною рисою цієї моделі в порівнянні з детермінованими підходами до тематичного моделювання. Недоліком застосування базової моделі PLSI є зниження швидкості обчислення при збільшенні обсягу вхідних даних, адже кількість параметрів цієї моделі зростає в лінійній залежності від числа документів сайту. Як наслідок, ця модель схильна до перенавчання і неефективна для великих наборів даних. Запропонований в доповіді гібридний підхід оснований на модифікації базового методу PLSI та передбачає реалізацію наступних етапів: на першому етапі формується семантичне ядро для пошуку контенту згідно з критерієм актуальності щодо основних тематик ЦСР; на другому етапі здійснюється вибір оптимальної кількості тематик, пов'язаних з ЦСР, для побудови тематичної моделі для сайту ЗВО за методикою послідовної регуляризації складових тематичної моделі, запропонованою в [2, с.8-15]; на третьому етапі формується графічна модель семантичного ядра з використанням алгебраїчного методу VSM (Vector Space Model).

Гібридний метод має ряд переваг над базовим методом PLSI, а саме: високу якість визначення тематики, до якої належить документ при великому розмірі аналізованих текстів; можливість оперативно визначити ймовірність віднесення аналізованих документів до кожної з представлених тем. В програмній реалізації методу використано бібліотеку Topic Modeling Tool (code.google.com/p/topic-modeling-tool/), що спрощує реалізацію методів тематичного моделювання за допомогою графічного інтерфейсу. Тестування методу на прикладі тематичного моделювання контенту сайту Харківського національного університету радіоелектроніки підтвердило перспективність його використання для підвищення рейтингових показників.

Список використаних джерел:

1. Blei D. Introduction to Probabilistic Topic Models / D. Blei // *Comm. ACM.* – 2012. – vol. 4, no.55.
2. Krasnov F. Evaluation of Optimal Number of Topics of Topic Model: An Approach Based on the Quality of Clusters / F. Krasnov // *International Journal of Open Information Technologies.* – 2019. – vol. 7, no.2.

Т. А. Федорчук

Кам'янець-Подільська загальноосвітня школа
I-III ступенів №10, м. Кам'янець-Подільський

МОДЕЛЮВАННЯ ЯК ЗАСІБ РОЗВИТКУ ТЕОРЕТИЧНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ ПОЧАТКОВИХ КЛАСІВ

Як показує практика, досить часто в учнів початкових класів виникають проблеми при розв'язуванні текстових задач на уроках математики, а саме – несприйняття умови задачі. Вони не усвідомлюють, не можуть уявити собі життєвої ситуації, відображеної в задачі, не співставляють відношення між величинами в ній, залежність між даними і шуканими величинами, а тому – механічно маніпулюють числами.

Учням необхідно уявити та зрозуміти: «про що саме ця задача?», «що в ній відомо?», «про що потрібно дізнатись?», «як пов'язані між собою дані величини?», виявити зв'язок між даними і шуканими величинами, розділивши її на смислові блоки.

У доповіді розглядається питання розв'язування текстових задач шляхом моделювання, а саме: способи моделювання відношень, які в умовах задач подані у вигляді різноманітних схем, і знаходження на схемі рівних (однакових) величин.

Замінивши дії з реальними предметами діями з їх зменшеними зразками, моделями, макетами, а також графічними зображеннями (рисунок, кресленням, схемою), учні навчаються креслити (будувати) математичні моделі та «читати» їх [2]. При цьому реальні предмети (люди, тварини, рослини, механізми тощо) можуть мати умовне позначення (квадрати, кружечки, прямокутники, відрізки тощо).

Крім того, використання моделей для розв'язування математичних задач сприяє розвитку пізнавальних процесів учнів, а саме: пам'яті, логічного мислення, креативного мислення, творчої уяви.

Наочність, особливо графічна, є важливим засобом розвитку теоретичного мислення і формування математичних понять [1].

Модель дозволяє учням наочно представити умову задачі, що полегшує складання рівнянь або ж одразу визначити невідоме. Побудувавши графічну модель, учні можуть одразу знайти відповідь чи скласти рівняння, яке потім розв'язується.

Рисунки, схеми і креслення допомагають учням свідомо встановлювати залежність між величинами, активно мислити, шукати раціональні шляхи розв'язування задач.

Учні не розв'язують задачі арифметичними діями. Розв'язок записується або виразом, або знаходиться з рівняння, яке отримується з гра-

фічної схеми. Текст задачі потрібно зобразити графічно і навпаки, – графічна модель може слугувати опорою для складання тексту задачі.

Схема до задачі, складена учнем, насправді буде моделлю. Зауважимо, що на схемі відсутні найменування, і це дає змогу розв'язати не лише дану задачу, але й низку задач, які можуть відрізнятися одна від одної сюжетами, величинами, числовими чи буквенними даними, зберігаючи відношення між величинами.

Моделювання – це засіб виділення відношень величин при аналізі умов конкретних задач, а графічна чи буквенно-знакова модель – це засіб фіксації даних відношень [1].

Таким чином, ми можемо стверджувати, що використання моделей учнями при розв'язуванні текстових задач викликає певні труднощі. Проте вони визначаються не абстрактністю самої моделі, а відображенням сутності зазначених об'єктів і відношенням між ними.

Засвоєння різних видів моделей дає змогу вибрати потрібну або перейти від однієї моделі до іншої. Це дає змогу учням розв'язувати завдання самостійно. Також моделювання дозволяє формувати наукові поняття і способи оперування ними, що полегшує подальше навчання, стимулює та активізує пізнавальні процеси.

Список використаних джерел:

1. Дусаविцкий А.К. Развивающее образование: теория и практика. Харьков: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2002. 116 с.
2. Паламарчук В. Ф. Першооснови педагогічної інноватики. Київ: Знання України, 2005. 417 с.

ЗМІСТ

Секція 1. Методи моделювання та прогнозування динамічних процесів

<i>Андрейцев А. Ю., Клецька Т. С., Смирнов І. В., Чорний А. В.</i> Аналітичне визначення швидкості частинки порошку під час сфероїдизації в плазмовому потоці	3
<i>Вартамян В. М., Дронова-Вартамян І. В.</i> Використання лінійної нормованої діаграми для аналізу стратегічних зон господарювання	5
<i>Глухов Ю. П.</i> Об одной динамической задаче для сжимаемого полупространства с начальными напряжениями	7
<i>Довгай В. В.</i> Оцінка низурозв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку	9
<i>Ivohin E. V., Adzhubey L. T., Naumenko Yu. O.</i> Some Diffusion Hybrid Models of Information Distribution Processes Dynamics	11
<i>Клевчук І. І., Гритчук М. В.</i> Побудова областей стійкості лінійних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями	13
<i>Ключка К. М., Протасов С. Ю.</i> Формування інтегральних рівнянь електричних кіл зі структурою, що змінюється	15
<i>Kuduk G.</i> Problem with Integral Conditions for System of Evolution Equations	17
<i>Ломовой В. І., Павленко В. Д.</i> Метод ідентифікації нелінійної системи на основі моделі Вольтерри із застосуванням тестових полігармонічних сигналів	18
<i>Осипова О. В., Перцов А. С., Черевко І. М.</i> Про розщеплення та декомпозицію лінійних сингулярно збурених багатотемпових систем	20
<i>Прокофьева Л. Л., Соболев Д. О.</i> Особливості математичного моделювання фронтального просування та міжфазових переходів у газо-нафтових сумішах	22
<i>Symotyuk M. M., Kuduk G.</i> Nonlocal-Integral Problem for Partial Differential Equations of Second Order	24

Секція 2. Математичне та комп'ютерне моделювання у прикладних задачах

Бак С. М.

Про існування біжучих хвиль в системах типу
Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці 25
Verlan Andriy

Adaptation Approach to Mathematical Modeling of Processes
in Computer-Integrated Technical Systems 27
Верлань А. Ф., Дячук О. А., Фуртат Ю. О.

Наближений аналіз процесів
в нестационарних вимірювальних перетворювачах 29
Ведерніков Д. А., Палагіна О. А., Палагін В. В.

Математичне моделювання оцінювання
параметрів сигналів на фоні негаусових корельованих завад 30
Власюк А. П., Красюк Б. В.

Математичне і комп'ютерне моделювання міграційних
процесів народонаселення в криволінійній області 32
Власюк А. П., Ільків І. В.

Чисельне моделювання взаємозв'язаних процесів волого-тепло-
масопереносу в ґрунті при наявності вертикального дренажу 33
Власюк А. П., Огійчук В. О.

Математичне і комп'ютерне моделювання контура
ґрунтового зволоження при мікрозрошенні 35
Власюк А. П., Жуковська Н. А.,

Жуковський В. В., Музичко І. О., Баїманова О. К.
Про одну задачу моделювання нестационарних
деформаційних процесів багатопарового
ґрунтового масиву з урахуванням тепломасоперенесення 37

Власюк А. П., Жуковський В. В., Жуковська Н. А., Єфімчук В. В.
Математичне і комп'ютерне моделювання міграції
радіонуклідів у ненасиченому каталітичному
пористому середовищі у двовимірному випадку 39

Гаюк І. М., Дорош А. Б., Піддубна Л. А.
Моделювання нелінійних крайових задач із запізненням 41
Громик А. П., Конет І. М., Пилипюк Т. М.

Параболічні крайові задачі в напівобмежених кусково-однорідних
клиновидних циліндрично-кругових середовищах 43
Двірна О. А.

Використання ґрид графів множин евклідових комбінаторних
конфігурацій для розв'язування оптимізаційних задач 45

<i>Іванюк В. А.</i>	
Методи та засоби математичного моделювання динамічних процесів в керованих технічних системах на основі одновимірних поліноміальних інтегральних моделей Вольтерри.....	47
<i>Іліка С. А., Тузик І. І., Черевко І. М.</i>	
Апроксимація лінійних диференціально-функціональних рівнянь та неасимптотичних коренів їх квазіполіномів	49
<i>Karimov M. M., Gulomov Sh. R., Khamdamova S. M.</i>	
Modeling the One-Way Network Packet Delay	51
<i>Каюмов Ш., Сагатов М. В.</i>	
Математические модели и алгоритмы решения трехмерной задачи вытеснения флюидов	53
<i>Мороз В., Вакарчук А.</i>	
Дослідження впливу числових інтеграторів на поведінку цифрових систем	55
<i>Павленко В. Д., Шаманіна Т. В.</i>	
Побудова моделі Вольтерри ОКО-рухової системи на основі даних айтрекінгу	57
<i>Понеділок В. В., Грищук В. А.</i>	
Розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри методом колокацій	59
<i>Рудковський О. В., Положаєнко С. А.</i>	
Математичні моделі нетяглового рухомого складу залізниці та стану вантажів, що транспортуються нею.....	62
<i>Saucedo-Zendejo F. R.</i>	
Meshfree Mathematical Modeling and Computer Simulation of Mould Filling Processes	64
<i>Семенова Н. В., Колечкін В. О.</i>	
Багатокритеріальні моделі комбінаторної оптимізації та їх застосування для захисту інформаційних мереж.....	70
<i>Ситник О. О., Протасов С. Ю., Ключка К. М.</i>	
Перетворення динамічних моделей вимірювальних перетворювачів з розподіленими параметрами.....	72
<i>Семенова Н. В., Чайка Д. О., Мановицька Д. О.</i>	
Багатокритеріальна модель визначення складу енергогенеруючих об'єктів регіону	74
<i>Сторожук Є. А., Чернишенко І. С., Піголь О. В.</i>	
Математичне моделювання пружнопластичного деформування еліптичної циліндричної оболонки, ослабленої круговим отвором ...	76
<i>Федорчук В. А.</i>	
Комп'ютерне моделювання нелінійних одновимірних об'єктів з розподіленими параметрами.....	78

<i>Chornyy R. O., Kinash O. M.</i> Insurance Rate in Case of Large Payments.....	80
<i>Щирба В. С., Фуртель О. В.</i> Дослідження моделі оптимальної траєкторії ракети з вимогою маскування точки старту	81

**Секція 3. Моделювання і оптимізація керованих процесів.
Системний аналіз і прийняття рішень.
Питання оптимізації обчислень**

<i>Бейко І. В.</i> Методи розв'язуючих операторів для комплексного моделювання і оптимізації керованих систем в умовах неповних даних.....	82
<i>Бейко І. В., Десницький О. М.</i> Задачі і алгоритми швидкодії та переслідування	83
<i>Бейко І. В., Щирба В. С., Фуртель О. В.</i> Побудова опорних траєкторій керованої системи за оптимізованими траєкторіями підсистем	84
<i>Бейко І. В., Фуртель О. В.</i> До побудови градієнтних алгоритмів оптимізації процесів з розподіленими параметрами.....	85
<i>Бейко І. В., Бейко Т. І., Бейко Т. І.</i> Задачі оптимального керування у великому тенісі	86
<i>Ведель Я. И., Голубева Е. Н., Семёнов В. В.</i> Адаптивный экстрапроксимальный метод для задачи о равновесии в пространствах Адамара.....	87
<i>Kovalenko Oleksii, Kosolapov Vladimir</i> Optimization of Loading of a Network of Distributed Situational Centers	89
<i>Колечкіна Л. М., Кильник В. В.</i> Моделі комбінаторної оптимізації та їх застосування для розв'язування проблем сьогодення	91
<i>Колечкіна Л. М., Ховбень С. В.</i> Побудова математичної моделі на комбінаторній конфігурації перестановок для оптимізації інформаційних систем	94
<i>Литвин О. М., Литвин О. О., Ткаченко О. В., Білобородов А. А.</i> Оптимізація вибору параметрів в узагальненій формулі Даламбера для функції двох змінних	96
<i>Семенова Н. В., Ломага М. М.</i> Стохастичні задачі лексикографічної оптимізації	99
<i>Слободянюк О. В., Бараннік В. В., Бараннік В. В., Бабенко В. Н.</i> Розробка алгоритму перевірки веб ресурсів на стійкість до кібератак.....	100

Чабанюк Я., Хімка У., Кошів О.

Задача знаходження координат безпілотних літальних апаратів з використанням розширеного фільтра Калмана 102

Секція 4. Інформаційні технології в освіті

Андруховський А. Б.

Особливості використання технології Omr для підготовки бланкового тестування 104

Бейко І. В.

Підвищення якості комп'ютеризованого навчання із поглибленням знань на основі експериментів 106

Кух А. М., Кух О. М.

Цифрова компетентність та задачі її формування 107

Кух О. М., Кух А. М.

Інформаційна культура студентів та процес її формування 109

Лисецький Ю. М., Каревина Н. П.

Кластерные системы хранения образовательных и научных данных на базе Hitachi Global Active Device 111

Моцик Р. В.

Використання ІТ-інструментів для візуалізації навчальних дистанційних занять 114

Пицаль А. О., Кух А. М.

Використання педагогічних програмних засобів у ознайомленні учнів з основами електроніки 116

Radzievska Olena , Kovalska Iryna

Some Matematical Methods to Study of Economic Models 118

Розумовська О. Б.

Актуальні проблеми професійного розвитку вчителів інформатики в системі післядипломної освіти 120

Смалько О. А.

Безплатні програмні засоби статистичного аналізу даних 122

Татауров В. П.

Забезпечення дистанційного навчання сервісами MS Office 365 124

Удовенко С. Г., Чала Л. Е., Водяницький Д. В.

Контент-аналіз сайтів закладів вищої освіти з використанням методів тематичного моделювання 127

Федорчук Т. А.

Моделювання як засіб розвитку теоретичного мислення учнів початкових класів 129

Міністерство освіти і науки України Національна академія наук України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Norwegian University of Science and Technology (Gjøvik, Norway)
Lublin University of Technology (Lublin, Poland)
Tashkent State Technical University named
after Islam Karimov (Tashkent, Uzbekistan)
Okan University (Istanbul, Turkey)

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ, ПРОГНОЗУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

9-ї Міжнародної наукової конференції

Підписано до друку 12.05.2020 р. Гарнітура «Таймс».
Папір офсетний. Друк різнографічний.
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 7,9. Обл.-вид. арк. 9,2.
Тираж 100. Зам. № 895.

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Надруковано в Кам'янець-Подільському національному
університеті імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.