

Міністерство освіти і науки України  
Національна академія наук України  
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка  
Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України  
Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. С. Пухова НАН України  
Національний технічний університет України  
Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського  
OKAN University (Istanbul, Turkey)  
Norwegian University of Science and Technology (Gjøvik, Norway)  
Lublin University of Technology (Lublin, Poland)  
Tashkent State Technical University  
named after Islam Karimov (Tashkent, Uzbekistan)



## СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ, ПРОГНОЗУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ



ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ  
8-ї Міжнародної наукової конференції,  
присвяченої 100-річчю Національної академії наук України  
та 100-річчю Кам'янець-Подільського національного  
університету імені Івана Огієнка

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка  
2018

Друкується згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, протокол № 3 від 29 березня 2018 року.

**Редакційна колегія:**

**І. М. Конет**, д. ф-м. н., професор (голова);  
**В. С. Щирба**, к. ф.-м. н., професор (заступник голови);  
**П. С. Атаманчук**, д. пед. н., професор;  
**І. В. Бейко**, д. т. н., професор;  
**А. Ф. Верлань**, д. т. н., професор, член-кор. НАПН України;  
**В. В. Мендерецький**, д. пед. н., професор;  
**Ю. В. Теплінський**, д. ф-м. н., професор;  
**В. А. Федорчук**, д. т. н., професор.

**Відповідальні секретарі:**

**В. А. Іванюк**, к. т. н., доцент;  
**О. О. Макаревич**, провідний фахівець.

**С91 Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації** : тези доповідей 8-ї Міжнародної наукової конференції, присвяченої 100-річчю Національної академії наук України та 100-річчю Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. — 160 с.

У збірнику друкуються нові результати досліджень з проблем математичного моделювання, прогнозування та оптимізації.

Для наукових та науково-педагогічних працівників, докторантів, здобувачів, аспірантів і студентів вищих навчальних закладів.

ББК 22.18+22.19

UDC 519.21

**Ya. M. Chabanyuk\***, Dr. Sc. (Phys.-Math),

**U. T. Khimka\*\***, Ph.D.,

**I. S. Budz\*\***

\* Lublin University of Technology, Lublin,

\*\* Lviv Polytechnic National University, Lviv

### THE REAL PROPERTY MARKET WITH SEMI-MARKOV SWITCHING

In this paper consider the financial market model with regard stochastic volatility. In well-known models the dependence of volatility from time describes the real behavior of the system only on local intervals. That's why, consider the system of two equations that describes the real property market. Then the first equations is determine by the stochastic differential equation [1]:

$$\frac{ds}{s} = -\mu(t, x)dt + \sigma(t, x)dw_t, \quad (1)$$

where  $s$  – asset rate and the function  $\mu$  (the share price taking into account dividend payments) and function  $\sigma$  (the historical volatility taking into account not normal distribution) depend on two components:  $t$  – time,  $x$  – Semi-Markov process[2],  $w_t$  – standard Wiener process. The second equation for stochastic volatility have a representation:

$$d\sigma = a(\sigma, x)dt + b(\sigma, x)dw_t, \quad (2)$$

where  $x(t)$  – uniformly ergodic Semi-Markov process with generating operator  $Q$  in standart phase state space  $(X, \Theta)$  with stationary distribution  $\pi(B)$ ,  $B \in \Theta$ . The solution of equation (2) is converge to solution of corresponding averaged equation over the second component  $x$ . Then conditions of convergence in the terms of existence Lyapunov function were received [3].

#### References:

1. Кінаш А.В. Асимптотична дисипативність дифузійного процесу/ А.В. Кінаш, Я.М. Чабанюк, У.Т. Хімка // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія фізико-математичні науки : збірник наук. праць / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова, Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка. – 2014. – Вип. 11. – С. 77-87.
2. Кукурба В.Р. Непрерывная процедура стохастической оптимизации с полумарковскими переключениями в схеме диффузионной аппроксимации / В.Р. Кукурба, Я.М. Чабанюк // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – Том 49, № 6. – С. 92-100.

3. Rosa W. Compensating operator diffusion process with variable diffusion in semi-Markov space / W. Rosa, Ya.M. Chabanyuk, U.T. Khimka // XLV Ogólnopolska konferencja zastosowań matematyki. Zakopane-Kościelisko, 6-13.IX.2016. – S. 9.

UDK 004.94

**Sh. Kayumov**, Ph. D.,  
**S. M. Sagatova**

Tashkent State Technical University, Tashkent

### A DIFFERENT METHOD OF SOLVING THE SECOND BOUNDARY VALUE PROBLEM OF PARABOLIC TYPE EQUATIONS

It is known that the problems of the theory of fluid filtration in porous media are described by differential equations with the corresponding initial and boundary conditions.

Carrying out transformations of these equations under certain conditions and assumptions over variables and parameters, the problem can be reduced to second-order nonlinear differential equations [1]

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \left( \frac{\alpha}{\xi} + \frac{\xi}{4\sqrt{u}} \right) \cdot \frac{du}{d\xi} = 0, \quad \xi \in D, \quad (1)$$

with boundary conditions

$$\xi^\alpha \frac{du}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = q_*, \quad (2)$$

$$U \Big|_{\xi=\bar{\xi}} = \Phi(\bar{\xi}), \quad (3)$$

where

$$0 \leq \underline{u} \leq u \leq \bar{u} < \infty \quad D_1 = \{\xi; 0 \leq \xi \leq \bar{\xi} = l(t)\}.$$

We introduce in a grid  $D$   $\bar{\omega}_h = \{\xi_i = ih : i = 0, 1, \dots, N\}$  with steps  $h = \frac{l(t)}{N}$ .

We denote the  $y_i$  – value of the grid function  $y$  at the point  $\xi_i$  defined on  $\omega_h$ . We replace the derivative  $\frac{du}{d\xi}$  by the central difference approximation,

and  $\frac{d^2 u}{d\xi^2}$  – the second difference derivative:

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = y_{\xi},$$

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{2h} = y_{\xi\xi}.$$

Substituting them into (1), we have

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \left( \frac{\alpha}{ih} + \frac{ih}{8\sqrt{y_{i-1}}} \right) \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad (4)$$

the boundary conditions (2), (3) are approximated exactly

$$h^\alpha \cdot \frac{y_1 - y_0}{h} = q_0, \quad (5)$$

$$y_N = \Phi(\bar{\xi}), \quad (6)$$

where  $\bar{\xi} = \text{const}$   $\bar{y}_{i-1} \approx \bar{U}(\bar{\xi}_{i-1})$  is a known value.

Thus, the solution of problem (1)-(3) reduces to the solution of the grid equations (4)-(6). Equation (4) is written for a set of points  $\xi_i, i = 1, 2, \dots, N-1$ , called internal nodes, and is denoted as  $\omega_h$ .

The boundary conditions (5)-(6) are reflected in the boundary nodes of the grid in the form  $\bar{\omega}_h$ .

To determine the value of  $y_i \approx U(\xi_i)$ , we obtain a system of algebraic equations

$$A_i \cdot y_{i-1} - C_i \cdot y_i + B_i \cdot y_{i+1} = 0, \quad (7)$$

$$y_0 = q_0 \cdot h^{1-\alpha} + y_1 = \bar{Q}, \quad (8)$$

$$y_N = \Phi(\bar{\xi}), \quad (9)$$

where

$$A_i = 1 - \frac{\alpha}{2i} - \frac{ih^2}{8\sqrt{y_{i-1}}}, \quad C_i = 2, \quad B_i = 1 + \frac{\alpha}{2i} + \frac{ih^2}{8\sqrt{y_{i-1}}}.$$

The solution of the system (7)-(9) is found by the sweep method [2]. It is easy to verify that equation (7) satisfies the maximum principle [3] under the following conditions:

$$B > 0 \text{ on condition } h < \sqrt{\max |k_1|}, \quad |k_1| = \left| \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{2i}\right) \cdot 8\sqrt{y_{i-1}}}{i} \right|,$$

$$A > 0 \text{ on condition } h < \sqrt{\max k_2}, \quad k_2 = \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{2i}\right) \cdot 8\sqrt{y_{i-1}}}{i}.$$

Thus,  $h < \max(k_1, k_2)$ ,

$$D_i = C_i - A_i - B_i + \varepsilon \geq 0, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1.$$

Now we turn to the determination of the error in the approximation of scheme (4). To answer the question of the accuracy of the scheme, we need to compare the solution  $y = y_i$  of problems (4)-(6) with the solution

$u = u(\xi)$  of problems (1)-(3), since  $d$  is a continuous solution of problems (1)-(3), and setting  $u_i = u(\xi_i)$ , we consider the differences  $z_i = y_i - u_i$ . For the grid function, we choose some norm  $\|z\|_c = \max_{0 \leq i \leq N} |z_i|$ .

Denoting, we rewrite problem (4) -(6) in the view

$$\left. \begin{aligned} Y_{\bar{\xi}\bar{\xi}} + F Y_{\xi^{\circ}} &= 0, \quad \xi \in \omega_n, \\ h^{\alpha} \cdot Y_{\bar{\xi}} \Big|_{\xi=0} &= q_0, \\ Y_N &= \Phi(\bar{\xi}), \end{aligned} \right\} \text{ I}$$

where

$$F_i = \left( \frac{\alpha}{ih} + \frac{ih}{8\sqrt{y_{i-1}}} \right).$$

We find the conditions defining  $z = Y - u$ . Substituting  $Y = u + z$  in I and considering U it as a given function, we obtain for the z-problem:

$$\left. \begin{aligned} z_{\bar{\xi}\bar{\xi}} + F z_{\xi^{\circ}} &= \Psi, \quad \xi \in \omega_n, \\ h^{\alpha} \cdot z_{\bar{\xi}} \Big|_{\xi=0} &= -\mu_1, \\ z_N &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ II}$$

where

$$\Psi = -U_{\bar{\xi}\bar{\xi}} - F U_{\xi^{\circ}}, \quad (10)$$

the error of approximation scheme I for solving  $U = U(\xi)$  of equation (1).

Similarly

$$\mu_1 = -q_0 + h^{\alpha} \cdot U_{\bar{\xi}} \Big|_{\xi=0}, \quad (11)$$

is an error in the approximation of scheme II. Assuming that  $U(\xi) = U$  has the required number of derivatives with respect to  $x$  and  $t$ , we expand  $U = U(\xi)$  by Taylor's formulas in a neighborhood of the point  $\xi_i$

$$U(\xi \pm 1) = U(\xi) \pm hU'(\xi) + \frac{h^2}{2!}U''(\xi) \pm \frac{h^3}{3!}U'''(\xi) + \frac{h^4}{4!}U^{IV}(\xi) + 0(h^5).$$

Then

$$\begin{aligned} U_{\bar{\xi}\bar{\xi}} &= U''(\xi) + \frac{h^2}{12}U^{IV}(\xi) + 0(h^4), \\ U_{\xi^{\circ}} &= U'(\xi) + \frac{h^2}{3}U'''(\xi) + 0(h^4). \end{aligned}$$

Taking this into account from (10), we have

$$\Psi = - \left( (U''(\xi) + FU'(\xi)) + \frac{h^2}{3} \left( FU'''(\xi) + \frac{1}{4}U^{IV}(\xi) \right) \right) + 0(h^4). \quad (12)$$

Expanding  $U(\xi)$  in the neighborhood of the node  $\xi = 0$

$$U_1 = U_0 + hU'_0 + \frac{h^2}{2}U''_0 + O(h^3), \quad U_0 = U(0).$$

We find

$$U_{\bar{\xi}0} = U'_0 + 0,5hU''_0 + O(h^2). \quad (13)$$

Taking (13) into account, from (11) we have

$$\mu_1 = h^2U'_0 - q_0 + h^2(0,5 \cdot h \cdot U''_0 + O(h^2)), \quad (14)$$

as

$$h^\alpha U'_0 - q_0 = 0, \text{ то } \mu_1 = O(h). \quad (15)$$

Refining the condition (14) so that the order of approximation is  $O(h^2)$ .

We use  $U(\xi)$  as the path to the solution of the original problem.

From the differential equation we find  $U''(\xi)|_{\xi=0}$  then

$$U''_{\xi}|_{\xi=0} = -FU'|_{\xi=0}. \quad (16)$$

Substituting (16) into (13), we obtain:

$$U_{\bar{\xi},0} + h^\alpha \cdot 0,5 \cdot h \cdot F \cdot U'|_{\xi=0} = U'_0 + O(h^2) \quad (17)$$

Hence the expression on the left-hand side of (17) approximates the derivative  $U'(\xi)$  at the point  $\xi = 0$  on the solution of the equation  $U'' + FU' = 0$  with the second order.

Since  $U = U(\xi)$  is a solution of equation (1), the expression in the first bracket (12) is zero.

Denoting

$$\max(U''(\xi) \cdot U'^v(\xi)) = M,$$

we have  $\|\psi\| \leq M O(h^2)$ , i.e. scheme I has the order of approximation  $O(h^2)$  [4].

If only (15) is taken into account, then the scheme has the order of approximation  $O(h)$ .

One can obtain an a priori estimate [4] using the following theorem.

Theorem. Suppose that the following conditions are satisfied  $A_i > 0$ ,  $B_i > 0$ ,  $C_i > 0$ ,  $D_i \geq 0$ , in addition  $F_i \equiv 0$ .

Then the estimate

$$\begin{aligned} |y_i| &\leq \max\{|Q|, |\Phi(\bar{\xi})|\}, \\ \|U\|_c &\leq \max\{|\mu_1|, |\mu_2|\}. \end{aligned}$$

Thus, the stability of the scheme is investigated with respect to the initial data, i.e. an a priori estimate is obtained.

## References:

1. Kayumov Sh. Mathematical modeling the problems of the theory of filtration with free boundaries / Sh. Kayumov. – Tashkent: TSTU, 2017. – 273 p.
2. Samarsky A.A. Tasks and exercises on numerical methods Moscow State University / A.A. Samarsky. – M., 2002. – 208 p.
3. Samarsky A.A. The theory of difference schemes / A.A. Samarsky. – M. : Science, 1990. – 614 p.
4. Kayumov Sh. Approximately analytical methods for solving the problems of the theory of filtration of plastic fluids. Academy of Sciences of Uzbekistan / Sh. Kayumov. – Tashkent, 1991. – 255 p.

UDC 519.83 517.9

**N. V. Kharchenko**, Ph. D.,

**O. R. Satur**

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv

## DYNAMICAL MODEL OF OPINION FORMATION

We study the opinion formation process at a multi-agent network. Agents interact randomly with their neighbours and change their opinions according to the predefined rules. Our model's behaviour is similar to the behaviour of the model at [1] still it has a different rule of communication between agents.

Let  $G = (V, E)$  be an undirected graph, where  $V$  and  $E$  ( $E \subset V \times V$ ) are the sets of vertices and edges in the graph, respectively. Here  $(u, v) \in E$  denotes an edge connecting vertice  $u$  to vertice  $v$ . When there is an edge  $(u, v)$ , we assume that  $v$  can be influenced by its neighbour  $u$  (as well as  $u$  can be influenced by  $v$ ). For a vertice  $v \in V$ , let  $B(v)$  denote the set of neighbours of  $v$  in graph  $G$ , that is,  $B(v) = \{u \in V: (u, v) \in E\}$ .

Given an integer  $n$  with  $n \geq 2$  we consider the spread of  $n$  opinions (opinion 1, ..., opinion  $n$ ) on graph  $G$ . Each vertice may hold one of  $n$  opinions with some probability at any time  $t$  ( $t \geq 0$ ), that is each vertice  $v \in V$  is associated with a stochastic vector  $\mathbf{p}^v(t) = (p_1^v(t), \dots, p_i^v(t), \dots, p_n^v(t))$ , where  $p_i^v(t)$  is the probability that the vertice  $v$  holds the opinion  $i$ . We call  $\mathbf{p}^v(t)$  an *opinion distribution* of a vertice  $v$  at time  $t$ . Note that  $\sum_{i=1}^n p_i^v(t) = 1$ .

The *opinion formation process* is defined as follows. At each time step we randomly choose a vertice  $v \in V$  and randomly choose one of its neighbours  $u \in B(v)$ , and change the vector  $\mathbf{p}^v(t)$  to  $\mathbf{p}^v(t+1)$  by the rule of attractive interaction [2]:

$$p_i^v(t+1) = \frac{1}{z^{u,v}(t)} p_i^v(t) (1 + p_i^u(t)), \quad (1)$$

where  $z^{u,v}(t)$  is a scaling coefficient which ensures that a new vector  $\mathbf{p}^v(t+1)$  is stochastic, and thus  $z^{u,v}(t) = 1 + \sum_{i=1}^n p_i^v(t) p_i^u(t)$ . At each time step every vertice should be updated once. The opinion of the chosen neighbour is not adopted at once, but updating the opinion means that the vertice's opinion is influenced by its neighbour.



We assume  $G$  to be a complete graph. First, we consider a trivial case when the graph  $G$  has only two vertices:  $u$  and  $v$ . Assuming that starting opinion distributions  $\mathbf{p}^u(t)$  and  $\mathbf{p}^v(t)$  are not mutually singular, system converges to a *consensus*, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^v(t)$  (see [2]). Note that the consensus state is a steady state of the conflict dynamical system with attractive interaction described at [2; 3].

Now let's consider a graph  $G$  with  $k$  vertices ( $k > 2$ ). Assume none of the vertices has an opinion distribution which equals to a stable steady state of the conflict dynamical system with attractive interaction (such stable steady state corresponds to a situation when a vertice holds one of  $n$  opinions with probability equals to one). If  $k$  is sufficiently large we can use the mean-field theory to approximate the behaviour of the system. So equation (1) can be rewritten as

$$p_i^v(t+1) = \frac{1}{z^{u,v}(t)} p_i^v(t) (1 + \bar{p}_i^u(t)), \quad (2)$$

where  $\bar{p}_i^u(t) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n p_i^u(t)$  is a mean value of probability to hold opinion  $i$  by all vertices. Using equation (2) one can show that at each time each vertice approaches to the mean value of opinion distribution of the whole system by  $l_1$ -norm. Thus, the system converges to consensus.

**Theorem.** Opinion formation process defined by equation (1) converges to a consensus state.

### References:

1. Li L. Consensus, polarization and clustering of opinions in social networks / L. Li, A. Scaglione, A. Swami, Q. Zhao // IEEE J. on Selected Areas in Communications. – 2013. – Vol. 31, №6. – P. 1072-1083.
2. Kharchenko N. Fixed points of complex systems with attractive interaction / N. Kharchenko, V. Koshmanenko // Methods Funct. Anal. Topology. – 2017. – Vol. 23, №2. – P. 164-176.
3. Albeverio S. Dynamics of discrete conflict interactions between non-annihilating opponents / S. Albeverio, M. V. Bodnarchuk, V. D. Koshmanenko // Methods Funct. Anal. Topology. – 2005. – Vol. 11, №4. – P. 309-319.

UDC 517.9, 519.83

**V. D. Koshmanenko\***, Ph. D.,

**V. O. Voloshyna\*\***

\* Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv,

\*\* National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv

### LIMIT STATES OF CONFLICT DYNAMICAL SYSTEMS WITH POINT SPECTRUM

Using the theory developed in [1–3] and the method of fractal space division we construct a model of conflict dynamical system which limit states are presented by singular distributions. We prove that the strategy of fixed priority is necessary and sufficient for emergence of the pure point measure in limit states.

We study the trajectory of conflict dynamical system given in terms of probability measures

$$\left\{ \begin{matrix} \mu_N \\ \nu_N \end{matrix} \right\} \xrightarrow{*} \left\{ \begin{matrix} \mu_{N+1} \\ \nu_{N+1} \end{matrix} \right\}, N = 1, 2, \dots \quad (1)$$

corresponding to a couple of opponents living on a common space  $\Delta_0 = [0,1]$ . Here \* stands for the conflict interaction. We assume that  $\Delta_0$  is subjected to infinite fractal division:

$$\Delta_0 = \bigcup_{i=1}^n \Delta_{\alpha_i} = \bigcup_{\alpha_1, \dots, \alpha_k=1}^n \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k}, n \geq 2, k = 1, 2, \dots$$

and in (1) on each  $N$ -step the conflict interaction \* involves more deep structure of measures. In general, as a rule,  $\lim_{N, k \rightarrow \infty} \mu_N(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k}) = 0$ . It means that the limit measure  $\mu_\infty$  is singular continuous. We are interesting, when the limit measure is pure point.

**Theorem.** [4] *The limit measure  $\mu_\infty$  is pure point if and only if the strategy of fixed priority is chosen, i.e.*

$$\mu_1(\Delta_{i_0}) > \nu_1(\Delta_{i_0}) \quad (2)$$

for a single fixed index  $1 \leq i_0 \leq n$  and therefore  $\mu_1(\Delta_i) < \nu_1(\Delta_i)$  for all  $i \neq i_0$ .

This result has an applied meaning. Unable to succeed  $(\mu_N(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_N}) \rightarrow \lambda > 0, N \rightarrow \infty)$  using a non-fixed priority strategy, in particular if (2) is executed at least for two different indices. And else, the emergence of a rapid concentration of power (even an explosion) is produced by many repetitions of the fixed priority strategy.

### References:

1. V. Koshmanenko, On the Conflict Theorem for a Pair of Stochastic Vectors // Ukrainian Math. J., – 2003. – 55, 4, P.555-560.
2. V. Koshmanenko, Spectral Theory for Conflict Dynamical Systems. (in Ukrainian) Kyiv, Naukova dumka, 2016. 287p.
3. Koshmanenko V., Kharchenko N. Spectral properties of image measures after conflict interactions. Theory of Stochastic Processes. – 2004. – 10 (26), N 3-4. – P. 73-81.
4. Koshmanenko V., Voloshyna V. Limit distributions of conflict dynamical systems with point spectrum. // Ukrainian Math. J., 2018. (sent to publication)

**A. F. Verlan**, Dr. Sc. (Eng.),

**Yu. O. Furtat**, Ph. D.

Pukhov Institute for Modelling in Energy Engineering, Kyiv

## SUBSYSTEMS' PARAMETERS EVALUATION FOR DIAGNOSTIC EXPERIMENT PLANNING

When diagnosing a complex system  $S$ , even in the case of parametric faults in subsystems, it is necessary first of all not to get the parameter estimation, but to determine the faulty subsystem. It is necessary to ensure the best discernibility of the subsystems.

Let's assume that in one of the subsystems only parametric faults are possible. In this case, the description of the faulty subsystem  $S_i$  has the form  $Z_i = \varphi_i^*(V_i, \rho_i)$ , where  $\rho_i = \rho_i^* + \Delta\rho_i$ ,  $\rho_i \in D_\rho$ ,  $D_\rho$  – range of the subsystem's parameters  $S_i$ ,  $\rho_i^*$  is the vector of nominal values of the dimension parameters  $r_i$ .

Subsystem  $S_i$  is parametrically identifiable if, with known parameters of the other subsystems, its parameters can be determined from the input and output signals of the system.

Let's consider the subsystem  $S_i$ , for which the relationship between the parameters and the output signals of the system is linear. In this case, a description of the system with a faulty subsystem  $S_i$  can be represented as follows:

$$y = F^*(u) + \frac{\partial F^*(u)}{\partial \rho_i^T} \Delta\rho_i, \quad (1)$$

where  $y$  – output signals' vector,  $u$  – input signals' vector,  $F^*$  – vector-function.

Denoting  $\frac{\partial F^*(u)}{\partial \rho_i^T} = q_i(u)$ , we rewrite (1) in the form

$$\Delta y = y - F^*(u) = q_i(u) \Delta\rho_i \quad (2)$$

If such a value exists  $u \in D_u$ , that the rank  $q_i(u) = r_i$ , then from (2) we can obtain the estimate  $\Delta\hat{\rho}_i$  for parameters  $\Delta\rho_i$ . In this case, the identification problem is solved with one set of input signals of the system. If the rank  $q_i(u) < r_i$ , the identification task can be solved only if the system being diagnosed can be fed with sets of input signals  $U^K = (u^1, \dots, u^K)^T$ , with which

$$\text{rank } Q_i(U^K) = \text{rank} \begin{bmatrix} q_i(u^1) \\ \vdots \\ q_i(u^K) \end{bmatrix} = r_i.$$

Subsystem's  $S_i$  parameters' estimate is determined from equation  $\Delta Y(U^k) = Q_i(U^k)\Delta\rho_i$ , where  $\Delta Y(U^k) = [\Delta y(u^1), \dots, \Delta y(u^k)]^T$ .

The problem of diagnosing will be solved by testing hypotheses  $H_{\rho_i}, i = \overline{1, N}$ . Hypothesis  $H_{\rho_i}$  is the assumption that the parameters of the subsystem  $S_i$  have changed, and the description of the system has the form (2). Hypothesis  $H_{\rho_i}$  is checked by checking the compatibility of equation (3), whose matrix  $Q(U^k)$  must be rectangular.

Subsystems  $S_i, S_j$  are indistinguishable under the hypothesis  $H_{\rho_i}$ , if at a given value  $\Delta\rho_j$  there is such a value  $\Delta\rho_i \in D_p$ , that

$$q_i(u)\Delta\rho_i = q_j(u)\Delta\rho_j, \quad u \in D_u. \quad (3)$$

Criteria of distinguishability of parameters of subsystems  $S_i, S_j$  are determined from the conditions under which (3) does not hold.

Subsystem parameters  $S_i, S_j$  are distinguishable under the hypothesis  $H_{\rho_i}$  if and only if there is such a value  $U_k$ , that

$$\text{rank} \left[ Q_i(U^k) \middle| Q_j(U^k) \right] = r_i + \text{rank } Q_j(U^k).$$

In this case, the parameters of the subsystem  $S_j$  can be unidentifiable due to the fact that  $\text{rank } Q_j(U^k) < r_j$ .

We write down the necessary condition for distinguishing the parameters of the subsystems  $S_i, S_j$  under the hypothesis

$$H_{\rho_i}: \text{rank} \left[ Q_i(U^k) \middle| Q_{j,s}(U^k) \right] = r_i + 1, \quad S = \overline{1, r_j},$$

where  $Q_{j,s}(U^k) - S^{\text{th}}$  column of matrix  $Q_j$

If only one parameter in the system is allowed to change, then condition (5) with respect to the distinguishability of all the parameters of the system is reduced to the existence of input signals of the system that ensure pairwise linear independence of the columns of the matrix  $[Q_1(U^k), \dots, Q_N(U^k)]$ , where  $N$  is the total number of parameters tested. And linear independence of different columns can be achieved with different input signals of the system.

УДК 621.793

**А. Ю. Андрейцев\***, канд. фіз.-мат. наук,  
**Т. С. Клецька\***, канд. іст. наук,  
**Т. В. Крижановська\***, канд. фіз.-мат. наук,  
**Т. М. Семененко\***,  
**І. В. Смирнов\*\***, д-р техн. наук

\* Державний університет інфраструктури та технологій, м. Київ,

\*\* Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ

### **ПОЕТАПНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРИ ПЛАКОВАНОЇ ЧАСТИНКИ В ПЛАЗМОВОМУ СТРУМЕНИ ПРИ НАПИЛЕННІ ПОКРИТТІВ**

Забезпечення надійності та подовження терміну безвідмовної роботи деталей машин досягається здебільшого за рахунок використання захисних покриттів. Одним із найрозповсюдженіших методів нанесення зносостійких металокерамічних покриттів є газотермічне напилення керамічних частинок, плакованих металевою оболонкою. Якість даних покриттів суттєво залежить від температурного режиму процесу напилювання. Тому виникає задача дослідження температури частинок вздовж дистанції напилення, яка ускладнюється тим, що в процесі польоту необхідно розглядати стадії зміни агрегатного стану оболонки та ядра плакованої частинки.

Вперше дана задача була розглянута в [1] за умови сталості температури плазмового потоку. Оскільки це припущення є нереальним, то в [2] було запропоновано модель, в якій температура плазмового потоку апроксимувалась квадратичними поліномами, а дистанція напилення розбивалась на декілька ділянок. Дану модель удосконалено в [3], де температура плазмового потоку апроксимувалась ермітовими кубічними сплайнами.

Оскільки в процесі польоту частинки змінюється агрегатний стан її компонентів, то метою даного дослідження було розглянути задачу визначення температури частинки на кожному з етапів.

На етапі розігріву частинки до температури плавлення металевої оболонки розглядалась задача про розповсюдження тепла в двошаровій кулі за умови ідеального теплового контакту між матеріалами оболонки та ядра. В [1] дана задача зводиться до крайової задачі для одновимірного неоднорідного рівняння теплопровідності. Розв'язок даної задачі, за умови апроксимації температури плазмового струменя ермітовими кубічними сплайнами, наведено в [3].

Другий етап – етап плавлення оболонки. В [3] наведено формулу для визначення часу її плавлення. Але виникає задача визначення температури ядра, яка для керамічних частинок суттєво відрізняється в залежності від відстані до центра. Оскільки температура оболонки на цьому етапі є сталою, то для визначення температури ядра отримуємо першу крайову задачу для однорідного рівняння теплопровідності, де початкова умова задається функцією від відстані до центра ядра. Розрахунки показали, що на момент повно-

го розплавлення оболонки, температура для частинок радіусом до 25 мкм. в центрі та на поверхні ядра відрізняється менш ніж на 20°C. Тому припущення про сталість температури ядра на початку наступного етапу є обґрунтованим, і на третьому етапі розігріву ядра до температури плавлення ми можемо скористатись тією ж моделлю, що й на першому.

На етапі плавлення ядра ми визначаємо лише час плавлення. А на наступному етапі: подальшого розігріву частинки, знову використовуємо модель, запропоновану в [3].

Для забезпечення якості покриттів важливо, щоб частинка досягала основи у розплавленому стані, тому етапи затвердіння не розглядались.

Встановлено, що використані нами моделі є адекватними для частинок з радіусом ядра від 10 до 25 мкм. Крім того, встановлено, що частинки досягають основи в повністю розплавленому стані при дистанції наплення 120-200 мм та товщині мідної оболонки 1-2 мкм. В подальшому планується розглянути задачу для визначення температури для дрібнодисперсних частинок радіусом менше 10 мкм.

### Список використаних джерел:

1. Математическое моделирование и физика процессов нанесения плазменных покрытий из композиционных плакированных порошков / В. А. Барвинок, В. И. Богданович, И. А. Докукина, А. Н. Плотников. – М. : Международный центр научной и технической информации, 1998. – 96 с.
2. Андрейцев А.Ю. Нагрів та плавлення частинок порошку в плазмовому струмені / А.Ю. Андрейцев, І.В. Смирнов, А.В. Чорний // Математичне та комп'ютерне моделювання Серія: Технічні науки : зб. наук. праць / Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. – 2011. – Вип. 5. – С. 3-10.
3. Численно-аналитический подход к решению задачи определения температуры плакированных частиц в плазменном потоке / А.Ю. Андрейцев, Н.Н. Крюков, И.В. Смирнов, В.К. Фурман // Вісник ХНТУ. – Херсон, 2017. – №3(62). – С. 326-329.

УДК 519.6

**М. В. Артюх,**

**О. М. Литвин,** д-р фіз.-мат. наук

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

### ТЕСТУВАННЯ МЕТОДУ ПОБУДОВИ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ (ВФЗКЕ)

У доповіді розглядається теорема про тестування методу побудови виробничих функцій зі змінними коефіцієнтами. Розглянемо виробничу функцію Кобба-Дугласа, що має вигляд [1]:

$$Y = AL^{\alpha} K^{\beta}, \quad (1)$$

де  $K$  – основний капітал,  $L$  – робоча сила. Коефіцієнти  $\alpha, \beta$  – сталі коефіцієнти еластичності, що відображають вклад праці та капіталу у виготовлення продукту.

У попередніх дослідженнях авторів виявилось, що можливо побудувати виробничу функцію зі змінними коефіцієнтами еластичності, яка дозволяє отримати краще наближені дані [2-5].

**Теорема 1.** *Якщо у формулі виробничої функції зі змінними коефіцієнтами*

$$Y(L, K, A, a, b) = A \cdot L^{f(L, K, a)} \cdot K^{g(L, K, b)} \quad (2)$$

всі коефіцієнти поліномів  $f(L, K, a)$ ,  $g(L, K, b)$  та коефіцієнт  $A$  відомі, то метод ВФЗКЕ точно їх відновлює.

**Доведення.** В методі ВФЗКЕ для знаходження невідомих коефіцієнтів  $A$ ,  $a_{im}$ ,  $b_{im}$ ,  $i = \overline{0, M}$ ,  $m = \overline{0, N}$  на практиці зручно знаходити мінімум функціонала

$$j(C) = \sum_{p=1}^Q \left( A \cdot L_p^{f(L_p, K_p, a)} \cdot K_p^{g(L_p, K_p, b)} - Y_p \right)^2 \rightarrow \min_{A, a_{im}, b_{im}}, \quad (3)$$

який отримується шляхом логарифмування функціоналу (2). Отримаємо

$$\ln Y = \ln A + (\ln L) \cdot f(L, K, a) + (\ln K) \cdot g(L, K, b), \quad (4)$$

звідки знаходимо невідомі  $A$ ,  $a_{im}$ ,  $b_{im}$ ,  $i = \overline{0, M}$ ,  $m = \overline{0, N}$  [4]. Після знаходження невідомих  $A$ ,  $a_{im}$ ,  $b_{im}$ ,  $i = \overline{0, M}$ ,  $m = \overline{0, N}$  підставляємо їх у функцію (2), отримавши таким чином, конкретну функцію вже з відомими коефіцієнтами

$$Y(L, K, A, a, b) = A \cdot L^{f(L, K, a)} \cdot K^{g(L, K, b)}. \quad (5)$$

Після цього у функцію (5) з відомими коефіцієнтами підставляємо вихідні дані  $K$ ,  $L$  і знову відновлюємо функціонал (2). В результаті отримуємо матрицю з 0 (з урахуванням похибки).

**Теорему доведено.**

У подальшому планується дослідити використання виробничих функцій зі змінними коефіцієнтами в різних економічних системах.

### Список використаних джерел:

1. Cobb C.W., Douglas P.H. A Theory of Production // American Economic Review. – 1928. – December. – P. 139-165.
2. Артюх М.В. Загальне представлення функції двох змінних зі змінними дивідендами першого роду по  $X$  та по  $Y$  // Праці міжнародної молодіжної математичної школи “Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII)” – Київ: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2011. – С. 14-15.
3. Литвин О.М., Артюх М.В. Деякі теореми про виробничі функції від двох змінних зі змінними коефіцієнтами еластичності та їх застосування // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»: збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2012. – №2. – С. 23-29.
4. Литвин О.М., Артюх М.В. Виробнича функція зі змінними коефіцієнтами еластичності, побудована на основі даних Коба-Дугласа // Вісник Національ

- ного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»: збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – №27. – С. 124-129.
5. Артюх М. В., Литвин О. М. Математична модель виробничої функції, яка явно залежить від капіталоозброєності та обсягів ресурсів // Інформатика та системні науки (ІСН-2014): матеріали V Всеукр. наук.-практ. конф., (м. Полтава, 13-15 березня 2014 р.) / за ред. Ємця О.О. – Полтава: ПУЕТ, 2014. – С. 34-37.
  6. Артюх М.В., Литвин О.М. Застосування дивідіріального та мультигрального числень в дослідженні економіки сільського господарства України / Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка ; [редкол.: Ю. Г. Кривонос (відп. ред.) та ін.]. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. – Вип. 13. – С. 16-26.

УДК 621.327: 681.5

**В. В. Бараннік\***, д-р техн. наук,  
**О. В. Слободянюк\*\***, канд. техн. наук,  
**В. В. Твердохліб\*\*\***,  
**В. В. Хіменко\***

\* Харківський національний університет повітряних сил імені Івана Кожедуба, м. Харків,

\*\* Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,

\*\*\* Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

## **ДИФЕРЕНЦІЙОВАНИЙ ПІДХІД ДО ОБРОБКИ ВНУТРІШНЬОГО ЗМІСТУ ВІДЕОКАДРІВ ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ ВІЗУАЛЬНОЇ ЯКОСТІ ВІДЕОПОТОКУ**

Огляд тенденції розвитку інфокомунікацій за останні роки, свідчить про наступне [1]:

- з одного боку, спостерігається постійне збільшення об'ємів відеотрафіку, який передається у мережі, та зростання вимог до якості прийнятого відео;
- з іншого боку, ріст пропускної здатності каналів мережі помітно відстає від темпів збільшення трафіку відео.

Наслідком цього протиріччя є неможливість забезпечення вимог QoS, які стосуються потокового відео, а саме часу затримки, джиттеру та відсотку втрачених пакетів [2]. Рішення даної проблеми може знаходитися як у площині удосконалення технологій обробки потоків даних на рівні мережевих вузлів, так і у площині удосконалення методів обробки відео на рівні кінцевих вузлів мережі. Другий підхід є більш раціональним, оскільки дає можливість знизити загальну інформаційну інтенсивність мережі. У цьому випадку зменшується ймовірність втрати пакетів відеоданих, що найбільш важливо для години найбільшого навантаження а також для сег-



ментів мережі з низькою пропускнуою здатністю, знижується навантаження на комутаційне обладнання та зменшуються затримки трансляції відео. Проте, існуючі технології кодування відео, що зменшують загальний об'єм даних, не завжди є достатньо ефективними. Це, насамперед, пов'язано з тим, що не забезпечується адаптація динаміки відео потоку на параметрів каналу, а особливості змісту кадрів при обробці не ураховуються.

З метою збільшення ефективності існуючих технологій обробки відеопотоку, може бути використано підхід, який ґрунтується на диференційованій обробці змісту відеокадру.

У цьому випадку відеокадр, або окремих його слайс, розглядається як сукупність  $S$  ділянок, кожна з яких має свій показник інформативності, тобто  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n\}$ . Отримані коефіцієнти інформативності, відповідно до їх величини, розподіляються на декілька груп, у найпростішому випадку це групи інформативних, середньо та малоінформативних коефіцієнтів. Подальша обробка кожного фрагменту кадру здійснюється відповідно до належності його до відповідної групи.

У випадку JPEG-платформи, елементарними фрагментами кадру, для яких оцінюється показник інформативності, є трансформанти ДКП блоків кадру. При цьому, для внутрішньої кадрової обробки, результуюча інформаційна інтенсивність  $I$  кожного окремого фрагменту є функціоналом  $I = \varphi(K, C)$  від параметрів квантування  $K$  та формату колірної субдискретизації  $C$ .

Інтенсивність найменш інформативних фрагментів при цьому знижується найбільше, шляхом використання високих коефіцієнтів  $K$  квантування та вибору відповідних моделей колірної субдискретизації  $C$ . В той же самий час інтенсивність  $I$  середньо інформативних та інформативних фрагментів зменшується менш значно.

Якщо у якості базису внутрішнього кадрового кодування розглядається платформа JPEG2000, як для технології 4К, виявлення елементарних фрагментів з подальшим аналізом інформативності може здійснюватися до етапу вейвлет-перетворення, шляхом розподілу початкового кадру на ділянки  $8 \times 8$  або  $16 \times 16$ . У цьому випадку, зниження інформаційної інтенсивності фрагментів досягається зміною параметрів квантування  $K$ , колірної субдискретизації  $C$  та шляхом рекомбінації бітових площин [3].

Таким чином, розглянутий підхід дозволяє здійснювати ефективний перерозподіл інформаційної інтенсивності у межах кадру чи слайсу між його окремими фрагментами. Це, у свою чергу, окрім, власне, загального зниження інформаційної інтенсивності відео потоку, сприяє забезпеченню візуально прийнятної якості відео на боці прийому та зменшує навантаження на мережеві та кінцеві вузли.

### Список використаних джерел:

1. Баранник В.В. Метод динамического управления битовой скоростью видеопотока с использованием трехмерного представления трансформант / В.В. Баранник, Д.Э. Двухглазов, В.В. Твердохлеб // АСУ и приборы автоматики. – 2014. – № 167.

2. VNI Forecast Highlights. Cisco. – 2017.: VNI Forecast Highlights. Cisco [Электронный ресурс]. – 2017. – Режим доступа: <http://www.cisco.com/c/en/us/solutions/service-provider/visual-networking-index-vni/vni-forecast>
3. Recommendations of the International Telecommunication Union ITU-T G.1010 “End-User multimedia QoS categories”.

УДК 004.61

**А. А. Верлань\***, канд. техн. наук,

**В. В. Палагин\*\***, д-р техн. наук

\* Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», г. Киев

\*\* Черкасский государственный технологический университет, г. Черкассы

## **МЕТОДЫ РЕДУКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Современное построение технических систем характеризуется возрастающими требованиями к качеству их функционирования, управлением сложными объектами, что приводит к необходимости их надежного исследования и моделирования. Важным условием проведения данных исследований является получение математической модели, параметры которой отображают реальные физические, конструктивные, технологические и другие факторы, влияющие на динамику системы. Однако, построение достаточно точной модели системы часто невозможно из-за отсутствия адекватных моделей элементов и взаимосвязей системы с внешней средой. Для преодоления этой проблемы создаются различные моделирующие комплексы, содержащие в своем составе реальные элементы системы, модели которых сложны или неизвестны. Комплексами такого рода являются испытательные стенды для испытаний технических систем и различные тренажеры для обучения персонала, управляющего сложными объектами [1].

Одним из подходов для построения современных моделирующих комплексов является использование натуральных имитаторов, в том числе и для летательных аппаратов, позволяющих эффективно моделировать движение исследуемых объектов в натуральных условиях их эксплуатации.

Необходимость контроля базовым объектом в реальном времени предъявляет к блоку управления жесткие требования по быстрдействию, ослабление которых достигается допустимым по точностным требованиям упрощением моделей динамики исследуемых объектов [2]. Максимальная простота модели динамики, по которой с требуемой точностью определяется воспроизводимое на имитаторе движение, является необходимым условием минимальных временных затрат на выработку управления базовым объектом.

Известные методы упрощения моделей характеризуются только сравнением полных и упрощенных моделей при номинальных значениях параметров систем. В большинстве методов при этом не ставится также и задача учета полной погрешности оценки показателей качества исследуемых систем.

В работе предлагается методы упрощения (редукции) математической модели динамики с оценкой точностных требований к параметрам элементов имитатора для обеспечения заданной точности динамического подобия. Построение методов редукции базируется на использовании теории чувствительности динамических систем. В частности, на основе оценки параметрической чувствительности координат исходной модели летательных аппаратов формализовано определение множества незначимых параметров и определены ограничения на возмущения параметров для обеспечения заданной точности исследуемой модели динамики.

Сформулирован принятый принцип упрощения моделей, заключающийся в пренебрежении параметрами, факторами или фрагментами модели, незначимыми для заданных показателей качества. На этом принципе изложен подход к упрощению математических моделей, отличающийся от известных учетом дополнительного движения и согласованием точности исходных данных и возмущений параметров с требуемой точностью оценок показателей качества исследуемых систем.

Проведен переход от общего требования к точности воспроизведения на подвижном имитаторе динамики исследуемого объекта к ограничениям на область неопределенности выходных координат упрощенной модели. Получено необходимое условие для обеспечения требуемой точности моделирования при использовании упрощенной модели с учетом полной вычислительной погрешности и возмущений координат вследствие детерминированных и случайных возмущений параметров системы. Рассмотрен подход к обоснованию точностных требований к моделям, датчикам и преобразователям вычислительно-управляющего комплекса летательного имитатора.

#### **Список використаних джерел:**

1. Азарсков В.Н. Новые информационные технологии в космическом тренажеростроении // Збірка наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова. Спеціальний випуск т.1. Сучасні тренажерно-навчальні комплекси та системи. – К. : ІПМЕ, 2007. – С. 24-48.
2. Верлань А.Ф., Верлань А.А., Положаєнко С.А. Алгоритмизация методов точностной параметрической редукции математических моделей // Информатика и математические методы в моделировании. – 2017. – Том 7, №1-2. – С.7-17.

УДК 004.942

**А. Ф. Верлань**, д-р техн. наук

Інститут проблем моделювання в енергетиці  
ім. Г. Є. Пухова НАН України, м Київ

### **ПРИНЦИПИ ОРГАНІЗАЦІЇ КЕРОВАНИХ НАТУРНИХ МОДЕЛЮЮЧИХ СИСТЕМ**

Розвиток науки і техніки призводить до необхідності управління все більш складними системами, у зв'язку з чим зростає необхідність побудови адекватних моделей елементів і взаємозв'язків таких систем із зовнішнім

середовищем. Для вирішення таких задач створюються моделюючі комплекси, що містять у своєму складі реальні елементи систем, моделі яких складні або невідомі. Комплексами такого роду є випробувальні стенди для технічних систем, різні тренажери для навчання персоналу, який керує складними об'єктами – тренажери для підготовки операторів електростанцій, водіїв наземного транспорту, екіпажів суден, пілотів літальних апаратів і т. п.

Наступним кроком в напрямку наближення моделі до оригіналу є використання натурних імітаторів – натурних моделюючих комплексів, які дають змогу моделювати рух досліджуваних об'єктів в натурних умовах їх експлуатації. Застосування натурних імітаторів з оператором в контурі управління дає можливість вдосконалення елементів і технічних систем, з якими взаємодіє оператор, ефективно організувати професійний відбір, навчання і тренування обслуговуючого персоналу в реальних умовах функціонування досліджуваної ергатичної системи.

Рухомий натурний імітатор є натурним моделюючим комплексом, що складається з трьох основних елементів:

- еталонної моделі, що забезпечує введення в систему досліджуваного руху об'єкта, що моделюється;
- натурної моделі, або базового об'єкта, що забезпечує натурні умови функціонування системи, що моделюється;
- керуючої системи, що виробляє такі сигнали керування базовим об'єктом, при яких рух базового об'єкта відтворює рух об'єкта, що моделюється.

Складність режимів, що відтворюються на імітаторі, залежить від повноти опису еталонної моделі динаміки досліджуваного руху. Тому розробка рухомого імітатора з розширеними можливостями для дослідження призводить до задачі визначення керування базовим об'єктом в нелінійній постановці, коли моделями руху об'єкта, що моделюється і базового об'єкта є системи нелінійних диференціальних рівнянь.

Нехай рух об'єкта, що моделюється описується системою

$$\frac{dZ}{dt} = A(t, Z, V), \quad Z(0) = Z_0, \quad (1)$$

а базового – системою

$$\frac{dY}{dt} = B(t, Y, U), \quad Y(0) = Y_0. \quad (2)$$

В (1) і (2)  $Z, Y$  – вектори фазових координат об'єкта, що моделюється і базового об'єкта;  $V, U$  – вектори управління об'єктом, що моделюється і базовим об'єктом;  $A, B$  – оператори (правих частин) рухомого об'єкта, що моделюється і базового рухомого об'єкта.

Задача моделювання динаміки рухомого об'єкта, що описується системою (1), на натурному імітаторі, рух якого описується системою (2), при вимозі рівності похідних

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{dY}{dt} \quad (3)$$

об'єкта, що моделюється і базового об'єкта в математичному плані зводиться до знаходження вектора  $U$  керувань базовим об'єктом із системи алгебраїчних рівнянь

$$A(t, Z, V) = B(t, Y, U), \quad Z(0) = Z_0, \quad Y(0) = Y_0. \quad (4)$$

Прийнявши  $\bar{Z} = Z - Z_0$ ,  $\bar{Y} = Y - Y_0$  рівняння (3) і (4) можна записати в еквівалентній формі

$$A(t, \bar{Z} + Z_0, V) = B(t, \bar{Z} + Y_0, U), \quad (5)$$

з якої випливає принципова можливість визначення керування таким чином, що буде забезпечуватися подібність натурального імітатора і досліджуваного рухомого об'єкта за похідними їх координат. При цьому похибка в значеннях координат дорівнюватиме різниці відповідних балансувальних значень.

Отже, задача моделювання динаміки рухомих об'єктів за допомогою натурального імітатора формулюється так: потрібно знайти вектор-функції  $U(t) \in R_u$  ( $R_u$  – область допустимих керувань), щоб виконувалися нерівності

$$\begin{cases} \Phi_0(Z_0(V_0) - Y_0(U_0)) \leq \delta_0, \\ \Phi(A(t, \bar{Z} + Z_0, V) - B(t, \bar{Z} + Y_0, U)) \leq \delta, \\ U(0) = U_0, \quad t \in [t_s, t_f]. \end{cases} \quad (6)$$

Тут  $\Phi_0$ ,  $\Phi$  – функціонали типу норм,  $\delta_0$ ,  $\delta$  – задані допуски на виконання рівності координат  $Z$ ,  $Y$  і їх похідних відповідно.

У результаті проведеного аналізу рекомендується варіант системи керування натурним імітатором, в якому основна частина вектор-функції управління  $U(t)$  обчислюється з використанням замкнутого циклу по частині змінних стану базового об'єкта і розімкнутого циклу – по іншій частині координат. Це призводить до комбінованої системи в основному каналі обчислення керування базовим об'єктом. У допоміжному каналі з використанням сигналів неузгодженості  $e = Y - Z$  формуються поправки до основного керування.

Необхідність керування базовим об'єктом в реальному часі пред'являє до блоку вироблення керування жорсткі вимоги за швидкістю, ослаблення яких досягається допустимим за вимогами точності спрощенням моделей динаміки досліджуваних об'єктів. Максимальна простота моделі динаміки, за якою з необхідною точністю визначається відтворений на імітаторі рух, є необхідною умовою мінімальних часових витрат на вироблення керування базовим об'єктом.

А. П. Власюк, д-р техн. наук,

І. В. Ільків

Національний університет «Острозька академія», м. Острог

**МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ  
ПЕРЕНЕСЕННЯ СОЛЕЙ ПРИ ФІЛЬТРАЦІЇ ТА  
ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННІ В НАСИЧЕНО-НЕНАСИЧЕНИХ ҐРУНТАХ  
В ОДНОВИМІРНОМУ ВИПАДКУ В НЕІЗОТЕРМІЧНИХ УМОВАХ**

Проведено математичне та комп'ютерне моделювання процесу перенесення солей при фільтрації сольових розчинів та вологоперенесенні в насичено-ненасичених ґрунтових середовищах великої протяжності (одновимірний випадок) в неізотермічних умовах. Розроблено та реалізовано математичну модель описаного процесу в областях повного та неповного насичення, яка в загальноприйнятих позначеннях описується наступною крайовою задачею:

$$\frac{\partial \left( D(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right)}{\partial x} - v \frac{\partial c}{\partial x} - \gamma(c - C^*) + D_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\mu(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k(c, h, T) \frac{\partial h}{\partial x}) - v \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - D_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - v c_p \frac{\partial T}{\partial x} = c_n \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3)$$

$$v = -k(c, h, T) \frac{\partial h}{\partial x} + \nu(c) \frac{\partial c}{\partial x} + D_T \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4)$$

$$c(0, t) = \tilde{C}_1(t), \quad c(l, t) = \tilde{C}_2(t), \quad c(x, 0) = \tilde{C}_0(x), \quad (5)$$

$$h|_{x=0} = \tilde{H}_1(t), \quad h|_{x=l} = \tilde{H}_2(t), \quad h|_{t=0} = \tilde{H}_0(x), \quad (6)$$

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad T(0, t) = T_1(t), \quad T(l, t) = T_2(t), \quad (7)$$

$$[h]|_{x=l} = [c]|_{x=l} = \left[ cv - D(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right]_{x=l} = 0. \quad (8)$$

**К. П. Газдюк\***,

**В. В. Жихаревич\***, канд. фіз.-мат. наук,

**О. М. Нікітіна\*\***, канд. фіз.-мат. наук,

**С. Е. Остапов\***, д-р фіз.-мат. наук

\*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,  
м. Чернівці,

\*\*Чернівецький факультет Національного технічного університету  
«Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці

## **ЕВОЛЮЦІЙНИЙ АЛГОРИТМ ВАРІАБЕЛЬНОГО РУХУ ЧЕРВ'ЯКОПОДІБНОГО ОРГАНІЗМУ**

Новим та прогресуючим напрямком в сучасній біоінформатиці є створення комп'ютерних моделей живих організмів, які дають змогу досліджувати варіабельність поведінки при зміні вхідних параметрів. Моделювання живоподібних структур є досить складною задачею, оскільки принципи та закони природи живих систем достеменно не досліджені. Є низка різних підходів до вирішення даної проблеми. Нами обрано метод рухомих клітинних автоматів (РКА) [1], що дозволяє виділити окремі складові та суттєві ознаки досліджуваної системи, спростити її та зменшити набір вхідних параметрів, нівелюючи фактори, які мають незначний вплив на систему. Відмінність РКА від класичних клітинних автоматів полягає у відсутності у перших прив'язки до деякої фіксованої однорідної просторової клітинної структури, натомість вони можуть набувати довільних неперервних значень координат у просторі.

Об'єктом дослідження даної роботи є моделювання локомоції черв'якоподібного організму. Модель розбивається на фрагменти, що представляються у вигляді дискретних РКА. Стан вибраного РКА у наступний момент часу визначається станом його найближчого оточення згідно обраної схеми сусідства із врахуванням вагових коефіцієнтів. Ваги суттєвого входу підсилюються і, навпаки, ваги несуттєвого входу примуово зменшуються, що визначає інтенсивність вхідного сигналу.

Слід зауважити, що значення вагових коефіцієнтів та порядок розташування умовних операторів може змінюватись та є характеристикою окремого РКА. Алгоритм цих змін є еволюційним. Як відомо, довільний еволюційний алгоритм передбачає випадкові зміни (мутації) параметрів та оцінку впливу цих змін на динаміку системи згідно встановленого критерію. Якщо критерій задовольняється, зміни закріплюються, в протилежному випадку, – відхиляються, що є повним аналогом природного відбору.

У нашому випадку критерієм еволюційного відбору, є мінімізація змін вихідних значень нейронів при максимальній швидкості руху черв'якоподібного організму. Зміни вихідних значень нейронів  $\Delta y = |y_{t+1} - y_t|$  відображають енергію  $E(y, t)$ , яку витрачає організм:

$$E(y, t) = \frac{m_o S^2(y)}{t^2},$$

де  $m_0$  – коефіцієнт, що відображає числове значення маси модельованого об'єкта;  $S(y)$  – переміщення клітини у просторі, що залежить від вихідного сигналу  $y$ , що вимірюється у відносних одиницях – пройдений шлях, поділений на відстань між РКА у стані спокою;  $t = l/n$ , де  $l$  – кількість РКА взаємодій,  $n$  – кількість РКА у модельованому об'єкті.

Очевидно, що чим частіше будуть скорочуватись м'язи, тим більше енергії буде витрачатися організмом. Таким чином, природним є прямування до зменшення енергетичних витрат при досягненні цілі – максимально можливої швидкості руху.

Окремим аспектом реалізації варіабельності руху організму під керуванням потоків нейронних сигналів є введення поняття інерційності – деякого часового параметру, який визначає швидкість стиснення м'язів при переключенні відповідних керуючих сигналів та обмежує максимально можливу швидкість руху.

Описана елементарна еволюційна стратегія ефективно працює при невеликій кількості РКА, з яких складається модель. При збільшенні кількості РКА починає виникати проблема слабкої чутливості еволюційного алгоритму відносно визначення впливу однієї мутації нейронної функції клітинного автомата на поведінку системи в цілому. Вирішення цієї проблеми полягає в кластеризації, тобто самовільному утворенні деяких доменів, в межах яких сусідні РКА функціонують синхронно. Взаємний вплив передбачає деякий рівень дублювання вихідних реакцій нейронних частин двох сусідніх взаємодіючих автоматів. З іншого боку, ці домени піддаються руйнівному хаотичному впливу у випадку, якщо функціонування домену не відповідає еволюційному критерію.

#### Список використаних джерел:

1. Bandman O. L. Parallel implementation of cellular automata algorithms for simulation of spatial dynamics, Sib. Zh. Vychisl. Mat., 2007, Volume 10, Number 4, 335–348.

УДК 517.9+531.19+530.145

**В. І. Герасименко**, д-р фіз.-мат. наук,  
**В. В. Кречко**

Інститут математики НАН України, м. Київ

### ПРО ПРОЦЕС ПОШИРЕННЯ КОРЕЛЯЦІЙ В КВАНТОВИХ СИСТЕМАХ

У доповіді розглядається проблема строгого опису процесу поширення кореляцій початкових станів в квантових систем багатьох частинок в скейлінговій границі самоузгодженого поля за допомогою маргінальних операторів густини [1].

Побудовано асимптотику самоузгодженого поля непертурбативного розв'язку задачі Коші для ієрархії квантових рівнянь ББКІ для послідовнос-



ті маргінальних операторів густини у випадку початкових станів, які описуються одночастинковим оператором густини та кореляційними операторами [2]. Встановлено явний вигляд граничних маргінальних операторів густини. Такі граничні оператори описуються за допомогою граничного одночастинкового оператора густини, який є розв'язком задачі Коші для кінетичного рівняння з початковими кореляціями, а саме, для немарковського квантового кінетичного рівняння Власова з початковими кореляціями [3].

Доведення отриманих результатів ґрунтується на відповідних граничних теоремах для кумулянтів асимптотично збурених груп операторів скінченної кількості квантових частинок та використанні встановленої структури твірних операторів для розкладів в ряд маргінальних операторів густини.

Отримані результати поширені на системи багатьох бозонів або ферміонів.

### Список використаних джерел:

1. Gerasimenko V. I. Hierarchies of quantum evolution equations and dynamics of many-particle correlations. In: Statistical Mechanics and Random Walks: Principles, Processes and Applications. – N.Y. : Nova Science Publ., Inc. – 2013. – P. 233-288.
2. Gerasimenko V. I., Krechko V. V. On non-perturbative solution of quantum BBGKY hierarchy // Proc. Inst. Math. NASU – 2016. – 13, No.2. – P. 7-26.
3. Gerasimenko V. I. The evolution of correlation operators of large particle quantum systems // Methods Funct. Anal. Topology – 2017. – 23, No.2. – P. 123-132.

УДК 531.7.08

А. С. Дуднік, канд. техн. наук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

### ВИЗНАЧЕННЯ ВІДСТАНИ МІЖ ОБ'ЄКТАМИ НА ОСНОВІ ЧАСУ ПРИБУТТЯ СИГНАЛУ

Різні методи намагаються оцінити відстань між двома вузлами, використовуючи час, виміри часу поширення сигналу від передавача до приймача так, щоб на його основі можна було розрахувати відстань між передавачем і приймачем. Найпростішим є ToA – Time of Arrival. В цьому випадку, відстань між двома вузлами безпосередньо пропорційна часу, коли сигнал використовується, щоб поширитися від одного пункту до іншого. Відстань між відправником і приймачем визначається за формулою:

$$d = S_r(t_2 - t_1),$$

де  $S_r$  – швидкість поширення радіосигналу (швидкість світла), і  $t_1$  і  $t_2$  – час, коли сигнал відіслано і отримано. Цей тип оцінки вимагає точно синхронізованих вузлів, і час, коли сигнал залишає вузол, має бути в пакеті, який посилають.

TDoA (Time Difference of Arrival) заснований на відмінності часів коли єдиний сигнал від одного вузла прибуває в три або більше вузли або різниці

часу, коли кілька сигналів від одного вузла надходять в інший вузол. Перший випадок, більш поширений в стільникових зв'язках, вимагає точно синхронізованих вузлів приймача (в цьому випадку, базові станції).

У другому випадку, більш поширеному і відповідному до бездротових сенсорних мереж, вузли повинні бути обладнані додатковими апаратними засобами, здатними до відправлення двох типів сигналів одночасно. У цих сигналів повинні бути різні швидкості поширення, як радіо/ультразвук або радіо/акустичний. Зазвичай, перший сигнал – пакет безпосередньо, який із швидкістю світла ( $\sim 300,000$  км/с), і другий сигнал – деякий звук, через його повільніше поширення ( $\approx 340$  м/с).

Метод TDoA використовується для обчислення координат бездротових сенсорних мереж, де ультразвуковий імпульс передається одночасно з радіо-сигналом. В цьому випадку, вузли вираховують різницю часу прибуття двох сигналів. Відстань може тепер бути обчислена наступною формулою:

$$d = (S_r - S_s)(t_2 - t_1),$$

де  $s_r$  і  $s_s$  – швидкість поширення радіо та ультразвукового сигналу, і  $t_1$  і  $t_2$  – час прибуття радіо та ультразвукових сигналів, відповідно.

УДК 66-97

**О. А. Жученко**, канд. техн. наук,

**А. П. Коротинський**,

**С. В. Кашишев**

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ

## **АНАЛІЗ ВПЛИВУ РОЗРІДЖЕННЯ НА ПРОЦЕС НАГРІВУ БАГАТОКАМЕРНОЇ ПЕЧІ ВИПАЛЮВАННЯ**

Однією з основних технологічних операцій, що визначає якість вуглеграфітових виробів із заданими фізико-механічними властивостями, є випалювання. Під час якого відбувається термічна деструкція сполучного матеріалу, та створення з нього напівкоксу і подальше перетворення його в кокс. Це нове поєднання забезпечує такі цінні властивості як: міцність, термічна і хімічна стійкість, висока електропровідність [1, с.5-7].

Для декомпозиції задачі дослідження і вдосконалення технології випалювання вуглеграфітової продукції в багатокамерних печах випалювання закритого типу, пропонується розглядати окремо вплив розрідження на етапі нагріву камери печі димовими газами.

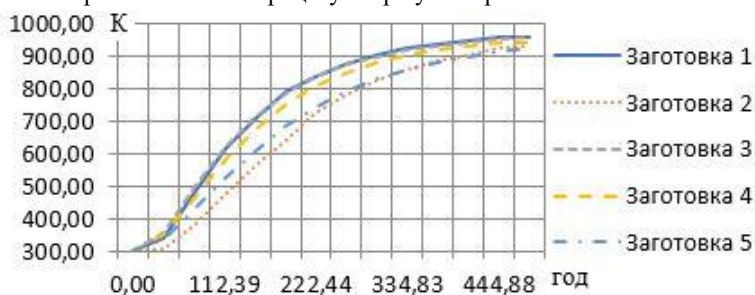
**Метою дослідження** є визначення впливу розрідження на перепад температур по заготовкам, на швидкість росту мінімальної та максимальної температур у заготовках, на температурні поля камери печі.

Для подальшого числового моделювання прийнято, що тривалість процесу випалювання 480 год., число камер на охолодженні – 1,

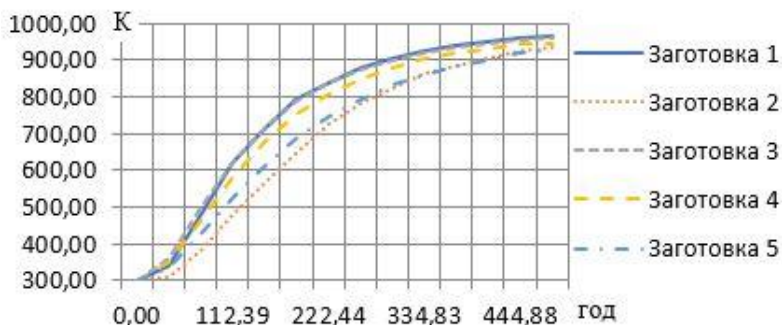
число камер під вогнем – 1, число камер на підігріві димовими газами – 4, відповідно темп випалювання складає 96 год, при максимальній температурі димових газів, що подаються у камеру печі, 1300 К. Початкова температура всіх печі прийнято 300 К. Розрідження приймається 100 та 200 Па.

З отриманих результатів дослідження видно, що при збільшенні розрідження температура по об'єму печі зменшилась. Найвищими є температури стінок вогневого колодязя 1020 К при розрідженні 200 Па та 1021 К при розрідженні 100 Па, мінімальними є температури протилежної стінки близько 897,13 К та 897,39 К відповідно. Перепад температури по всьому об'ємі камери печі сягає 122,87 та 123,61 К.

На рис. 1-2 наводяться графіки зміни мінімальної температур у заготовках протягом всього процесу нагріву камери печі.



**Рис. 1.** Графік зміни температури при розрідженні 200 Па



**Рис. 2.** Графік зміни температури при розрідженні 100 Па

Підведення розрідження до камери печі призводить до покращення теплого режиму, а саме збільшення однорідності температур по всьому об'ємі камери. Проте є обмеження по розрідженню, адже при значних значеннях розрідження зростає швидкість димових газів. Це у свою чергу призводить до зменшення часу, потрібного димовим газам для проходження газового тракту, а відповідно і часу теплопередачі. У результаті маємо більшу температуру вихідних димових газів, що є позитивним ефектом з точки зору їх використання у наступній камері підігріву та відповідно меншу темпера-

туру по об'єму даної печі, що очевидно є негативним ефектом, адже дані втрати теплоти необхідно буде компенсувати на етапі «камера під вогнем», що призводить до додаткових енерговитрат.

### Список використаних джерел:

1. Малахов С. А. Совершенствование технологи обжига углеграфитовой продукции в многокамерных печах обжига закрытого типа: автореф. дис. ... канд. техн. наук : спец. 05.16.02 «Металлургия черных, цветных и редких металлов» / С. А. Малахов. – Владикавказ, 2004. – 30 с

УДК 621.37:621.391

**О. С. Зорін,**

**В. В. Палагін,** д-р техн. наук

Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси

### **МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧІ ДАНИХ ШУМОВИМИ НЕГАУСОВИМИ СИГНАЛАМИ З ЕКСЦЕСНОЮ МОДУЛЯЦІЄЮ**

Сучасні системи зв'язку характеризуються підвищеними вимогами до якості передавання даних в радіотехнічних та телекомунікаційних системах різного призначення. Вдосконалення систем цього класу пов'язано не тільки з технологічним оновленням, але й значною мірою зі створенням досконалих методів обробки сигналів, що являють собою випадкові процеси.

Одним із перспективних напрямків передачі та прийому даних є застосування *шумоподібних* сигналів, які характеризуються високою завадостійкістю. Проте, застосування таких сигналів має ряд особливостей, однією із яких є використання широкосмугових каналів зв'язку, що в цілому ускладнює побудову та розгортання таких системи.

Сучасні дослідження в області обробки сигналів демонструють перспективність іншого підходу, який базується на застосуванні нелінійних динамічних систем з хаотичними режимами для створення радіолокаційних і телекомунікаційних систем. Разом з тим, активно проводяться дослідження із застосування *шумових* сигналів [1], які відкривають нові можливості щодо скритності передачі інформації на рівні фізичного каналу, що особливо актуально при побудові конфіденційних систем.

Особливий інтерес до побудови систем передачі даних представляє застосування шумових сигналів у вигляді негаусових моделей випадкових процесів, які є малодослідженими. Тому метою даної роботи є моделювання системи передачі даних шумовими негаусовими сигналами з ексцесною модуляцією для передачі дискретних повідомлень на фоні адитивних негаусових завод.

Нехай на відліку часу  $(0, T)$  спостерігаються випадковий сигнал  $\xi_i(t)$ ,  $i = 1, N$ , за результатами обробки якого необхідно прийняти рішення про реалізацію гіпотези  $H_i$ , що відповідає прийому шумового

сигналу  $\Delta^{(i)}(t)$  з нульовим математичним очікуванням, дисперсією  $\mu_2$  та ексцесом  $\beta_4$ , який підлягає розрізненню, або рішення про реалізацію гіпотези  $H_0$ , що характеризує відсутність сигналу в каналі зв'язку. Сигнали  $\xi_i(t)$  являють собою адитивну суміш  $\xi_i(t) = \Delta^{(i)}(t) + \eta_i(t)$ , де  $\eta_i(t)$  – негаусова завада з нульовим математичним очікуванням та дисперсією  $\chi_2$ . Кожному сигналу, який приймається, відповідає моментно-кумулянтний опис, представлений у вигляді кінцевої послідовності моментів  $m_i[\{0, \mu_{i2}, \beta_{i3}, \dots, \beta_{i4}\}, \{0, \chi_{i2}, \gamma_{i3}, \dots, \gamma_{i4}\}]$ , де  $\beta_{i3}, \dots, \beta_{i4}$  – кумулянтні коефіцієнти, які описують ознаки шумового негаусового сигналу  $\Delta^{(i)}(t)$ ,  $\gamma_{i3}, \dots, \gamma_{i4}$  – кумулянтні коефіцієнти, які описують ознаки негаусової завади  $\eta_i(t)$ . Зміна параметрів шумового сигналу, зокрема коефіцієнту ексцесу, відповідає процесу модуляції, що характерно для функціонування дискретної системи зв'язку.

Для рішення проблеми обробки негаусових сигналів і завод пропонується використання нового підходу до опису випадкових процесів на основі моментно-кумулянтного представлення випадкових величин та застосування моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез, який добре себе зарекомендував при розв'язанні задач виявлення та розрізнення сигналів [2]. Такий підхід дозволяє отримати більш прості алгоритми обробки сигналів, врахувати параметри негаусової завади і покращити якісні показники виявлення та розрізнення сигналів.

На основі запропонованих математичних моделей та методів обробки шумових негаусових сигналів проведено дослідження системи передачі даних у віртуальному середовищі SIMULINK. Отримані результати надають можливість використання негаусових випадкових процесів в якості носія дискретних повідомлень та ефективно виділяти інформаційне повідомлення при адитивному впливі негаусових завод.

### Список використаних джерел:

1. Калинин В. И., Чапурский В. В. Передача информации на основе шумовых сигналов со спектральной модуляцией // Радиотехника и электроника, 2015, Том 60, № 10, С. 1025-1035.
2. Палагін В. В, Палагіна О. А., Зорін О. С. Комп'ютерне моделювання системи обробки шумових сигналів на фоні негаусових завод // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2018.

**В. А. Іванюк\***, канд. техн. наук,

**Ю. Стертен\*\***

\* Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,

\*\* Норвезький університет науки і технологій, м. Йовік, Норвегія

**ДОСЛІДЖЕННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ ФОРМ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ**

Інтенсивний розвиток і розширення застосування автоматизованих вимірювальних систем значною мірою визначається вдосконаленням методів та засобів інтерпретації результатів вимірювання. Одним із напрямків підвищення ефективності їх роботи є розробка або вибір ефективних математичних та комп'ютерних моделей, від форм яких залежать характеристики числової реалізації, зокрема, можливість роботи системи в реальному часі за обмежених обчислювальних ресурсів.

Базовою математичною моделлю вимірювальних перетворювачів, які можна вважати лінійними стаціонарними динамічними об'єктами із зосередженими параметрами, є звичайне диференціальне рівняння [1]. Залежно від порядку диференціального рівняння, яке описує вимірювальний перетворювач, їх можна поділити на перетворювачі першого, другого або вищого порядків [2].

У таблиці 1 та таблиці 2 представлено еквівалентні моделі перетворювачів першого та другого порядку у формі диференціального рівняння, передатної функції, оператора Вольтерри, рівняння Вольтерри II роду.

Таблиця 1

*Моделі вимірювальних перетворювачів першого порядку*

<b>Вид моделі</b>	<b>Модель</b>
	$y(t)$ – вихідний сигнал; $a, b$ – сталі коефіцієнти; $x(t)$ – вхідний сигнал; $y_0$ – початкове значення.
Диференціальне рівняння	$a \frac{dy(t)}{dt} + by(t) = x(t), y(0)=y_0$
Передатна функція	$Y(s) = \frac{1}{as + b} X(s) + a \frac{1}{as + b} y_0 L_s \{ \delta(t) \}$
Оператор Вольтерри	$y(t) = \frac{1}{a} \int_0^t e^{-\frac{b}{a}(t-\tau)} x(\tau) d\tau + e^{-\frac{b}{a}t} y_0$
Рівняння Вольтерри II роду	$q(t) + \frac{b}{a} \int_0^t q(\tau) d\tau = \frac{1}{a} x(t) - \frac{b}{a} y_0,$ $y = \int_0^t q(\tau) d\tau + y_0$

Моделі вимірювальних перетворювачів другого порядку

Вид моделі	Модель
	$y(t)$ – вихідний сигнал; $a, b$ – сталі коефіцієнти; $x(t)$ – вхідний сигнал; $y_0, y_1$ – початкові значення.
Диференціальне рівняння	$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a \frac{dy(t)}{dt} + by(t) = x(t),$ $y(0) = y_0, \frac{dy(0)}{dt} = y_1, 4b > a^2$
Передатна функція	$Y(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} X(s) +$ $+ \frac{s}{s^2 + as + b} y_1 L_s \{ \delta(t) \} + \frac{1}{s^2 + as + b} (1+a) y_0 L_s \{ \delta(t) \}$
Оператор Вольтерри	$y(t) = \frac{2}{\omega} \int_0^t e^{\sigma(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) f(\tau) d\tau +$ $+ y_0 e^{\sigma t} \left( \cos \omega t - \frac{\sigma}{\omega} \sin \omega t \right) + \frac{1}{\omega} y_1 e^{\sigma t} \sin \omega t$ $\sigma = -\frac{a}{2}, \omega = \frac{1}{2} \sqrt{4b - a^2}, 4b > a^2$
Рівняння Вольтерри II роду	$q(t) + \int_0^t (a + b(t-\tau)) q(\tau) d\tau = x(t) - (bt + a) y_1 - by_0,$ $y = \int_0^t (t-\tau) q(\tau) d\tau + ty_1 + y_0$

Ефективність різних форм моделей вимірювальних перетворювачів оцінено на основі методу обчислювальних експериментів. При комп'ютерній реалізації аналітично еквівалентні форми динамічних моделей є не рівноцінними, оскільки вони реалізуються за допомогою різних обчислювальних схем. Зіставлення декількох видів математичних моделей одного і того ж об'єкта дозволяє вибрати ту чи іншу модель, відповідно до встановлених вимог її використання, за умови найбільш ефективної числової реалізації.

#### Список використаних джерел:

1. Методы и устройства интерпретации экспериментальных зависимостей при исследовании и контроле энергетических процессов / А. Ф. Верлань, Б. Б. Абдусаров, А. А. Игнатченко, Н. А. Максимович. – К. : Наук. думка, 1993. – 208 с.
2. Фрайден Дж. Современные датчики. Справочник / Дж. Фрайден. – М. : Техносфера, 2005. – 592 с.

**Б. Р. Кушлик**, канд. техн. наук,

**О. І. Кушлик-Дивульська**, канд. фіз.-мат. наук,

**А. Л. Сорокіна**

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ

## **ДОСЛІДЖЕННЯ ЯКОСТІ ВІДОБРАЖЕННЯ ШРИФТІВ НА СТРУКТУРОВАНІЙ ПОВЕРХНІ**

Відповідно до ДСТУ 3017-95 за технічними характеристиками та за матеріальною конструкцією на сьогоднішній день виділяється 10 основних типів видань. Більшість продукції – це продукція, яка потребує мінімум післядрукарської обробки, однак вимоги до її якості є постійно високими. Це стосується рекламного сектору та етикетки [1]. Тому важливим є правильний підбір структурованого матеріалу, дослідження якості відображення шрифту різних гарнітур з метою економії матеріалів та отримання бажаного результату.

Відомий ряд робіт стосовно дослідження шрифтів щодо їх зручності для суб'єкта, ступеня легкості читання – виявлено геометричні параметри, що впливають на хорошу читабельність тексту [2], визначено зручність та естетику шрифту [3], також викладено технологію комплексної оцінки якості шрифту, спрогнозовано сприйняття шрифтів.

У цій роботі проведено дослідження якості відтворення шрифтів на різних видах найбільш уживаного дизайнерського картону. Обрано 3 види картону із структурованою поверхнею: Vivaldi Set Canvas з тисненням полотна, Vivaldi Set Deri з тисненням шкіра, Urban Brasilia Powder з тисненням дерево, найбільш відому і просту технологію цифрового друку – лазерний (електрографічний) друк (машина цифрового електрографічного друку Konica Minolta bizhub C224e). Для дослідження було обрано 3 гарнітури шрифтів – Impact (акцидентний), Romantica script (рукописний), Garamond (медієвальний), відповідно, розроблено тестове зображення, файл зображення якого виконано в програмі Adobe Illustrator CS5 та збережено у форматі TIFF.

Використовуючи мікроскоп USB Digital Microscope, здійснено вимірювання товщини основного штриха та розміру пробільного елемента прописної літери «Н» обраних гарнітур трьох кеглів (8 pt, 12 pt, 16 pt) для звичайного та виворітного тексту. Вимірювання параметрів якості для забезпечення більшої точності вимірів проводилися із вибіркою 5 вимірів кожного елемента. Результати всіх вимірювань, обчисленого середнього значення, занесли в таблиці значень якості відтворення текстової інформації на кожному структурованому картоні для вказаних трьох гарнітур шрифтів та відповідних кеглів. З високою кореляцією, близькою до 1, отримано залежності між всіма кеглями на різних структурованих поверхнях для гарнітури Impact (акцидентний); також висока кореляція для гарнітури Garamond (медієвальний), але тільки для поверхні Vivaldi Set Canvas з тисненням полотна – 0,513; 0,515 та 0,99. Майже 1 виявились обчислені коефіцієнти кореляції



Пірсона для кожного кеглю всіх гарнітур на різних вибраних поверхнях, що було і очікуваним. Стосовно взаємозаміни гарнітур на структурованих поверхнях, то висока кореляція на поверхні Vivaldi Set Canvas з тисненням полотна для гарнітури Impact (акцидентний) та Romantica script (рукописний), яка теж виявилась середньою та високою для тих же гарнітур на поверхні Vivaldi Set Deri з тисненням шкіра (0,47; 0,37 та 0,78).

Проведено вимірювання всіх показників для звичайного картону з метою визначення відносної деформації (відхилення параметру якості), яку обчислено за формулою  $\Delta S = \frac{x_k - x_0}{x_0} \cdot 100\%$ ,  $x_k$  – параметр якості

структурованого картону,  $x_0$  – параметр якості звичайного картону. Виходячи із проведених обчислень, побудованих гістограм, найкраще відтворення текстової інформації у шрифту Garamond (медієвального) та найменша деформація на картоні із тисненням полотна. Проведені дослідження будуть продовжені для більшої кількості букв розробленої тестової шкали з метою оптимальності вибору структурованої поверхні в друкуванні невеликих замовлень рекламно-сувенірної продукції.

#### Список використаних джерел:

1. Кушлик Б. Р. Стабілізація друкування малотиражної продукції офсетним друком : монографія / Б. Р. Кушлик, О. І. Кушлик-Дивульська ; за заг. ред. О. М. Величко. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2017. – 162 с.
2. Токарь О. В. Построение ассоциативных правил на основе связи геометрических параметров шрифтов и объективной удобочитаемости / О. В. Токарь, М. А. Зильберглейт // Технологія і техніка друкарства. – 2013. – Вип. 1. – С. 40-46.
3. Токарь О. В. Технологии оценки качества шрифта на допечатной стадии полиграфической подготовки / О. В. Токарь, М. А. Зильберглейт // Технологія і техніка друкарства. – 2014. – Вип. 3. – С. 30-35. – Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/Titd\\_2014\\_3\\_5](http://nbuv.gov.ua/UJRN/Titd_2014_3_5).

УДК 004.9:004.75

**Ю. М. Лисецкий\***, д-р техн. наук,

**Н. П. Каревина\*\***, канд. истор. наук

\* «ЭС ЭНД ТИ УКРАИНА», г. Киев,

\*\* Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, г. Киев

#### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КАК ИНСТРУМЕНТ ИССЛЕДОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Как известно, моделирование – это изучение системы путем построения и исследования ее модели, осуществляемое с определенной целью, состоит в замене проведения экспериментов с системой, проведением экспериментов на ее модели.

Основные виды моделей: эвристические, натурные, математические. Процесс построения моделей достаточно подробно описан в руководствах по исследованию операций. Отметим лишь два момента. Первый состоит в том, что строгих правил для построения моделей не существует. Второй момент конструирования модели выражается принципом последовательного упрощения предположений, то есть отказа от второстепенных содержательных связей.

Наиболее мощными в познавательном смысле являются математические модели, позволяющие предсказывать поведение систем. Математическая модель функционирования системы – это формальные соотношения, устанавливающие связь критериев эффективности с обликом системы и с условиями ее действий, то есть с закономерностью поведения системы. В данном случае эффективность понимается в широком смысле: функциональная, технологическая, стоимостная и др. В рамках математического моделирования сложилось два подхода: аналитический и имитационный.

Аналитический подход основывается на построении формульных зависимостей, связывающих параметры и элементы системы. Однако при рассмотрении сложных систем нахождение строгих математических зависимостей весьма затруднительно.

Имитационный (статистический) подход в моделировании базируется на использовании предельной теоремы Чебышева при вероятностном представлении параметров системы. На основе предварительного изучения моделируемой системы достаточно просто определяются виды и значения законов распределения случайных величин параметров. В рамках имитационного подхода используются аналитические зависимости между параметрами элементов системы, однако эти зависимости имеют более обобщенный, упрощенный характер. Имитационные модели могут быть детерминированными или стохастическими. В последних используется датчик случайных чисел и статистическая обработка частных результатов.

Мощный прорыв в области создания математических моделей был сделан А.Г. Ивахненко, который предложил объективизировать процесс создания моделей методом их самоорганизации, названного автором МГУА (метод группового учета аргументов) [1]. А.Г. Ивахненко исходил из положения теории самоорганизации, гласящего, что универсальный метод продуцирования модели – это перебор различных вариантов моделей при постепенном увеличении их сложности [2]. Оптимальная модель находится при сложности, адекватной сложности системы. Компьютер синтезирует модель по части экспериментальных данных («обучающая последовательность») и сверяет ее точность с остальными исходными данными («контрольная последовательность»). При постоянном повышении сложности модели критерий сначала снижается, а затем начинает повышаться: сложность модели превосходит сложность моделируемой системы. Компьютер находит минимум критерия и тем самым единственную модель оптимальной сложности. Основное преимущество МГУА состоит в том, что адекватность модели порождающей ее системы обеспечивается самим процессом моделирования.

Таким образом, модель – это объект, который имеет сходство в некоторых отношениях с реальной системой, служит средством описания и/или объяснения, и/или прогнозирования поведения реальной системы. Важнейшим качеством модели является то, что она дает упрощенный образ, отражающий не все свойства реальной системы, а только те, которые существенны для исследования. Поэтому любая модель строится и исследуется при определенных допущениях, гипотезах и ограничениях.

#### Список использованных источников:

1. Ивахненко О. Г. Метод группового учета аргументів – конкурент методу стохастичної апроксимації / О. Г. Ивахненко // Автоматика. – 1968. – № 3. – С. 58-72.
2. Ивахненко А. Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем / А. Г. Ивахненко. – Киев : Наук. думка, 1982. – 296 с.

УДК 539.375

**Т. В. Магеровська**, канд. фіз.-мат. наук,

**Б. Б. Пахолок**, канд. фіз.-мат. наук,

**Я. М. Пелех**, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

### МОДЕЛЮВАННЯ І АНАЛІЗ РОЗПОДІЛУ МАГНІТНОГО ПОЛЯ У МАГНІТОТВЕРДОМУ ШАРІ, ЩО ЗНАХОДИТЬСЯ ЗА УМОВ ОДНОЧАСНОЇ ДІЇ ГАРМОНІЙНОГО ЗА ЧАСОМ ТА ПОСТІЙНОГО МАГНІТНОГО ПОЛІВ

Розглядається електропровідний шар із магнітотвердого матеріалу товщиною  $l$ . Шар знаходиться під впливом зовнішнього магнітного поля, коли на обидвох поверхнях  $Z = 0; 1$  задано дотичну складову напруженості магнітного поля

$$H_y(0;t) = H_y(1;t) = H_0 + H_1 \cos \omega t, \quad (1)$$

де  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $\nu$  – частота,  $H_0$  і  $H_1$  – відповідно стала складова та амплітуда гармонійної складової напруженості магнітного поля.

Із рівнянь електродинаміки для області шару отримаємо рівняння :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \lambda t^2 \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (2)$$

яке пов'язує складові  $H_y \equiv H(z;t)$  напруженості магнітного поля і  $B_y \equiv B(z;t)$  магнітної індукції. Для магнітотвордих матеріалів залежність між індукцією  $B$  та напруженістю  $H$  магнітного поля має вигляд динамічної петлі гістерезису, аналітичний вигляд якої має вигляд:

$$B = \beta \cdot \arctg(\alpha H), \quad H = \sqrt{1 - \chi^2 H - \chi \omega^{-1} \dot{H}}. \quad (3)$$

Тут  $\beta = 2B_s / \pi$ ,  $\alpha = \pi(\mu - 1)\mu_0 / (2B_s)$ ,  $\chi = H_c / H_m$  при  $H < H_m$  і  $\chi = H_c / H_0$  при  $H > H_m$ ;  $H_0$  і  $H_m$  – напруженість магнітного поля на поверхні тіла та відповідна гістерезисному насиченню;  $H_c$  – коерцитивна сила;  $B_s$  – індукція насичення,  $\mu$  – початкова відносна магнітна проникність середовища,  $\mu$  – магнітна стала,  $\lambda$  – електропровідність. Крапка над величиною означає частинну похідну за часом.

Розв'язок нелінійної задачі електродинаміки (1)-(3) шукаємо у вигляді ряду за малим параметром  $\varepsilon_* = H_1 / H_0, H_1 < H_0$ , а також використовуючи двосторонні наближені методи [1].

Як приклад, розглядається шар із магнітотвердого матеріалу. Найбільш характерним представником такого матеріалу з великим значенням коерцитивної сили, який застосовується для запису інформації є сплав K25X30M3, характеристики якого наступні:

$$H_c = 62,4 \cdot 10^3 \text{ А/м}, H_m = 62,93 \cdot 10^3 \text{ А/м}, B_s = 1,16 \text{ Т}, B_r = 1,15 \text{ Т}, \mu_n = 14,67.$$

При цьому вважаємо  $\varepsilon_* = 0,1$ , а товщину шару приймемо  $l = 2 \cdot 10^{-6}$  м, так як даний сплав виготовляють у вигляді тонких листів саме такої товщини. Зауважимо, що в такому випадку для даних характеристик матеріалу відносна глибина проникання магнітного поля  $\gamma$  (для немагнітних матеріалів) не перевищує одиниці ( $\gamma < 1$ ) навіть для частот менших за  $\nu = 5 \cdot 10^9$  Гц, які розглядаються в даній роботі. Для магнітних матеріалів глибина проникання  $\gamma_e$  є пропорційною  $\sqrt{\mu_e}$ . Так як  $\mu_e \leq \mu = 14,67$ , то  $\gamma_e < \sqrt{\mu_e} \cong 3,83$ .

Із проведених розрахунків і аналізу розв'язків випливає, що є суттєвим врахування впливу коерцитивної сили на розподіл напруженості та індукції магнітного поля у магнітотвердих тілах, які знаходяться за умов одночасної дії гармонійного за часом та постійного магнітних полів.

Глибина проникання магнітного поля в магнітотвердих матеріалах збільшується в  $\sqrt{1 + \chi}$  разів у порівнянні з магнітом'яким, тобто розподіл амплітуд перших гармонік напруженості та індукції магнітного поля носить більш приповерхневий характер.

### Список використаних джерел:

1. Pelekh Ya. M. Nonlinear Numerical Methods for the Solution of Initial Value Problem for Ordinary Differential Equations / Ya. M. Pelekh, S. M. Mentynskiy, R. Ya. Pelekh // Scientific Bulletin of Mukachevo State University. Journal of Scientific Articles. – 2016. – Issue 20(15). – P. 65-75.

УДК 539.3

**Р. С. Мусій**, д-р фіз.-мат. наук,

**Н. Б. Мельник**, канд. фіз.-мат. наук,

**О. Г. Орищин**, канд. фіз.-мат. наук,

**Л. В. Гошко**, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет “Львівська політехніка”, м. Львів

## **ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ЦИЛІНДРА З ТОНКИМ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИМ ПОКРИТТЯМ ЗА НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ДІЇ**

У сучасних приладах і пристроях як конструктивні елементи використовують електропровідні немагнітні циліндри з нанесеним тонким електропровідним покриттям (ЕЦТЕП). В процесі їх роботи та експлуатації вони зазнають різних фізичних дій – силових, температурних та електромагнітних. Ці дії створюють в ЕЦТЕП відповідний термонапружений стан, аналіз якого необхідний для прогнозування його робоздатності як конструктивного елемента.

Розглядається ЕЦТЕП радіуса  $R$  з тонким електропровідним циліндричним покриттям товщини  $h = R_1 - R$ , де  $R_1$  – його зовнішня поверхня. Циліндр віднесений до циліндричної системи координат  $(r, \varphi, z)$ , вісь  $Oz$  якої співпадає з його віссю симетрії.

ЕЦТЕП знаходиться за дії однорідного нестационарного електромагнітного поля (ЕМП), заданого значеннями осьової компоненти  $H_z$  вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H} = \{0; 0; H_z\}$  на його поверхні  $r = R_1$ , що є тепло ізольованою і вільною від зовнішнього силового навантаження. Дія нестационарного ЕМП створює в циліндрі (Ц) і тонкому покритті (ТП) нестационарні об'ємно розподілені джерела джоулевого тепла  $Q$  і пондеромоторні сили  $\vec{F} = \{F_r; 0; 0\}$ . Ці два фізичні чинники створюють в Ц і ТП нестационарні поля температури  $T$  і механічних напружень, що описуються тензором динамічних напружень  $\hat{\sigma}$ . Значення температури  $T$  і напружень  $\hat{\sigma}$ , за якими проводиться оцінка робоздатності ЕЦТЕП, залежать як від амплітудно-частотних характеристик ЕМП, так і від фізико-механічних характеристик циліндра і покриття, а також від електромагнітних, теплових і механічних умов на поверхні їх з'єднання.

Для визначення термонапруженого стану ЕЦТЕП побудовано математичну модель, яка використовує співвідношення термодинаміки двошарового електропровідного циліндра [1]. Приймається, що на поверхні з'єднання Ц і ТП забезпечуються умови ідеального електромагнітного, теплового і механічного контактів [2]. За певних значень параметрів ЕМП температура  $T$  і компоненти  $\sigma_{jj}$  ( $j = r, \varphi, z$ ) тензора  $\hat{\sigma}$  досягають величин, за яких відповідні їм інтенсивності напружень  $\sigma_i^{II}$  у циліндрі та  $\sigma_i^{II}$  у покритті можуть перевищувати межу плинності матеріалів циліндра  $\sigma_d^{II}$  чи покриття

$\sigma_d^{II}$ . Важливим для функціонування ЕЦТЕП як конструктивного елемента є також збереження властивостей його контактної з'єднання. ЕЦТЕП втрачає такі властивості за умови, що максимальні значення інтенсивностей напружень на поверхні з'єднання  $r = R$  у циліндрі  $\sigma_{i*}^{II}$  чи у покритті  $\sigma_{i*}^{II}$  перевищують межу міцності  $\sigma_M$  контактної з'єднання.

Для встановлення граничних значень параметрів ЕМП, дія якого створює термонапружений стан ЕЦТЕП потрібно розв'язавши на основі запропонованої математичної моделі динамічну задачу термомеханіки для ЕЦТЕП обчислити величини інтенсивностей напружень  $\sigma_i^{II}$  і  $\sigma_{i*}^{II}$ , а також  $\sigma_{i*}^{II}$  і  $\sigma_{i*}^{II}$  і порівняти їх із відомими з експериментальних досліджень [3] значеннями  $\sigma_d^{II}$  і  $\sigma_d^{II}$  та  $\sigma_M$ .

Розв'язок динамічної задачі термомеханіки для ЕЦТЕП побудовано використовуючи апроксимацію визначальних функцій (компоненти  $N_z$  вектора  $\vec{N}$ , температури  $T$  і радіальної компоненти  $U_r$  вектора переміщень  $\vec{U} = \{U_r; 0; 0\}$ ) за радіальною змінною  $r$  квадратичними поліномами та інтегральне перетворення Лапласа за часом  $t$  за однорідної дії нестационарного ЕМП.

Чисельно проаналізовано термонапружений стан і роботоздатність ЕЦТЕП за дії електромагнітного імпульсу.

#### Список використаних джерел:

1. Мусий Р.С., Мельник Н.Б., Терлецкий Р.Ф., Шимчак И. Термонапряженное состояние и несущая способность биметаллических цилиндров при импульсных электромагнитных воздействиях // Теоретическая и прикладная механика. 2013. № 6 (52). С. 89-98.
2. Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Гачкевич А.Р., Чернявская Л.В. Термоупругость электропроводных тел. К.: Наук. думка, 1977. 248 с.
3. Мэттьюз Ф., Ролингс Р. Композитные материалы. Механика и технология. М.: Техносфера, 2004. 408 с.

УДК 004.94

#### В. В. Понеділок

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

#### АПАРАТНО-ОРІЄНТОВАНИЙ МЕТОД ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ СИГНАЛІВ

Операції цифрового диференціювання в алгоритмах керування сучасними технічними системами використовуються досить широко в зв'язку з активним впровадженням цифрових технічних засобів. Операції чисель-

ного диференціювання застосовуються, як в традиційних регуляторах, так і при реалізації більш складних законів регулювання [1]. З іншої сторони, використання цифрових диференціюючих пристроїв в системах неелектричного типу є порівняно складною і не завжди економічно виправданою задачею. Тому розробка апаратно-орієнтованих методів диференціювання, які б дозволяли достатньо точно із забезпеченням стійкості до завад виконувати диференціювання сигналів є актуальною задачею.

Проблема полягає в диференціюванні сигналу  $y(t)$  в умовах наявності завад. Основна складність – нестійкість розв'язку  $x(t) = y'(t)$ , який проявляється внаслідок наявності шумів у вихідному сигналі. Оскільки задача чисельного диференціювання зашумленого сигналу  $y(t)$  відноситься до класу некоректно поставлених задач [2], то традиційний підхід при розв'язуванні таких задач базується на використанні наближених методів, зокрема, на застосуванні методів регуляризації [2] при розв'язуванні інтегрального рівняння

$$\int_0^t x(\tau) d\tau = y(t) - y_0. \quad (1)$$

Без зменшення загальності вважатимемо  $y_0 = 0$ .

Згідно [2] замість (1) можна розв'язувати інтегральне рівняння Вольтерри другого роду

$$\alpha x(t) + \int_0^t x(\tau) d\tau = y(t),$$

де  $\alpha$  – параметр регуляризації.

У результаті застосування перетворення Лапласа отримаємо

$$\alpha X(s) + \frac{1}{s} X(s) = Y(s), \quad (2)$$

де  $s$  – змінна Лапласа.

Виконавши перетворення (2) матимемо

$$X(s) = \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{-\frac{1}{\alpha}}{\alpha s + 1} \right) Y(s). \quad (3)$$

Структурна схема моделі (3) побудована в Simulink приведена на рис. 1. Як бачимо, корегуючу диференціюючу ланку можна отримати шляхом паралельного з'єднання ланки підсилення із коефіцієнтом  $1/\alpha$

та інерційної ланки  $\frac{-1/\alpha}{\alpha s + 1}$ .

Апаратну реалізацію відповідно до запропонованого підходу здійснено у вигляді диференціюючих пристроїв керування, зокрема, гідропневматичний диференціатор, диференціюючий пристрій систем автоматики неелект-

ричного типу, пружинний диференціатор теплових сигналів, діафрагмовий пневматичний диференціатор, диференціатор крутного моменту, диференціатор гідропневмомеханічних сигналів, пневматичний диференціатор. На підтвердження алгоритму отримано патенти на корисні моделі [3].

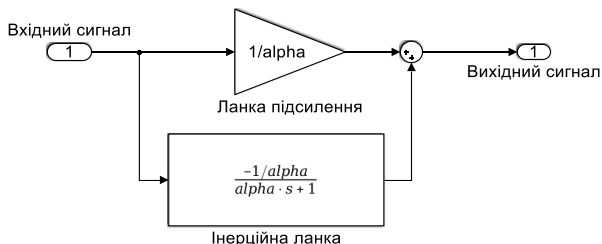


Рис 1. Структурна схема оператора (2)

### Список використаних джерел:

1. Методы и устройства интерпретации экспериментальных зависимостей при исследовании и контроле энергетических процессов / А. Ф. Верлань, Б. Б. Абдусатаров, А. А. Игнатченко, Н. А. Максимович. – К. : Наукова думка, 1993. – 208 с.
2. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1986. – 288 с.
3. Божок А. М. Апаратно-орієнтований регуляризаційний метод диференціювання сигналів / А. М. Божок, В. А. Іванюк, В. В. Понеділок // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2017. – Вип. 16. – С. 14-21.

УДК 004.32

**Н. Ю. Постолатій,**

**Л. Л. Прокоф'єва,**

**С. А. Положаснко,** д-р техн. наук

Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса

### МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ДИФУЗІЇ У БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ СИСТЕМАХ

Виконано дослідження гладкості фронту поділу компонент (фаз) при дифузії багатокомпонентних (гетерогенних) систем, які представлено рідинами, що не змішуються за час дифузійного руху. Причому, ці рідини можуть являти собою як ньютонівські, так і неньютонівські рідини. Типовим прикладом дифузії такого типу є змішування різнорідних рідин або утворення колоїдних суспензій. При цьому просування фронту поділу компонент багатокомпонентної системи характеризується суттєвим відхиленням від гладкості фронту – тобто утворенню «пальців» однієї з фаз на границі  $\Gamma$  області дифузійного руху  $\Omega$  і, навіть, «застійних» зон в сере-



дині  $\Omega$ . Таку картину дифузії зумовлено наявністю граничного градієнта тиску  $G$  через в'язкопластичність хоча б однієї з дифундуючих компонент, що визначає для неї нульову швидкість дифузії  $\sigma = 0$ , якщо змушуюча сила (тиск  $P$  в області  $\Omega$ ) приймає значення  $P < G$ .

Відомі дослідження щодо визначення гладкості границі розділу компонент гетерогенної системи, що фільтрується (в пластових системах), і які були використані при розв'язанні задачі на утворення «застійних зон», в тому числі і для компонент, які мають аномальний характер, а їх фільтрація характеризується законом з граничним градієнтом [1, с.47; 2, с.24]. За умову, що визначає границю розділу компонент гетерогенної системи, яка фільтрується, було розглянуто «стрибок» насиченості в функції Баклея-Левверетта [2, с.355]

$$J(S) = \frac{k_1^0(S_1)}{\mu_1 k_1^0(S_1) + \mu_2 k_2^0(S_2)}, \quad (1)$$

де  $k_1^0(S_1)$  та  $k_2^0(S_2)$  – відносні фазові проникності для компонент гетерогенної системи, що фільтрується;  $\mu_1$  та  $\mu_2$  – їх в'язкості;  $S_1$  та  $S_2$  – насиченості пористого середовища компонентами гетерогенної системи, відповідно.

Застосовуючи рівняння «стрибка» насиченості виду (1) та відомі рівняння дифузії двофазних систем з граничним градієнтом  $G$  [2, с.14], отримано математичну модель дифузійного руху багатокомпонентних систем для випадку, коли число компонент  $l \geq 2$ . При цьому кожна з пар компонент, що дифундують, утворюють границю, гладкість якої слід дослідити. Математичну модель процесу дифузії у багатокомпонентних системах, що враховує властивості «гладкості» фронту поділу фаз представлено у вигляді системи варіаційних нерівностей

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial S_l}{\partial t}(v - S_l) - \int_{\Omega} J(S_l) \left\{ \Psi_l \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial S_l}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial(v - S_l)}{\partial z_i} \right] dz \right\} + \\ & + \int_{\Omega} J(S_l) \left\{ \Psi_l \left[ \frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2} |v| \right] \right\} dz - \int_{\Omega} J(S_l) \left\{ \Psi_l \left[ \frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2} |S_l| \right] \right\} dz \geq (f, v - S_l), \\ & l = \overline{1, n}; \Psi_l = (1 - S_l), \forall v, S_l \in K \end{aligned} \quad (2)$$

з початковими та граничними умовами

$$S_l(0, z) = S_0(z), \quad l = \overline{1, n}; \quad (\partial P / \partial \eta) = 0. \quad (3)$$

У виразах (2), (3) позначено:  $v$  – пробну функцію;  $f$  – змушуючу функцію;  $t, z$  – незалежні часову та просторову змінні, відповідно;  $\eta$  – нормаль до границі  $\Gamma$ ,  $n$  – число дифундуючих (фаз).

Для кожної з границь пар дифундуючих фаз виконано формальні заміни  $S_j = (1 - S_{j+1})$ ,  $j = \overline{1, (n-1)}$ , що дало можливість еквівалентно

замінити систему з  $n$  варіаційних нерівностей виду (2), (3) на сукупність  $(n-1)$  систем, що налічують по дві варіаційні нерівності (для  $j$ -ї та  $(j+1)$ -ї фази), причому кожна з цих пар варіаційних нерівностей можна розв'язувати незалежно одну від іншої, що значно спрощує чисельну реалізацію вихідної задачі.

### Список використаних джерел:

1. Бернадинер М. Г. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей / М. Г. Бернадинер, В. М. Ентов. – М. : Наука, 1975. – 199 с.
2. Верлань А. Ф. Математическое моделирование аномальных диффузионных процессов / А. Ф. Верлань, С. А. Положаенко, Н. Г. Сербов. – К. : Наук. думка, 2011. – 416 с.

УДК 539.375

**Ю. І. Прокопович\***,

**З. О. Гошко\*\***, канд. фіз.-мат. наук,

**І. С. Костенко\*\***, канд. фіз.-мат. наук,

**Я. М. Пелех\*\***, канд. фіз.-мат. наук,

\* Інститут прикладних проблем механіки і математики

ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів,

\*\* Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

### ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО СТАНУ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПРУЖНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ ТА ВНУТРІШНЬОЮ ТРІЩИНОЮ

Розробка методів розрахунку оболонок, що знаходяться в пружному середовищі та ослаблені дефектами типу тріщин і конструктивними розрізами, має велике практичне значення.

Розглянемо замкнуту пружно-пластичну ізотропну циліндричну оболонку завтовшки  $2h$  з пружним заповнювачем у вигляді нескінченного циліндра товщиною  $2h_s$ , який з'єднаний з оболонкою. Віднесемо цю оболонку до триортогональної системи координат  $\alpha, \beta, \gamma$ . Нехай оболонка ослаблена поздовжньою внутрішньою тріщиною завдовжки  $2l_0$ , яка розміщена в перерізі  $\beta = 0$  і обмежена лініями паралельними координатним. Відстань від границі тріщини до зовнішньої і внутрішньої поверхонь оболонки  $2d_2$  і  $2d_1$  відповідно. Вважатимемо, що оболонка і береги тріщини завантажені лише симетричними відносно лінії тріщини зусиллями та моментами. Під час деформації береги тріщини не контактують, а її вершини знаходяться в однакових умовах. Обмежимося розглядом досить глибоких тріщин ( $d_3 = d_1 + d_2 \leq 0,6h$ ). Розміри тріщини, рівень зовнішнього навантаження та

властивості матеріалу передбачаємо такими, що в околі тріщини по всій глибині оболонки вузькою смугою розвиваються пластичні деформації. Тепер, відповідно до  $\delta_c$  – моделі, зони пластичних деформацій замінимо поверхнями розриву пружних переміщень і кутів повороту, а реакцію матеріалу пластичної зони на пружну – відповідними зусиллями та моментами. Вважатимемо, що на продовженні тріщини в глибину до зовнішньої і внутрішньої поверхонь оболонки, тобто в області  $x \in ]-x_0; x_0[$ ,  $\gamma \in [-h; -h + 2d_1] \cup [h - 2d_2; h]$  діють постійні напруження  $\sigma^0 = (\sigma_B + \sigma_T) / 2$ , де  $\sigma_B$  та  $\sigma_T$ , границя міцності та поріг текучості матеріалу. В пластичних зонах на продовженні тріщини по довжині, тобто в областях  $\gamma \in [-h; h]$ ,  $\alpha \in ]-\alpha_p; \alpha_0[ \cup ]\alpha_0; \alpha_p[$ ,  $\alpha_p = l_p / R$ ; ( $l_p$  – довжина пластичної зони на продовженні тріщини) діють невідомі нормальне зусилля  $N$  та згинний момент  $M$ , які у випадку ідеально пружно-пластичного матеріалу задовольняють одну з умов пластичності Треска:

у вигляді умови пластичності поверхневого шару

$$\frac{N}{2h\sigma_T} + \frac{3|M|}{2h^2\sigma_T} = 1, \quad (1)$$

або умову пластичного шарніру

$$\left( \frac{N}{2h\sigma_T} \right)^2 + \frac{|M|}{h^2\sigma_T} = 1. \quad (2)$$

Під час визначення збуреного напруженого стану оболонки в околі тріщини за вихідні візьмемо рівняння теорії тонких оболонок в переміщеннях, які враховують наявність тріщини та реакцію з боку заповнювача. Цю реакцію визначатимемо наближено за допомогою співвідношень тривимірної теорії пружності для циліндра.

Приймемо, що оболонка та заповнювач виготовлені із однорідних ізотропних матеріалів. Використовуючи методику [1], задача про визначення збуреного напруженого стану в оболонці з тріщиною зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь. Алгоритм чисельного розв'язування таких систем наведено в [1].

Результати проведених обчислень відповідають умові пластичності (1). Максимальне відхилення результатів за умов (1) та (2) становить 8%.

Врахування пружного середовища приводить до збільшення несучої здатності оболонки, тобто до зменшення розкриття тріщини та розмірів зон пластичності. Вибір умов пластичності мало впливає на її міцнісні характеристики. Врахування зміцнення приводить до зменшення розкриття тріщини та довжини пластичної зони.

Отримані тут результати можна використати за наближене значення збуреного напруженого стану в замкнутій циліндричній двошаровій оболонці з тріщиною у верхньому шарі.

## Список використаних джерел:

1. Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. Львів: Вид-во «СПОЛОМ», 2003. 320 с.

УДК 004.942:519.876.5

**В. А. Федорчук**, д-р техн. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

### **МОДЕЛЮВАННЯ НЕОДНОРІДНИХ НЕЛІНІЙНИХ ПРОСТОРОВО ПРОТЯЖНИХ ОБ'ЄКТІВ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ОСНОВІ ЗАСТОСУВАННЯ ОБОРОТНИХ КОМП'ЮТЕРНИХ МОДЕЛЕЙ**

При розв'язуванні задач проектування, керування, контролю і діагностики динамічних систем, що містять просторово протяжні неоднорідні нелінійні елементи виникає необхідність створення для них адекватних комп'ютерних моделей. Традиційно такі моделі реалізуються за допомогою серійних пакетів комп'ютерного моделювання, в яких використовуються скінченноелементні солвери, що потребують значних обчислювальних ресурсів. Однак, для задач із обмеженим часом отримання розв'язків, використання згаданих програмних засобів і методів, що в них реалізуються, є проблематичним.

Пропонується інший підхід до числової реалізації моделей просторово протяжних неоднорідних нелінійних елементів на основі використання оборотних комп'ютерних моделей.

Суть методу полягає у отриманні апроксимаційної моделі об'єкта з розподіленими параметрами шляхом дискретизації вихідної моделі за просторовою змінною; проведення еквівалентних перетворень отриманої моделі з метою виділення реальних фізичних параметрів моделі, що дає змогу на рівні структурних елементів моделі відтворювати неоднорідність просторових ділянок об'єкта; доповнення структурних елементів моделі нелінійними залежностями.

Для прикладу розглянемо об'єкт з розподіленими параметрами, а саме довгий пружний стержень, швидкість зміщення перерізів якого  $V(x, t)$ , що викликана дією погонної зовнішньої сили  $F(x, t)$  описується диференціальним рівнянням в частинних похідних з нульовими граничними та початковими умовами

$$m(x) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} + h(x) \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} - k \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial F(x, t)}{\partial t}, \quad (1)$$

де  $m(x)$  – погонна маса стержня;  $h(x)$  – погонний коефіцієнт опору;  $k$  – коефіцієнт пружності;  $F(x, t)$  – погонна зовнішня сила;  $V(x, t)$  – швидкість руху перерізу стержня.

Застосувавши метод прямих до рівняння (1) отримаємо систему з  $n$  звичайних диференціальних рівнянь, а після інтегрування отриманої системи маємо:

$$m_i \frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} + h_i \frac{dx_i(t)}{dt} - k(x_{i-1}(t) - 2x_i(t) + x_{i+1}(t)) = F_i(t), i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

де  $x_i(t)$  – функція зміни координати  $i$ -го перерізу. При цьому складові моделі (2) мають конкретний фізичний зміст: перший доданок відображає силу інерції, другий – силу опору руху, третій – силу пружності і т. д. Тому для неоднорідних об'єктів можна змінювати фізичні параметри окремих рівнянь моделі, а також у кожне із рівнянь вносити додатково нелінійні залежності, які можна легко реалізувати у відповідній підсистемі комп'ютерної моделі (наприклад, використання гістерезисної нелінійної залежності дозволяє відтворити в структурній моделі ефект втрати частини енергії деформації внаслідок внутрішнього тертя або за допомогою нелінійного елемента із зоною нечутливості можна відтворювати властивості об'єктів з розподіленими параметрами із з'єднаннями, що мають люфт). Моделі типу системи (2) можна також отримати безпосередньо із фізичних законів, як це робиться у роботі [1].

Побудована за системою (2) комп'ютерна модель складається з  $n$  блоків, кожен з яких реалізує відповідне диференціальне рівняння системи. Особливістю цієї системи рівнянь є те, що кожне із її рівнянь пов'язане з двома сусідніми рівняннями через функції  $x_{i+1}(t)$  та  $x_{i-1}(t)$ , тому кожен блок, що реалізує  $i$ -те рівняння, має один вихід  $x(t)$  та два входи, на які подаються, відповідно,  $x_{i+1}(t)$  та  $x_{i-1}(t)$ . Це зумовлює присутність в моделі прямих і зворотних зв'язків, які дають змогу встановити причинно-наслідкові залежності від першого блоку до останнього і навпаки, тобто комп'ютерна модель внаслідок цього володіє властивістю оборотності.

Прикладом ефективного застосування оборотних нелінійних комп'ютерних моделей може бути створена за описаною вище методикою модель бурильної колони бурової установки [2]. Модель дає змогу відображати поздовжні коливання та обертальний рух колони, а також процес взаємодії долота із забоем. При цьому враховується: неоднорідність бурової колони внаслідок використання різнотипних бурильних труб; деформація бурової вишки при навантаженні та її інертність; сили опору, викликані взаємодією промивної рідини зі стінками колони; сили опору при взаємодії долота з породою.

### Список використаних джерел:

1. Navarro-López E. Bit-sticking phenomena in a multi-degree-of-freedom controlled drill string. *Exploration and Production: Oil and Gas Review*. 2010. Vol. 8(2). P. 70-75.
2. Fedorchuk V. Modelling of typical distributed elements of the mechanical system of the drilling rig. *Electronic modelling*. 2010. Vol. 32. № 3. P. 95-110.

**К. М. Філоненко,**  
**О. О. Фомін,** канд. техн. наук,  
**О. Д. Рубан**

Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса

## **ВИКОРИСТАННЯ ЗГОРТАЛЬНИХ НЕЙРОНИХ МЕРЕЖ ДЛЯ ВИДІЛЕННЯ ІНФОРМАТИВНИХ ОЗНАК, ЩО ВПЛИВАЮТЬ НА ЯКІСТЬ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ**

Стрімкий розвиток інформаційних і комунікаційних технологій тягне за собою застосування таких методів в різних видах людської діяльності, зокрема, в сучасній освіті. В останні десятиліття особливу популярність здобуло "дистанційне" навчання, проте все ще існує потреба в ефективних методиках його використання.

Метою представленої роботи є пошук ознак, які найбільшою мірою впливають на якість освіти.

Методи оцінки якості дистанційної освіти діляться на статичні і внутрішні. Статичні методи засновані на вивченні, зіставленні, порівнянні отриманих цифрових даних між собою або зі зразком, їх узагальнення, тлумачення і формування наукових і практичних висновків [1, с.494]. Внутрішні методи використовують ідею аналізу одержуваних цифрових даних, використовуючи вбудовані (або додаткові) інструменти системи.

У представленій роботі розвивається метод виділення інформативних ознак, що впливають на якість дистанційного навчання за допомогою когнітивних карт [2, с.150-151]. Найбільш близькою і точною реалізацією когнітивних карт є нейронні мережі (НМ).

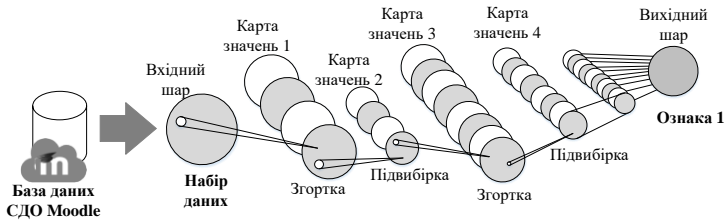
НМ мають ряд переваг при побудові когнітивних карт. Але, найбільш істотним недоліком їх використання в процесі дистанційного навчання є великі розмірності НМ і їх низька швидкість збіжності.

У завданнях ШІ з недавніх пір набули поширення згорткові нейронні мережі (ЗНМ) завдяки своїм властивостям: локальне сприйняття; концепція поділованих ваг; узагальнення [3], за рахунок чого виникає достатня стійкість до перешкод, а головне – невеликою розмірністю щодо НМ.

Такі НМ пропонується використовувати в СДН при побудові когнітивних карт, зокрема, для виділення інформативних ознак, що впливають на якість дистанційного навчання.

Синтез ЗНМ для побудови когнітивних карт відбувається наступним чином: крок 1 – створення ЗНМ, крок 2 – підключення ЗНМ до СДН Moodle, крок 3 – експорт даних з БД СДН Moodle, крок 4 – формування наборів даних, крок 5 – подача наборів даних на вхід ЗНМ, крок 6 – обробка даних, застосування фільтрів, формування навчальних вибірок і підвибірок, крок 7 – формування набору ознак, крок 8 – розрахунок ваги для кожного набору ознак, крок 9 – виділення ознак з найбільшою вагою. Після виділення ознак будується когнітивна карта.

Багатощарова структура ЗНМ представлена на рис.1.



*Рис. 1. Багатощарова структура СНР*

Як джерело даних використовувалася БД СДН Moodle ОНПУ (URL: <http://dl.it-school.com.ua>).

**Висновки.** В роботі продемонстровано підхід синтезу згортальних нейронних мереж для побудови когнітивної карти і визначення найбільш інформативних ознак, що впливають на якість дистанційного навчання. Перевагами такого підходу перед використанням інтелектуальних нейронних мереж або простого побудови когнітивної карти є висока швидкість обробки даних, автоматизація процесу розрахунку ваги для кожної ознаки, висока стійкість до перешкод.

#### Список використаних джерел:

1. Савюк Л.К. Правовая статистика : учебник / Л.К. Савюк. – М.: Юристъ, 2004. – 588 с.
2. Филоненко Е.М. Использование когнитивных карт для выделения факторов успеваемости студентов дистанционной формы обучения / Е.М. Филоненко, А.А. Фомин, В.Д. Павленко. // Сучасні інформаційні технології 2017 (МІТ-2017): Матеріали сьомої Міжнародної конференції студентів і молодих науковців. – ОНПУ. – Одеса, 2017. – №2 – 246 с.
3. Остапец А. Deep Learning [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.machinelearning.ru/wiki/images/2/22/Deep.pdf>

УДК 534.1

**О. Ю. Швець**, д-р фіз.-мат. наук,

**В. О. Сіренко**, канд. техн. наук

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ

### **СИМЕТРИЧНІ СЦЕНАРІЇ ПЕРЕХОДУ ДО ДЕТЕРМІНОВАНОГО ХАОСУ В СИСТЕМАХ З ОБМЕЖЕНИМ ЗБУДЖЕННЯМ**

Розглянуто маловимірні математичні моделі коливань вільної поверхні рідини у циліндричному баку, платформа якого збуджується джерелом енергії обмеженої потужності. Такі системи належать до класу неідеальних за Зоммерфельдом – Кононенком динамічних систем. Головна увага приділяється опису та ретельному вивченню сценаріїв переходу до детермінованого хаосу в таких задачах.

На підставі, розробленої в роботах [1-3] методики для чисельного дослідження явищ детермінованого хаосу в динамічних системах проведений великий обсяг комп'ютерних обчислень з метою виявлення нових сценаріїв переходу до хаосу. Був описаний симетричний сценарій переходу до хаосу, а також сценарій переходу до гіперхаосу, які поєднують у собі характерні особливості, притаманні класичним сценаріям Фейгенбаума та Помо – Маннеллія. На основі ретельного аналізу різноманітних характеристик регулярних та хаотичних атракторів системи «бак з рідиною – джерело збудження» (фазові портрети, перерізи Пуанкаре, розподіли природних інваріантних мір) було обґрунтоване існування виявлених симетричних сценаріїв.

### Список використаних джерел:

1. Shvets A. Yu. Deterministic chaos of a spherical pendulum under limited excitation // Ukrainian Mathematical Journal. – 2007. – Vol. 59, № 4. – P. 602-614.
2. Shvets, A. Yu., Sirenko, V. O. Peculiarities of transition to chaos in nonideal hydrodynamics systems // Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal. – 2012. – 2, P. 303-310.
3. Shvets, A. Yu., Sirenko, V. O. New ways of transitions to deterministic chaos in nonideal oscillating systems // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2015. – (1(99)). – P. 45-51.

УДК 519.3

**Н. Ю. Щестюк**, канд. фіз.-мат. наук,  
**А. Семенюк**

Національний університет «Києво-Могилянська академія», м. Київ

### СПІВІСНУВАННЯ КОГЕРЕНТНОСТІ ТА НЕКОГЕРЕНТНОСТІ У «ВАЛЮТНОМУ КОШИКУ»

Останнім часом спостерігається велика зацікавленість у дослідженнях, пов'язаних з застосуванням у фінансово-математичному моделюванні теорії детермінованого хаосу [2-4]. Це пояснюється тим, що відбулись суттєві зміни в парадигмі математичного моделювання фінансово-економічних систем. Вони пов'язані з відмовою від так званої «лінійної парадигми» і переходу до нелінійних моделей.

Одним із прикладів використання послідовностей детермінованого хаосу у фінансах є спроби моделювання часових рядів, що описують динаміку ризикованих активів, наприклад валют. За класичним підходом основним «будівним блоком» і джерелом збурення при моделюванні економетричних моделей є так званий «білий шум», тобто випадкова послідовність (процес)  $\varepsilon_n$  з нульовим математичним сподіванням та одиначною дисперсією, члени якого є некорельованими. У [1] нами було запропоновано джерело збурення подати у вигляді одного із загальновідомих представників хаотичних функцій, а саме логістичного відображення [1-3]. Тоді, у разі застосування економетричної моделі, наприклад,



авторегресії 1-го порядку (AR-1) наша модель процесу зміни валют  $S_t, t \geq 0$  матиме вигляд:

$$\begin{cases} S_{t+1} = \rho S_t + \varepsilon_{t+1} \\ \varepsilon_{t+1} = \alpha \varepsilon_t (1 - \varepsilon_t), \alpha \geq 4, t \geq 0 \\ \varepsilon_0 \in (0, 1) \end{cases} \quad (1)$$

Наступним кроком стало дослідження когерентності осциляторів, що описують динаміку зміни різних валют, які певним чином об'єднуються у мережу. Тоді, як показано у [1] динаміку будь-якого осцилятора мережі можна описати наступним чином

$$S_{t+1}^i = f(S_t^i) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{j=i+P} (f(S_t^j) - f(S_t^i)), \quad (2)$$

де  $S_t^i$  дійсні динамічні зміни ( $i = 1, \dots, N, N \gg 1$ , індекс  $i$  є періодичним mod  $N$ ), зміна  $t$  описує час,  $\sigma$  – це сила зв'язку,  $P$  вказує на кількість сусідів у кожному напрямку,  $f(S)$  – є локальним одновимірним відображенням. У нашому випадку ми використовуємо логістичне відображення (1), з фіксованою зміною  $a = 3.8$ .

У роботі досліджується умови існування когерентності та умови співіснування когерентності та некогерентності осциляторів у мережі, де під когерентністю розуміється виконання нерівності:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{i, j \in U_\delta^N(x)} |f(S_t^i) - f(S_t^j)| \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0, \quad (3)$$

де  $U_\delta^N(x) = \{j : 0 \leq j \leq N, |j/N - x| < \delta\}$  описує мережу сусідів точки  $x$ . Якщо границя (3) не перетворюється в нуль при  $\delta \rightarrow 0$  хоча б для однієї точки  $x$ , то систему вважають некогерентною [5].

### Список використаних джерел:

1. Дмитрук С. В., Щестюк Н. Ю., Шабалін Д. А. Побудова моделей часових рядів на базі хаотичних функцій // Моделювання та інформаційні системи в економіці : зб. наук. праць. – К. : КНЕУ, 2013. – Вип. 88. – С. 11-21.
2. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математике. Факты. Модели. – Москва: ФАЗИС, 1998. – 512 с.
3. Brock W. A., Hsieh D. Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability // MIT Press. – 1991.
4. LeBaron B. A Fast Algorithm for the BDS Statistic // Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics. January 1997. – Vol. 2. – No. 2. – P. 53-59.
5. Omelchenko I., Maistrenko Y. Loss of Coherence in Dynamical Networks: Spatial Chaos and Chimera States // American Physical Society. – 2011. – №106. – С. 1-4.

УДК 519.6

**В. С. Абрамчук\***, канд. фіз.-мат. наук,  
**Д. О. Прищеп\***,  
**О. С. Пугач\***,  
**І. В. Абрамчук\*\***

\* Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця,

\*\* Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

### **ФОРМУВАННЯ БАЗИСІВ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

З розвитком теорії складних систем значна увага приділяється математичному моделюванню та аналізу і розв'язанню математичних моделей наближеними та чисельними методами. Побудова ефективних методів наближеного розв'язання математичних моделей (задач) пов'язана з формуванням базисів, якісно подібних до складових реального процесу. Принципи побудови базисів повинні бути узагальненими, з однієї сторони, а з іншої, підпорядкованими класу розв'язуваних задач. Найпоширенішого застосування знайшли тригонометричні та степеневі базиси та їх узагальнення в наближеному обчисленні значень інтерпольованні, диференціюванні та інтегруванні функцій, розв'язуванні крайових задач еліптичного типу. Ефективне розв'язування різницевих та сіткових рівнянь математичної фізики пов'язане з формуванням та дослідженням та дослідженням спряжених, біспряжених базисів, базисів Крилова та їх узагальненнями.

Дослідження нелінійних моделей, структурної стійкості динамічних систем та якісної поведінки їх розв'язків на основі теорії катастроф, вимагає загальних підходів до теорії формування базисів. Одним з таких підходів є задання топології на множині функцій визначених на  $R^n$  – топологія рядів Тейлора, а базис – послідовність суперпозицій операторів, що відображають множину  $X$  в множину  $Y$  для конкретних класів (структур, категорій).

Щоб охопити широкий клас розв'язуваних задач, необхідно розширити поняття базису, перенісши такі принципи як незалежність та повнота базису з лінійних просторів на найпростіші об'єкти – дискретні та неперервні множини.

*Задача 1.* Виділити в множині натуральних чисел  $N = (n)_{i=1}^{\infty}$  структури простих чисел таких, що діаметр структури є найменшим.

Для розв'язання цієї проблеми за оператор вибрана послідовність матриць  $A_m$  розмірностей  $[n_m \times n_m]$ , де  $n_m$  – добуток перших  $m$  простих чисел

[1]. Всі стовпці матриці з номерами кратними  $m$  простих чисел є складеними. Структури простих чисел знаходяться в стовпцях, що не є кратними. Наприклад, матриця  $A_3[2 \cdot 3 \cdot 5 \times 2 \cdot 3 \cdot 5]$  охоплює 900 натуральних чисел, в якій лише 8 стовпців з номерами  $\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$  підлягають просіюванню. Підсистема  $A_3$  зароджує нові симетричні структури (окрім “близнят”, які появились в підсистемі  $A_2$ ) “трійки”  $\{7, 11, 13\}$ ,  $\{17, 19, 23\}$ , “четвірки”  $\{11, 13, 17, 19\}$ .

*Задача 2.* Сформувати послідовність вузлів сітки відрізка  $[c; d]$ , що мінімізує похибку обчислень при побудові інтерполяційних алгебраїчних многочленів, квадратурних формул, мінімізації унімодалних функцій.

Ця проблема розв’язується на основі оптимізаційних методів на сітках, утворених поділом відрізка з коефіцієнтом золотого перерізу, або його узагальненням [2]. Тут під суперпозицією розуміються рекурентні формули поділу відрізка, в результаті якого формуються степеневі послідовності  $\{r^n\}$ ,  $\{(a + br)^n\}$ ,  $\{(a + br)^{-n}\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $r$  – коефіцієнт поділу, що є коренем квадратного рівняння  $r^2 = ar + b$  з цілими коефіцієнтами  $a, b, r \in (0; 1)$ .

*Задача 3.* Розв’язування систем лінійних алгебричних рівнянь  $A\bar{x} = \bar{b}$ ,  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{rank} A = n$ .

Для побудови ефективних ітераційних методів пропонується ітераційні процеси формувати у вигляді послідовності  $\bar{x}^{(n+1)} = \bar{x}^{(0)} + \sum_{i=1}^{m_i} c_i A^T \bar{p}_i$ , де  $\{\bar{p}_i\}_{i=1}^{m_i}$  підсистеми з системами повних базисів  $AE$  сформованих на основі базису  $E = \{\bar{e}_i\}_{i=1}^n$  з оператором Кривола:  $\forall i \in [1 : n] \quad AE_{\cdot i} = \{\bar{e}_i, A\bar{e}_i, \dots, A^{m-1}\bar{e}_i\}$ .

*Задача 4.* На основі топології рядів Тейлора розробити метод формування функційних базисів шляхом суперпозиції диференціальних і інтегральних операцій над функціями багатьох змінних.

Базиси таких типів як гіперболічні многочлени з ростків  $f(x) = ch^{-1}x$ ,  $f(x) = thx$  були запропоновані у роботі.

### Список використаних джерел:

1. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф / пер. с англ. М.: Мир, 1984. 350 с.
2. Абрамчук В. С., Абрамчук І. В., Бабюк Д. О. Оптимізаційні методи на основі золотого перерізу // Проблеми інформатики та комп’ютерної техніки, наук.-прак. конференція. Чернівці, 2016. С. 28-30.

**І. В. Бейко**, д-р. техн. наук,  
**Ю. В. Співак**

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ

## ДО ПОБУДОВИ МЕТОДІВ ГЛОБАЛЬНОЇ МАКСИМІЗАЦІЇ ГАМІЛЬТОНІАНІВ

Ефективність відомих алгоритмів для обчислення оптимального керування  $u^*(t) \in \Omega$  нелінійною системою

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0 \in R^n, \quad t \in [t_0; T]$$

за критерієм максимізації значення  $I(u)$  заданого функціонала

$$I(u) := F(x(T, u)) + \int_{t_0}^T f_0(x(t, u), u(t), t) dt$$

суттєво залежить від ефективності допоміжної процедури глобальної максимізації на допустимій множині  $\Omega$  у моменти часу  $t$  значень  $\varphi(u, x(t), y(t), t)$  заданої функції

$$\varphi(u, x(t), y(t), t) := (y(t), f(x(t), u, t)) + f_0(x(t), u, t)$$

на розв'язках  $(x(t), y(t))$  ускладненої крайової задачі

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), \bar{u}^*(x(t), y(t), t), t), \quad t \in [t_0; T],$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left[ \frac{\partial f(x(t), \bar{u}^*(x(t), y(t), t), t)}{\partial x} \right]^T y(t) + \nabla_x f_0(x(t), \bar{u}^*(x(t), y(t), t), t),$$

$$x(t_0) = x^0, \quad y(T) = \nabla F(x(T)),$$

$$\bar{u}^*(x(t), y(t), t) \triangleq \arg \max_{u \in \Omega} ((y(t), f(x(t), u, t)) + f_0(x(t), u, t)).$$

Побудовані процедури наближеної оптимізації реалізуються з використанням ітераційних алгоритмів обчислення екстремальних значення  $y^*(t_0)$ , які визначають розв'язки  $(x(t), y(t))$ , що задовольняють рівність  $y(T) = \nabla F(x(T))$ . Алгоритми прискореної оптимізації  $y(t_0)$  будуються з використанням швидкозбіжних методів Ньютона та їх модифікацій.

**І. В. Бейко\***, д-р. техн. наук,

**О. В. Фуртель\*\***

\* Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ,

\*\* Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## МЕТОДИ ПОБУДОВИ УЗАГАЛЬНЕНИХ ОПТИМАЛЬНИХ ТРАЄКТОРІЙ НЕЛІНІЙНИХ КЕРОВАНИХ СИСТЕМ

Розв'язується задача оптимізації керованої системи  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ ,  $x(t_0) \in X^0$  із заданою вектор-функцією  $f: R^n \times \Omega \times [t_0, T] \rightarrow R^n$ , заданою множиною  $\Omega$  допустимих керувань  $u(t) \in \Omega \subset R^r$ , заданою множиною  $X^0 \subset R^n$  допустимих початкових значень  $x(t_0)$  та заданим на множині  $M$  допустимих фазових траєкторій  $x$  функціоналом  $\varphi_0: M \rightarrow R$  для визначення оптимальної траєкторії  $x^0 \in \text{Arg max}_{x \in M} \varphi_0(x)$ . Оскільки у загальному випадку може не існувати оптимальної траєкторії  $x^0$  і, тим більше, оптимального керування  $u^0 \in \text{Arg max}_{u(\cdot) \in \Omega} \varphi_0(x) | x \in M$  (наприклад, множина  $f(x(t), \Omega, t)$  може бути не опуклою на деяких інтервалах часу і множина  $M$  може бути відкритою), то у даній роботі будується метод і чисельні алгоритми для обчислення *узагальненої оптимальної траєкторії* на замиканні множини  $M$  у просторі  $C_{[t_0, T]}$  неперервних на інтервалі  $[t_0, T]$  функцій, що визначається як вектор-функція  $\tilde{x} \in C_{[t_0, T]}$ , для якої при кожному  $\varepsilon > 0$  існує допустима фазова траєкторія  $x_\varepsilon \in M$ , що задовольняє нерівності

$$\|\tilde{x} - x_\varepsilon\|_C < \varepsilon, \quad \varphi_0(x_\varepsilon) > \sup_{x \in M} \varphi_0(x) - \varepsilon.$$

Для обчислення наближеного розв'язку будується чисельний алгоритм мінімізації функціонала  $\varphi_0$  на множині параметричних функцій,

$$\bar{x}(t) = (x_i(-t + \tau_{i+1}) + x_{i+1}(t - \tau_i))(\tau_{i+1} - \tau_i)^{-1}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

$$x(t_0) \in X^0, \quad \forall i = 0, \dots, N \quad (x_{k+1} - x_k) / (\tau_{i+1} - \tau_i) \in \text{cof}(x_k, \Omega, t_k).$$

За умов  $\max_{i=0, \dots, N} (\tau_{i+1} - \tau_i) \rightarrow 0$  та неперервності по другому аргументу функції  $f$  доводиться збіжність наближеного розв'язку до узагальненої оптимальної траєкторії і будуються модифікації такого алгоритму для обчислення наближеного розв'язку з підвищеною точністю.

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,

В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

**КРИТЕРІЇ УЗАГАЛЬНЕНОГО ЧЕБИШОВСЬКОГО  
У РОЗУМІННІ ЗВАЖЕНИХ ВІДСТАНЕЙ ЦЕНТРА КІЛЬКОХ ТОЧОК  
ЛІНІЙНОГО НОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ ВІДНОСНО ОПУКЛОЇ  
МНОЖИНИ ЦЬОГО ПРОСТОРУ**

Нехай  $X$  – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір елементів  $x$  з нормою  $\|x\|$ ,  $a_i \in X$ ,  $m_i \in R$ ,  $m_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $n \in N$   $n > 1$ ,  $V$  – опукла множина простору  $X$ .

Задачею відшукування чебишовського у розумінні зважених відстаней центра системи точок  $a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , відносно множини  $V$  (у множині  $V$ ) будемо називати задачу відшукування величини

$$\inf_{x \in V} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|). \quad (1)$$

Послідовність  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  елементів  $x_k \in V$ , для якої

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) = \inf_{x \in V} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|),$$

будемо називати узагальненим чебишовським у розумінні зважених відстаней центром системи точок  $a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , відносно множини  $V$  або просто екстремальною послідовністю для величини (1).

Якщо існує елемент  $x^* \in V$  такий, що

$$\max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x^*\|) = \inf_{x \in V} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x\|),$$

то його будемо називати чебишовським у розумінні зважених відстаней центром системи точок  $a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , відносно множини  $V$  або просто екстремальним елементом для величини (1).

У роботі встановлено критерії узагальненого чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок лінійного нормованого простору відносно опуклої множини цього простору, оснований на співвідношенні двоїстості для задачі відшукування величини (1), та критерії колмогоровського типу.

**Теорема 1.** Нехай  $x_k \in V$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , існує  $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|)$ ,

$$I = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : \lim_{k \rightarrow \infty} (m_i \|a_i - x_k\|) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) \right\} \neq \emptyset.$$

Для того щоб послідовність  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  була узагальненим чебишовським у розумінні зважених відстаней центром системи точок  $a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , відносно множини  $V$  (екстремальною послідовністю для величини (1)), необхідно і достатньо, щоб існували функціонали  $f_i^* \in X^*$ ,  $i \in I$ , які задовольняють умовам:

- 1)  $\sum_{i \in I} \|f_i^*\| = 1$ ;
- 2)  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^*(a_i - x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\|f_i^*\| \|a_i - x_k\|)$ ,  $i \in I$ ;
- 3)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} m_i f_i^*(x_k) = \sup_{x \in V} \sum_{i \in I} m_i f_i^*(x)$ .

**Теорема 2.** Нехай  $x_k \in V$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , існує  $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|)$ ,

$$I = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : \lim_{k \rightarrow \infty} (m_i \|a_i - x_k\|) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} (m_i \|a_i - x_k\|) \right\} \neq \emptyset.$$

Для того щоб послідовність  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  була екстремальною послідовністю для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента  $x \in V$  існували підпослідовність  $\{x_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$  послідовності  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ , послідовності  $\{f_i^l\}_{l=1}^{\infty}$ ,  $i \in I$ , де для  $i \in I$   $f_i^l \in X^*$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , такі, що

- 1)  $\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} \|f_i^l\| = 1$ ;
- 2)  $\lim_{l \rightarrow \infty} f_i^l(a_i - x_{k_l}) = \lim_{l \rightarrow \infty} \|f_i^l\| \|a_i - x_{k_l}\|$ ,  $i \in I$ ;
- 3)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} m_i f_i^l(x - x_{k_l}) \leq 0$ .

**В. І. Ночвай**, канд. техн. наук

Інститут проблем математичних машин і систем НАН України, м. Київ

## ОПТИМІЗАЦІЯ СОЦІОЕКОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ ВІДНОСНО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ СТАНДАРТІВ ЯКОСТІ ДОВКІЛЛЯ

Оптимізаційні математично-комп'ютерні  $p$ -моделі будуються у класі граф-операторних моделей, вершинами яких є робочі моделі підсистем управління якості довкілля [1]:

$$A_k(x^k, u^k, p^k, q^k, z^k) = 0, \quad z^k = Z^k(x, u^k, p^k, q^k), \quad k = \{1, \dots, n\},$$

де  $A_k$  – параметричний оператор моделі  $k$ -ої підсистеми,  $x^k$  – стан довкілля (наприклад концентрація ЗР у  $k$ -ій підсистемі,  $x = (x^1, \dots, x^n) = x(u, p, q)$ ,  $u^k$  – керування  $k$ -ю підсистемою,  $u = (u^1, \dots, u^n) \in U$ ,  $q^k$  – внутрішні та зовнішні збурення,  $q = (q^1, \dots, q^n) \in Q$ ,  $p^k$  – параметри моделі,  $p = (p^1, \dots, p^n) \in P$ ,  $Z^k$  – оператор зв'язків  $k$ -ої підсистеми з іншими підсистемами та зовнішнім середовищем. Сукупність моделей підсистем складає граф-операторну  $p$ -модель  $A(x, u, p, q, t) = 0$  з невідомими значеннями  $q \in Q$ .

Задача оптимізації зводиться до відшукування керувань  $u$ , які максимізують значення критерію оптимальності  $B(x, u, p, q)$  за умов дотримання дотримання критеріїв якості довкілля  $s_k$ .

Розглядається структурна функція впливу на довкілля економічних агентів соціоекологічної системи. Взаємодія окремих підсистем визначається природними, технічними, а також антропогенними процесами, що відображають, як фундаментальні закони природи (закон збереження речовини або енергії, тепломасопереносу тощо), так і певні специфічні дії, зумовлені структурою системи.

Залежності типу джерело використовуються для опису чутливості «рецептора» у до зміни параметрів «джерела» антропогенного впливу  $x$ . Функцію «джерело-рецептор» в загальному випадку можна представити у вигляді функції чутливості:

$$m^{ik} = \frac{\partial c_k}{\partial p_i},$$

яка може бути розрахована шляхом моделювання:  $M: \Delta p \rightarrow \Delta c_k$ .

Рецептором може бути середня концентрація забруднюючих речовин у повітрі, воді, ґрунті; чи інша величина, що кількісно характеризує вплив – захворюваність, кількість особин популяцій рослин та тварин, характер рослинності (біоіндикація) тощо. Джерело антропогенного впливу може бути локалізованим чи ні: точковим, площинним та об'ємним в просторі, миттєвим, короткочасним, тривалим чи постійним в часі.

Розглядаються основні класи задач багатокритеріальної оптимізації соціо-екологічних параметрів природно-технічних систем відносно забезпечення стандартів якості довкілля.



### Список використаних джерел:

1. Бейко І. В., Ночвай В. І. Моделювання та оптимізація параметрів емісійних процесів у повітряному басейні міста// Математичне та комп'ютерне моделювання / Кам'янець-Подільський національний університет, Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України, – Кам'янець-Подільський: К-ПНУ, 2008. – Вип.1. – С.25-33.

УДК 519.85

**О. С. Пичугина**, канд. физ.-мат. наук

Национальный аэрокосмический университет имени Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков

### ПОЛИЭДРАЛЬНО-СФЕРИЧЕСКИЕ КОНФИГУРАЦИИ: КЛАССИФИКАЦИЯ, СВОЙСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ

Пусть  $E$  – конечное множество точек  $R^n$  :

$$E = \{x^1, \dots, x^m\} = \{x^j, j \in J_m\}, \quad (1)$$

где  $x^j = (x_1^j, \dots, x_n^j)$ ,  $j \in J_m = \{1, \dots, m\}$ ,  $m > 1$ . Такие множества называют конечными точечными конфигурациями (a finite point configuration, FPC).

Точке  $x^j$  поставим в соответствие мультимножество ее координат  $G(x^j) = \{x_i^j, i \in J_n\}$ , назовем индуцирующим мультимножеством этой точки и представим в форме:  $G(x^j) = \{g_k, k \in J_n\}$ ,  $g_k \leq g_{k+1}$ ,  $k \in J_{n-1}$ , а его основу обозначим

$$A(x^j) = \{e_i, i \in J_{\alpha^j}\}, e_i < e_{i+1}, i \in J_{\alpha^j-1}, j \in J_m,$$

и назовем образующим множеством точки  $x^j$  ( $j \in J_m$ ).

Сформируем  $G$  как объединение  $G(x^j)$ ,  $j \in J_m$ , –  $G = \bigcup_{j=1}^m G^j$ , учи-

тывая, что объединением мультимножеств  $G$ ,  $G'$  называется мультимножество  $G'' = G \cup G'$  с основой  $S(G'') = S(G) \cup S(G')$  и кратностями  $\eta_{G''}(e) = \max\{\eta_G(e), \eta_{G'}(e)\}$ ,  $e \in S(G'')$ .

Упорядочим элементы  $G$  по неубыванию и представим в виде:

$$G = \{g_1, \dots, g_{\beta}\} \quad g_k \leq g_{k+1}, k \in J_{\beta-1}, \text{ а его основу – в форме } A = \{e_i, i \in J_{\alpha}\},$$

где  $e_i < e_{i+1}$ ,  $i \in J_{\alpha-1}$ . Назовем  $G$  индуцирующим мультимножеством  $E$  (an induced multiset,  $E$  .IM), а  $A$  – образующим множеством (a generated set,  $E$  .GS).

*Определение.* FPC  $E$  назовем полиэдрально-сферической (а polyhedral-spherical configuration, PSC), если существуют такие  $\tau \in R^n$  и  $r > 0$ , что для всех точек  $x \in E$  выполняется условие

$$\|x - \tau\|^2 = r^2. \quad (2)$$

Приведем несколько классов PSC. Пусть  $E$  – FPC в  $R^n$ .

**Теорема 1.** Если  $\text{card } E \leq n + 1$ , то  $E$  – PSC.

FPC  $E$ , удовлетворяющую условиям теоремы 1, назовем симплексной (а simplex FPC).

**Теорема 2.** Если  $E$  .GM таково, что  $\text{card } G = n$ , то  $E$  – PSC.

FPC  $E$ , удовлетворяющую условиям теоремы 2, назовем перестановочной (а permutation FPC, PC).

**Теорема 3.** Если  $E$  удовлетворяет условию:

$$\max_{i \in J_n} \text{card } G(i) = 2, \text{ где } G(i) = \{x_i^j\}_{j \in J_m} \text{ .GS, } i \in J_n.$$

то  $E$  – PSC.

FPC  $E$ , удовлетворяющую условиям теоремы 3, назовем двухуровневой по координатам (а 2-level FPC, 2LC).

PSC имеет множество интересных особенностей, которые являются предметом нашего исследования, одна из которых – та, что положена в основу термина FPC.

Выбор термина «полиэдрально-сферическая конфигурация» обуславливается возможностью представления PSC  $E$  в виде пересечения многогранника  $P = \text{conv } E$  и гиперсферы  $S_r(\tau)$ , т.е.

$$E = P \cap S_r(\tau). \quad (3)$$

А это, в свою очередь, приводит к тому, что PSC  $E$  совпадает с множеством вершин  $P$ :

$$E = \text{vert } P, \quad (4)$$

т.е. является вершинно расположенным множеством.

Мы исследуем свойства PSC общего вида, такие как разложение по плоскостям и строго выпуклым поверхностям, декомпозиции на PSCs меньшей размерности; свойства PSC, полученных в результате теоретико-множественных операций над PSCs и FPC общего вида. Также мы исследуем особенности базовых перестановочных (PC  $E_1 = \{x \in R^n : \text{x.GM} = G\}$ ) и двухуровневых по координатам (2LC  $E_2 : |E_2 \text{ .IS}| = 2$ ). Так  $P_1 = \text{conv } E_1$  представляет собой общий многогранник перестановок,  $P_2 = \text{conv } E_2$  – специальный многогранник перестановок или размещений, индуцированные  $G$ .

Полученные результаты находят приложения в решении широкого класса практических задач, моделирующийся в виде оптимизационных задач на PSCs, среди которых задачи теории расписаний, графовые модели, задачи балансировки, размещения, упаковки и многие другие задачи

оптимального планирования и геометрического проектирования. В частности, они применимы для усовершенствования и развития группы полиэдрально-сферических методов точных и приближенных, а также в построении выпуклых продолжений с PSCs, позволяющие уточнение известных на данный момент оценок.

УДК 519.816

**Н. К. Тимофієва**, д-р техн. наук

Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем НАН та МОН України, м. Київ

## **ПІДКЛАСИ РОЗВ'ЯЗНИХ ЗАДАЧ В ШТУЧНОМУ ІНТЕЛЕКТІ**

**Вступ.** Для задач комбінаторної оптимізації, які виникають в штучному інтелекті, виділено підкласи розв'язних задач. Показано, що їхнє виявлення залежить від структури вхідних даних, від вибраних способів означення подібності об'єктів, що розпізнаються, та від заданих обмежень.

**Основна частина.** Значна частина перебірних задач, якими є задачі комбінаторної оптимізації і до яких відносяться задачі штучного інтелекту, є *NP*-повними. Звідси виникає проблема: чи можна, не перебираючи всі або майже всі варіанти знайти глобальний розв'язок? Наука про складність обчислень твердить, що перебірні задачі із зростанням їхньої розмірності розв'язати практично неможливо і таких методів ще не знайдено. Але існують прикладні задачі великих розмірностей, у яких навіть обробка вхідної інформації є досить складною задачею. Це стосується і задач штучного інтелекту. Отже виникає проблема: чи можна для деяких особливих структур вхідної інформації знаходити глобальний розв'язок поліноміальними алгоритмами, що ґрунтуються на розпізнаванні структури вхідних даних? В літературі для деяких класів задач комбінаторної оптимізації описано підкласи, що мають певну структуру вхідної інформації, для яких відомий спосіб аналітичного знаходження глобального розв'язку [1]. Ці підкласи задач називають розв'язними.

Оцінка ефективності розв'язку з урахуванням вибраних критеріїв у перебірних задачах проводиться за обчислювальною складністю, яка полягає у визначенні кількості операцій, затрачених на розв'язання певної задачі. В цьому разі глобальний розв'язок теоретично існує та може знаходитися або поліноміально або експоненціально. Але в штучному інтелекті задачі характеризуються нечіткістю вхідних даних і крім кількості операцій, затрачених на знаходження глобального розв'язку, необхідно ураховувати міри подібності, які тут відіграють основну роль та від вибору яких в значній мірі залежить сам розв'язок. В цьому разі обчислювальна складність з урахуванням міри подібності оцінюється за шкалою “так” або “ні”, де “так” означає, що вибраний спосіб оцінки подібності дозволяє знаходити глобальний розв'язок, а “ні” – вибраний спосіб оцінки подібності не дає

жодного розв'язку. В цьому разі при знаходженні глобального розв'язку виникає ситуація невизначеності різної природи.

За способом визначення складності розв'язання задач розділимо їх на такі типи: 1) задачі, в яких вхідні дані задано в кількісному вимірі, а оцінка обчислювальної складності проводиться за кількістю затрачених на знаходження глобального розв'язку операцій; 2) задачі, вхідні дані у яких задано у якісному значенні, а оцінка обчислювальної складності проводиться як за кількістю затрачених на знаходження глобального розв'язку операцій так і за способом оцінки якості розв'язку.

Складність розв'язання задач штучного інтелекту полягає в тому, що одні і ті ж самі ознаки можуть характеризувати різні об'єкти. Якщо певні ознаки характеризують один об'єкт, то міра подібності  $g^+(x, y) = 1$ , де  $x$  – об'єкт, який необхідно розпізнати,  $y$  – еталонний об'єкт. В цьому разі задача є розв'язною як за ознакою подібності так і за структурою вхідних даних. Вважатимемо, що вони утворюють підкласи розв'язних задач у штучному інтелекті. Якщо одні і ті ж ознаки описують різні об'єкти, то міра подібності  $g_j(x, y) \in \{\chi, \dots, 0\}$ , де  $\chi$  – значення міри подібності, при якій можливий допустимий розв'язок. Якщо  $g^-(x, y) = 0$ , то задача є нерозв'язною внаслідок виникнення ситуації невизначеності. До того ж задача пошуку певного об'єкта в базі даних повним перебором є  $NP$ -повна. Але вона стає поліноміально розв'язною, якщо за певними ознаками проведено структурування бібліотеки еталонних ознак, які характеризують задані об'єкти.

**Висновок.** Отже, в задачах штучного інтелекту (розпізнаванні та синтезу мовлення, встановлення певного захворювання за допомогою систем клінічної діагностики) виділення підкласів розв'язних задач проводиться як за ознакою подібності так і за структурою вхідних сигналів. Якщо вибрані ознаки подібності для певних задач дозволяють знайти за поліноміальну часову складність глобальний розв'язок, то такий підклас задач є розв'язним. У задачах цього класу обчислювальна складність знаходження глобального розв'язку залежить не лише від розробленого алгоритму, а і від вибраної міри подібності.

УДК 519.6

**О. В. Фургель**

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнко, м. Кам'янець-Подільський

## **МОДЕЛЮВАННЯ ЗАХИСНИХ МАНЕВРІВ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ**

Задача визначення оптимальних захисних маневрів літальних апаратів при неповних даних становить особливий інтерес в експериментальних дослідженнях, оскільки найбільш вразливою ракета перебуває на заключному

етапі польоту, коли після зниження траєкторії в момент безпосередньої атаки на ціль вона попадає в зону досяжності ракет протиповітряної оборони. Окрім застосування різного роду технічних приладів, які дезорієнтують ракети протиракетної оборони, одним із засобів захисту постає непередбачуване інтенсивне маневрування, яке можна забезпечити запрограмованим керуванням на основі використання ефективних траєкторій.

Таким чином, актуальним є питанням комп'ютерних експериментів на основі математичних моделей (див., наприклад, [1]) дослідження задачі про визначення допустимих режимів інтенсивного непередбачуваного маневрування літального апарату.

Запропонований алгоритм дозволяє сформувати програмний модуль для передбачення етапів побудови інтенсивного непередбачуваного моделювання. Для більш адекватних досліджень потрібно враховувати допустимі переваження при виконанні маневрів, що залежать від типу техніки.

### **Список використаних джерел:**

1. Щирба О. В. Побудова математичних моделей для обчислення фазових траєкторій літальних апаратів в умовах захисних маневрів / О. В. Щирба // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, 2016. – Вип. 13. – С. 201-212.

УДК 621.3

**В. С. Щирба**, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнко, м. Кам'янець-Подільський

### **ПОШУК АКТИВНИХ РЕЖИМІВ АЛГОРИТМАМИ ВНУТРІШНЬОЇ ТОЧКИ**

Дослідження роботи мереж, зокрема електричних, вимагає визначення усталених (стабільних) режимів. Моделювання проводять з метою визначення напруг у місцях підключення споживачів, величини струму в лініях електропередачі тощо. Основною вихідною інформацією для розрахунку режимів є розрахункова схема. В розрахункову схему подають також додаткову інформацію, зокрема, про параметри елементів мережі, джерела живлення та навантаження.

Особливий інтерес становить задача пошуку активних режимів роботи, коли усі або певна частина параметрів повинна перебувати в певному діапазоні. Її легко звести до задачі, коли деякі змінні набувають додатних значень, тобто до задачі пошуку внутрішньої точки серед множини розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до якої зводиться математична модель дослідження мереж.

Розв'язування систем лінійних рівнянь і нерівностей великої розмірності з інтервальними обмеженнями на змінні є однією з областей обчис-

словальної математики, де на практиці особливо успішно можуть застосовуватися алгоритми пошуку внутрішніх точок. При розв'язуванні оптимізаційних задач методами внутрішньої точки розглядають пару взаємно-двоїстих задач лінійного програмування. Для прямих афінно-масштабуючих алгоритмів потрібно, щоб для задачі існували допустимі розв'язки, для яких всі обмеження-нерівності виконуються в строгій формі. Більш того, необхідно мати стартову точку, для якої обмеження-нерівності виконуються в строгій формі. Оскільки така точка не завжди є апіорі відома, то за допомогою незначних модифікацій алгоритму можливе суміщення процесів оптимізації та попадання в допустиму область. Обчислювальний процес при цьому починається з будь-якого вектора.

Окремий інтерес становить задача ініціалізації алгоритму, тобто попадання в допустиму область, що визначається системою обмежень задачі лінійного програмування. При цьому цільова функція не враховується (вектор цільової функції вважається рівним нулю). Необхідно або відшукати допустимий розв'язок, або максимально швидко ідентифікувати факт не-сумісності одержаної системи лінійних рівнянь чи нерівностей:

#### **Список використаних джерел:**

1. Згуровский М. З. Системный анализ: проблемы, методология, приложения / М. З. Згуровский, Н. Д. Панкратова. – К. : Изд-во Наук. думка, 2011. – 728 с.

УДК 519.9

**М. Я. Баргіш**, д-р фіз.-мат. наук,

**О. В. Ковальчук**, канд. фіз.-мат. наук

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

### **ДВОКРОКОВИЙ МЕТОД СПУСКУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАІЧНИХ СИСТЕМ**

Розглянемо задачу для розв'язування систем нелінійних функціональних рівнянь

$$P(x) = 0, \quad P: R^n \rightarrow R^m, \quad n \geq m. \quad (1)$$

Для розв'язування (1) існує низка методів. У випадку невеликих  $n$  ефективно працюють метод Гайсса-Ньютона та різнищеві модифікації. На жаль у випадку достатньо великих  $n$  ефективність даних методів суттєво зменшується. З метою зменшення кількості обчислень і зменшення часу обчислень, пропонуємо двокроковий алгоритм на основі методу спуску.

У двокроковій модифікації методу спуску вектор спадання  $h_k$  вибирають у вигляді деякої комбінації, а саме:

$$\begin{aligned} v_k &= x_k - \alpha_k \left( P'(x_k) \right)^T P(x_k), \\ h_k &= \lambda \left( P'(x_k) \right)^T P(x_k) + (1 - \lambda) \left( P'(v_k) \right)^T P(v_k), \\ \lambda &\in (0, 1), \\ x_{k+1} &= x_k - \beta_k h_k, \end{aligned} \quad (2)$$

де коефіцієнти  $\alpha_k, \beta_k$  з умови монотонного спадання функції  $(P(x), P(x))$ .

Також була розглянута модифікація методу (2) коли вектор  $h_k$  обирався наступним чином:

$$h_k = \left( P'(\lambda x_k + (1 - \lambda)v_k) \right)^T P(\lambda x_k + (1 - \lambda)v_k).$$

Модифікації градієнтних методів дають кращі результати, ніж градієнтний метод, як за кількістю операцій, так і за кількістю обчислень а також за часом знаходження розв'язку.

**М. Я. Бартиш**, д-р фіз.-мат. наук,  
**Р. О. Максимшин**,  
**В. Я. Нанинець**

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

## ПРО ДЕЯКІ ТРИКРОКОВІ КВАЗІНЬЮТОНІВСЬКІ МЕТОДИ МІНІМІЗАЦІЇ

Розглянемо задачу

$$f(x) \rightarrow \min_R. \quad (1)$$

Для розв'язування задачі (1), в залежності від властивості функції  $f(x)$ , розмірності простору  $R^*$ , наявності обчислювальних ресурсів тощо, існує низка методів їх модифікацій. На практиці часто використовують градієнтний метод, метод Ньютона, різницеві аналоги названих методів та їх модифікації. Досить ефективними при розв'язуванні задачі (1), у випадку великих  $n$ , є квазіньютонівські методи.

Нами, використовуючи ідею трикрокових методів [1], на основі квазіньютонівських методів, запропоновано трикрокові методи

$$\begin{aligned} u_k &= x_k - \alpha_k H_k f'(x_k), \\ v_k &= x_k - \beta_k f'(x_k), \\ x_{k+1} &= \arg \min f(u_k + \gamma(v_k - u_k)), \\ k &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

де  $H_k$  обчислюється за однією із квазіньютонівських формул а саме: методу Бройдена

$$H_{k+1} = H_k + \frac{(\Delta x_k - H_k \Delta y_k)(\Delta x_k - H_k \Delta y_k)^T}{\{\Delta x_k - H_k \Delta y_k, \Delta y_k\}};$$

методу Девідона-Флетчера-Пауелла

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\Delta x_k \Delta x_k^T}{(\Delta x_k, \Delta y_k)} - \frac{H_k (\Delta y_k \Delta y_k^T) H_k}{(H_k \Delta y_k, \Delta y_k)},$$

де  $\Delta y_k = f'(x_{k+1}) - f'(x_k)$ ,  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ . За  $H_0$  можна вибирати додатньо визначену симетричну матрицю. На практиці покладають, як правило,  $H_0 = I$ .

Як показали теоретичні дослідження швидкість збіжності запропонованих алгоритмів не нижча швидкості збіжності базових квазіньютонівських методів [1].

Реалізації запропонованих алгоритмів проведено на низці прикладів, що підтвердило теоретичні висновки. Наведемо лише один приклад (розглянемо функцію Розенброка):



$$f(x) = \sum_{i=1}^{n/2} (100(x_{2i} - x_{2i-1}^2)^2 + (1 - x_{2i-1}^2)^2) \rightarrow \min.$$

Результати обчислень подано в нижче наведеній таблиці: де подано кількість ітерацій ( $i$ ), розмірність простору ( $n$ ), та кількість обчислень  $f(x)$ , або еквівалентних  $f(x)$ , ( $N$ ). Початкове наближення вибрано  $(-0.5; -0.5; \dots -0.5)$ . Для порівняння взято метод Бройдена, метод Девідона-Флетча-Пауелла, їхні трикрокові аналоги. Точність обчислень

$$\min \left\{ |f(x_{k+1}) - f(x_k)|, \|x_{k+1} - x_k\| \right\} < \varepsilon = 10^{-7}.$$

Таблиця 1

n	3 кр. м Б.		3 кр м ДФП		м. Бройдена		м. ДФП	
	I	N	i	N	i	N	i	N
20	6	662	10	1106	67	4486	57	5106
60	8	980	11	2062	113	11724	94	15408
100	8	1302	11	2912	141	20100	116	28028
150	9	1934	11	3976	162	30760	101	34070
200	9	2360	11	5010	204	48684	107	46760

Як показали практичні реалізації, запропоновані методи ефективні для великих  $n$  (розмірність простору) у випадку виродженої матриці Гессе, функцій типу яру (функція Розенброка) тощо.

#### Список використаних джерел:

1. Бартіш М. Я., Огородник Н. П. Про один трикроковий метод розв'язування задач мінімізації // Вісник Львівського ун-ту Сер. прикл. мат. та інформатика. – 2009. – №15. – С. 20-25.

УДК 519.64:517.443:519.254-37

**В. К. Задірака**, д-р фіз.-мат. наук

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ

### ОПТИМАЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ШВИДКООСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ КЛАСІВ ПІДІНТЕГРАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Інтерполяційні класи функцій – це такі класи функцій, які мають однакову вхідну інформацію про підінтегральну функцію. Вони являють собою звуження загальновідомих класів функцій на конкретну функцію, задану на фіксованій сітці та фіксованими значеннями [1].

Використання інтерполяційних класів дає змогу покращити потенційну спроможність квадратурних формул.

Оцінки знизу похибки інтегрування для таких класів в загальному випадку будуть не більшими за відповідні оцінки для класів функцій, які

завичай розглядаються в теорії функцій, в математичному та функціональному аналізах.

Якщо ще розглянути випадок, коли вхідна інформація задана наближено, то такі інтерполяційні класи найкращим чином описують реальні задачі, які ми розв'язуємо. При цьому ми отримуємо кращу точність, але за рахунок погіршення оцінки складності. Це зрозуміло, оскільки інтерполяційний клас містить в собі всю вхідну апріорну інформацію про задачу, яку, в разі потреби, можна уточнити, використовуючи відповідні алгоритми виявлення та уточнення вхідної інформації [2].

Для високоточних задач безумовно занурення підінтегральної функції в інтерполяційний клас є одним із суттєвих резервів оптимізації обчислень [3].

Для побудови оптимальних та близьких до них квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій для інтерполяційних класів підінтегральних функцій застосовується метод граничних функцій [1], розроблений в Інституті кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. На відміну від методу «капелюхів» [4], він дозволяє будувати в точності оптимальні за точністю квадратурні формули. При цьому враховуються два види похибок – методу та неусувної. Для гарантії точності квадратурної формули ще досліджується оцінка похибки заокруглення [2]. Тоді ми маємо оцінку повної похибки [1] квадратурної формули і гарантію якості наближеного обчислення інтегралу.

#### Список використаних джерел:

1. Задирака В. К. Теория вычисления преобразования Фурье. – К.: Наук. думка, 1983. – 216 с.
2. Сергієнко І. В., Задирака В. К., Литвин О. М., Мельникова С. С., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування: у 2 т. Т. 1. Алгоритми. – К.: Наук. думка, 2011. – 448 с.
3. Задирака В. К., Мельникова С. С., Луц Л. В. Об использовании резервов оптимизации вычислений для улучшения качества вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – № 4. – С. 125-145.
4. Бахвалов Н. С. Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 632 с.

УДК 519.2

**Н. В. Дудіна,  
Л. В. Мельник**

Кам'янець-Подільський коледж харчової промисловості Національного університету харчових технологій, м. Кам'янець-Подільський

#### **ВИКОРИСТАННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ ДЛЯ АНАЛІЗУ МАТЕМАТИЧНИХ РОЗРАХУНКІВ**

Особистісна орієнтація освіти, впровадження освітніх інновацій, інформаційно-комунікаційних технологій, ґрунтовне використання окремих компонентів комп'ютерно-орієнтованих систем навчання у поєднанні з тра-

диційними методами, формами і засобами навчання студентів, створення сучасних засобів навчання і виховання, забезпечення ними навчальних закладів є пріоритетними напрямками в навчально-виховному процесі. Математики відіграли найважливішу роль у створенні комп'ютерів; природно було їм самим скористатися плодами своїх зусиль. Так виникла “комп'ютерна математика” – розв'язування суто математичних проблем з широкою (інколи вирішальною) “участю” комп'ютерів. Показником інтелектуальної потужності комп'ютерів стали новітні системи комп'ютерної математики (СКМ), які випускаються різного рівня складності – від гнучкої системи Mathcad, зручної для символічних обчислень системи Derive до систем Mathematika, Mathlab, Maple із можливістю графічної візуалізації обчислень.

Ми на основі власного викладацького досвіду пропонуємо розглянути питання методики використання прикладних пакетів математичного спрямування в навчальному процесі. Перше, на що ми хотіли б звернути увагу – це мотивація освоєння не простих програмних продуктів. Очевидно, спочатку студентам доцільно донести історію розвитку пакетів комп'ютерної математики.

Системи комп'ютерної математики розробляються давно і Maxima є однією з перших СКМ. Maxima допомагає розв'язувати алгебраїчні рівняння, системи рівнянь, виконувати операції інтегрування, диференціювання, розкладання в ряди.

Не кожному задачу можна розв'язати аналітично, тоді використовуємо чисельні методи. Відомим представником додатків для чисельних розрахунків є система комп'ютерної алгебри (СКА) Matlab, широко поширена по всьому світу. Базова версія Matlab має великий набір математичних функцій.

Математичний пакет Maple є представником нового покоління програмних засобів і призначений для інженерних і математичних розрахунків. Пакет Maple може виконувати обчислення будь-якого ступеня складності і обмежений лише можливостями техніки. Крім чисельних розрахунків, Maple може проводити обчислення в аналітичному і символічному видах.

Могутній математичний апарат, інтегрований в пакет, дозволяє знаходити розв'язок широкого кола задач:

- лінійних і нелінійних алгебраїчних рівнянь та їх систем;
- задач Коші і крайові задачі для диференціальних рівнянь;
- диференціальних рівнянь з частинними похідними;
- задач статистичної обробки даних;
- задач лінійної алгебри і т.д.

Програма Mathematica – інтегрована [1]. Вона дозволяє за нетривалий час знаходити вирази для похідних і первісних заданих користувачем функцій, вирішувати в аналітичному і чисельному вигляді складні рівняння алгебри і диференціали, проводити різні символічні перетворення математичних виразів і давати образні представлення геометричних об'єктів. Ця система відноситься до інтелектуальних програмних засобів.

Системи комп'ютерної математики допомагають користувачам виконувати прості та складні розрахунки. Можливості підготовки в СКМ доку-

ментів та електронних книг в стилі notebook із використанням графічних ілюстрацій та життєвих прикладів робить системи незамінними в навчанні.

Безперечно, СКМ є зручним інструментом для студентів, педагогів, науковців, інженерів тощо. Можливості його застосування в методичному, практичному і науковому контекстах залежать від користувачів. Перевагами пакетів є їх універсальність, можливість розв'язування широкого кола задач.

Цікавим, на наш погляд може, бути матеріал обговорення із студентами вражень з використання програми Mathematica в навчальному процесі. Він допоможе нам вдосконалити методику використання обчислювальної техніки для аналізу математичних розрахунків.

### **Список використаних джерел:**

1. Васильев Н. А. Mathematica. Практический курс с примерами решения прикладных задач. – М.: Век, 2008.– 448 с.

УДК 539.3

**В. А. Максимюк**, д-р фіз.-мат. наук

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, м. Київ

## **ПРО ПРИЧИНИ ЯВИЩА ЗАМИКАННЯ В ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДАХ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК**

Сіткові обчислювальні методи механіки оболонок на певному етапі спіткнулись об так звану проблему [1, с.4] замикання (locking), що проявляється в їхній сповільненій, але, що важливо, стійкій збіжності.

Після дискретизації сіткові методи зводяться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Наразі математики і механіки здебільшого по-різному пояснюють причини замикання. Перші вказують на “некоректно поставлену задачу”, на “погано обумовлену матрицю”, на “малі коефіцієнти при старших похідних” тобто на причини, що лежать в площині алгебри чи диференціальних рівнянь. Другі говорять про “жорсткі зміщення”, “співвідношення вкладу в енергію різних деформацій” тобто вказують на причини, що лежать в площині механіки.

На наш погляд причина лежить в площині варіаційного числення. Зазвичай отриманню СЛАР передують процедура варіювання певного функціонала. Варіюватись можуть тільки незалежні функції. Внаслідок невеликого вибору системи координат, системи варіюваних функцій чи деяких особливостей деформування конструкції між варіюваними функціями може виникнути деякий зв'язок. Саме він приводить до обчислювального явища замикання.

Наприклад, в показовій тестовій задачі про бездеформативне зміщення кільця [1, с. 37] між переміщеннями в полярній системі координат виникає зв'язок за теоремою Піфагора, а в декартовій – його нема. Застосування зсувних моделей до тонких оболонок теж веде до взаємозв'язку

між нібито незалежними функціями, переміщеннями і кутами повороту, суть якого – геометрична частина гіпотез Кірхгофа–Лява [1, с. 70], що є причиною зсувного замикання. Мембранне замикання виникає в задачі про деформування під внутрішнім тиском довгої циліндричної оболонки еліптичного перерізу [2, с. 106], в якій зв'язок між переміщеннями проявляється в малих розтягах за великих згинів.

На перший погляд причини замикання в трьох наведених прикладах зовсім різні. Так, в першому випадку можна говорити про жорстке зміщення, але тільки в полярній системі координат та з нульовим вкладом деформацій в енергію. В другому вироджується система диференціальних рівнянь з десятого до восьмого порядку за малого вкладу поперечного зсуву в енергію. А в третьому маємо малий вклад розтягів в енергію. Проте всі наведені приклади об'єднують наявність зв'язку в алгебраїчному чи диференціальному вигляді між варійованими функціями.

Особливо замикання проявилось в третьому випадку. В розрахунках варіаційно-різницевим методом на основі класичного функціонала Лагранжа для досягнення збіжності у двох значущих цифрах максимальних угинів потрібно було чверть еліпса (з невеликим, на перший погляд, співвідношенням півосей  $b/a = 0,9$ ) розбити на 2561 вузлових точок [2, с. 109].

Можна очікувати, що якщо цю ж довгу циліндричну оболонку еліптичного перерізу навантажити так, щоб згини зменшились чи стали нульовими, то замикання зникне. Такі поверхневі сили можна легко знайти з рівнянь рівноваги, в яких задати відсутність дотичного переміщення та сталій, нехай рівний товщині, угин.

Розрахунки показали, що за такого навантаження в оболонці виникає, як і очікувалося, практично безмоментний напружено-деформований стан. А для досягнення збіжності у двох значущих цифрах достатньо було всього 11 вузлових точок, тобто замикання було відсутнє, що підтверджує сформульовану раніше загальну причину замикання у різних випадках. Відповідно існує загальний метод подолання замикання шляхом додаткового варіювання заздалегідь малих функцій [1, с. 67].

На перший погляд може здатися дивним, що за однієї і тієї ж матриці СЛАР збіжність залежить від правих частин. Проте, як вже було відмічено, проблема лежить не в алгебраїчній, а в площині варіаційного числення. Хоча, дійсно, є аналогія між лінійною залежністю рядків матриці і зв'язками серед варійованих функцій.

### Список використаних джерел:

1. Максимюк В. А. Вариационно-разностные методы в линейных и нелинейных задачах деформирования оболочек из металлических и композитных материалов (обзор) / В. А. Максимюк, Е. А. Сторожук, И. С. Чернышенко // Прикл. механика. – 2012. – Т. 48, №6. – С. 3-80.
2. Абросов Ю. Ю. Влияние эллиптичности поперечного сечения на деформирование длинной цилиндрической оболочки / Ю. Ю. Абросов, В. А. Максимюк, И. С. Чернышенко // Прикл. механика. – 2016. – 52, №5. – С. 106-111.

**ДО ЗАСТОСУВАННЯ РОЗРІДЖЕНИХ ЧИСЛОВИХ  
СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ**

У значній кількості прикладних задач виникає необхідність розв'язання розріджених числових систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами [1, 2]. Розглянемо метод розв'язування розріджених систем із деякими найхарактернішими способами заповнення.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1,n-2} & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,n+1} \\ A_{2,n+1} \\ A_{3,n+1} \\ \dots \\ A_{n-1,n+1} \\ A_{n,n+1} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

елементи якої  $A_{ij}$  – це блоки розмірності  $m \times m$ . Позначимо через

$A \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{bmatrix}$  мінор, розміщений на перетині блочних стрічок  $i_1, i_2, \dots, i_k$  та блочних стовпців  $j_1, j_2, \dots, j_k$ . За узагальненим правилом Крамера [2]

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \dots & A_{1,n+1} & 0 & 0 \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n+1} & \dots & 0 \\ \dots & A_{3,2} & \dots & A_{3,n+1} & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & A_{n,n+1} & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \dots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix}}$$

Розкладаючи чисельник за мінорами, можна записати

$$x_i = \left( A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \left( \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} A_{k,n+1} A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A \begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix} \right) \quad (2)$$

Введемо позначення

$$\alpha_{ik} = A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A \begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}, \quad i, k = \overline{1, n}.$$

Тоді для визначення невідомої  $x_1$  маємо співвідношення

$$x_i = \left( A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} A_{k,n+1} \alpha_{i,k}. \quad (3)$$

Для компактності запису надалі будемо позначати результат виконання операції множення на обернену матрицю зліва у вигляді  $C^{-1}D = D/C$ . Тоді вираз  $D_1/(C_1 + D_2/C_2)$  означатиме  $(C_1 + C_2^{-1}D_2)^{-1} \cdot D_1$ .

Якщо до співвідношення (3) застосувати відому рівність Леонарда Ейлера [3], яка пов'язує ланцюгові дроби з рядами та скінченними сумами, то для  $x_1$  одержимо

$$x_i = \left( A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} A_{k,n+1} \alpha_{i,k} = \frac{A \begin{bmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}}{A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}} \times$$

$$\times \frac{A_{1,n+1}}{E + \frac{A_{2,n+1} \alpha_{1,2} / A_{1,n+1} \alpha_{1,1}}{E - \frac{A_{2,n+1} \alpha_{1,2}}{A_{1,n+1} \alpha_{1,2}} + \frac{A_{3,n+1} \alpha_{1,3} / A_{2,n+1} \alpha_{1,2}}{E - \frac{A_{3,n+1} \alpha_{1,3}}{A_{2,n+1} \alpha_{1,2}} + \dots + \frac{A_{n,n+1} \alpha_{1,n} / A_{n-1,n+1} \alpha_{1,n-1}}{E - \frac{A_{n,n+1} \alpha_{1,n}}{A_{n-1,n+1} \alpha_{1,n-1}}}}}} \quad (4)$$

Тут і далі  $E$  – означає одиничну матрицю.

Вираз  $\alpha_{1,k+1}^{-1} \cdot \alpha_{1,k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) також можна розкласти в ланцюгові дроби [4]

За аналогічною схемою знаходимо решту невідомих  $x_i$ .

Отже, одержуємо аналітичне розв'язання невідомих даної розрідженої системи лінійних алгебраїчних рівнянь у скінченні матричні ланцюгові дроби.

### Список використаних джерел:

1. Воеводин В. В. Линейная алгебра [Текст] / В. В. Воеводин. – СПб. : Лань, 2008. – 416 с.
2. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра [Текст] / Е. Е. Тыртышников. – М. : Физматлит, 2007. – 480 с.
3. Недашковський М. О. Обчислення з  $\lambda$  – матрицями [Текст] / М. О. Недашковський, О. Я. Ковальчук. – К. : Наук. думка, 2007. – 294 с.

4. Семчишин Л. М. Програмна реалізація розв'язання розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь / Л. М. Семчишин // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки : зб. наук. праць / Запорізький національний університет. – № 2. – Запоріжжя, 2013. – С. 91-99

УДК 004.94

**К. С. Чевська**

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

### **ЗАСТОСУВАННЯ ПАРАЛЕЛЬНИХ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР НА ОСНОВІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ**

Сучасні прикладні задачі в результаті апроксимації неперервного рівняння кінцево-різницевої задачі нерідко породжують системи, у яких кількість рівнянь може складати сотні тисяч чи навіть більше. Тобто зростає потреба практики в розв'язанні задач все більшої розмірності. Для розв'язання вказаних задач необхідно вдосконалювати або розробляти нові методи розв'язування СЛАР орієнтовані на паралельну обробку даних. Одним з перспективних підходів вирішення даної проблеми є застосування гіллястих ланцюгових дробів, оскільки вони мають властивість обмеженого нагромадження похибок, що виникають в процесі їх обчислень, коли округлюються числа, що входять в ланцюговий дріб. Саме ця обставина забезпечує обчислювальну стійкість та актуальність використання гіллястих ланцюгових дробів при розв'язуванні СЛАР.

Розглянемо невідроджену систему лінійних алгебраїчних рівнянь загального вигляду

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = a_{i,n+1} \quad (i = \overline{1,n}). \quad (1)$$

Покажемо, що кожному компоненту  $x_i$  розв'язку  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  можна подати у вигляді гіллястого ланцюгового дробу.

Провівши ряд підрахунків і розкладів, отримаємо представлення  $x_1$  у вигляді гіллястого ланцюгового дробу

$$x_1 = \sum_{i(1)=1}^N \frac{a_{i(1)n+1}}{a_{i(1)1}} + \sum_{i(2)=1}^N \frac{a_{i(2)1}}{a_{i(2)2}} + \dots + \sum_{i(k)=1}^N \frac{a_{i(k)n}}{a_{i(k)n}} + \dots, \quad (2)$$

причому число доданків у знаменниках (число розгалужень) зменшується від  $n$  на першому поверсі гіллястого ланцюгового дробу до 1 на останньому поверсі цього дробу. Зрозуміло, що точно так само можуть бути представлені у вигляді гіллястих ланцюгових дробів компоненти  $x_2, x_3, \dots, x_n$  розв'язку  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  СЛАР [3].

Запропонований спосіб розкладу розв'язку СЛАР в гіллястий ланцюговий дріб піддається розпаралелюванню шляхом одночасного підрахунку компоненти  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .



Представлення компонент розв'язку  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  можна використувати для побудови алгоритмів паралельного обчислення невідомих  $x_i$  ( $i = 1..n$ ). Також метод гіллястих ланцюгових дробів варто застосовувати для знаходження нульових наближень при побудові паралельних алгоритмів обчислення невідомих  $x_i$  ( $i = 1..n$ ) ітераційними методами (у гіллястому ланцюговому дробі підраховують тільки 3-4 початкових поверхи дробу).

#### **Список використаних джерел:**

1. Боднар Д. И. Ветвящиеся цепные дроби / Д. И. Боднар– Киев : Наук. думка, 1986 – 176 с.
2. Гладун В. Р. Аналіз стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів : дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.01.01 / В. Р. Гладун. – Л., 2007.
3. Скоробогатко В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике / В. Я. Скоробогатко. – М.: Наука, 1983 – 312 с.

UDK 519.21

**R. O. Chorny,**  
**O. M. Kinash,** Ph. D.

Ivan Franko National University of Lviv, Lviv

### DEFINITION OF AN ADMISSIBLE INSURANCE RATE IS CASE OF F-MODEL

In this paper we defined an admissible insurance rate in F-model conditions [1, p.248], in case when payments have subexponential distribution [2, p.189-196]. As a result, we have got a formula of an insurance rate for different distributions of payments [3].

#### References:

1. Korolev V. Y. Mathematical foundations of risk theory. / V. Y. Korolev, V. E. Bening, S. Y. Shorgin. – M. : Fizmatlit, 2011. – 620 p.
2. Zinchenko N. M. Mathematical methods in risk theory: a tutorial – publishing centre "Kyiv University" / N. M. Zinchenko. – 2008. – 224 p.
3. Chorny R. One task of determining the optimal insurance premium / R. Chorny, A. Bilynskyi // Scientific works SWorld. – 2017 – Issue # 47, Volume 2. – P. 68-71.

УДК 517.5

**І. Б. Ковальська,** канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

### ОЦІНКИ ВІДХИЛЕНЬ СУМ РІССА ВІД $\overline{\psi}$ -ІНТЕГРАЛІВ, ЯКІ ПОРОДЖУЮТЬ ЦІЛІ ФУНКЦІЇ

Як апарат наближення неперервних функцій суми Фур'є зайняли достойне місце ще на початку 20 ст. В роботах Лебега, Джексона, Колмогорова, Нікольського та ін. розглядалися ці та більш загальні класи функцій для їх апроксимації сумами Фур'є. Пізніше в ролі апроксимуючих агрегатів почали використовувати лінійні методи підсумовування рядів Фур'є і кожна з таких методик стала важливою віхою в теорії наближень.

Нехай  $f \in L(0; 2\pi)$ ,

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f, x)$$

– її ряд Фур'є,

$$U_n(f; x; \Lambda) = S_n^{\delta}(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)^{\delta} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

– суми Рісса функції  $f(x)$  [1].

Нехай  $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$  – пара довільних числових послідовностей  $\psi_1(k)$  і  $\psi_2(k)$ ,  $k \in N$ . Якщо ряд  $A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_1(k)A_k(f, x) + \psi_2(k)\bar{A}_k(f, x))$ , де  $A_0$  – деяке число,  $\bar{A}_k(f, x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx$  для даної функції  $f(x)$  і пари  $\bar{\psi}$  є рядом Фур'є деякої функції  $F \in L$ , то згідно [2],  $F$  називається  $\bar{\psi}$ -інтегралом функції  $f$ . Множину  $\bar{\psi}$ -інтегралів функцій  $f \in L$  позначимо  $L^{\bar{\psi}}$ .

Розглянемо наближення сумами Рісса  $\bar{\psi}$ -інтегралів у випадку, коли функції  $|\psi_1(\cdot)|$  і  $|\psi_2(\cdot)|$  належать множині  $F_0$ , тобто коли елементи множин  $L^{\bar{\psi}}$  є звуженням на дійсну вісь функцій, регулярних на всій комплексній площині. Отримаємо асимптотичні рівності для величин  $\bar{\epsilon}_n(L^{\bar{\psi}} \aleph)_x = \sup_{f \in L^{\bar{\psi}} \aleph} \|\rho_n(f; x)\|_x = \sup_{f \in L^{\bar{\psi}} \aleph} \|f(x) - S_n^{\delta}(f, x)\|_x$ , де  $\aleph \in L^0$  ( $L^0$  – множина функцій  $f \in L(0; 2\pi)$ , для яких  $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ ), а  $X = L_p$ ,  $p \in [1; +\infty)$ ,  $\sigma = 1$ .

Через  $L_p$ ,  $p \geq 1$  позначаємо підмножини функцій  $\varphi \in L$ , для яких

$$\|\varphi\|_p = \left( \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad p \in [1; +\infty) \quad \text{і} \quad \|\varphi\|_M = \text{ess sup} |\varphi(t)|.$$

В прийнятих позначеннях справедливе таке твердження:

Теорема. Нехай  $\pm\psi_1, \pm\psi_2 \in F_0$ . Тоді для  $f \in L^{\bar{\psi}} L_p$  справедлива рівність

$$\bar{\epsilon}_n(L^{\bar{\psi}} S_p^0)_s = \frac{A_n(S_p^0)_s}{n^2} + \bar{\psi}(n) B_n(S_p^0)_s + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \bar{\psi}(k), \quad 1 \leq p, s \leq \infty,$$

де

$$S_p^0 = \left\{ \varphi : \|\varphi\|_p \leq 1, \varphi \perp 1 \right\}, \quad \bar{\psi}(k) = \left( \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$A_n(S_p^0)_s = \sup \left\{ C_1 \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \bar{\psi}(k) B_k(S_p^0)_s \right\},$$

$$B_k(S_p^0)_s = \sup \left\{ \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \cos kt \, dt \right\|, \varphi \in S_p^0 \right\}.$$

### Список використаних джерел:

1. Riesz M. Sur les fonctions conjuguées / M.Riesz // Math. Zeit. – 1927. – 27. – P. 218-244.
2. Степанец А. И. Методы теории приближения / А. И. Степанец. – Киев : Ин-т математики НАН України, 2002. – Ч.1. – 427 с.

УДК 517.926

**Г. М. Кулик\***,  
**В. Л. Кулик\*\***

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ,  
Сілезький технічний університет, м. Глівіце, Польща

### ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ РІККАТІ

Відомо, що ряд цікавих задач з теорії оптимального керування приводять до розгляду рівнянь Ріккаті як матричних так і диференціально-матричних. Ось, наприклад, наступна задача:

маємо скалярне диференціальне рівняння з початковою умовою

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + \sum_{i=1}^m b_i(t)u_i, \quad x|_{t=0} = x_0, \quad t \in R^+ = [0, +\infty).$$

$$J = \int_0^{+\infty} \left[ \sum_{i=1}^m r_i(t)u_i^2(t) + q(t)x^2(t) \right] dt, \quad (1)$$

де  $r_i(t), q(t)$  - фіксовані функції визначені, неперервні та обмежені на  $R^+$ , для яких виконуються нерівності  $r_i(t) \geq \alpha = \text{const} > 0$ ,  $q(t) \geq 0$ . Задача полягає в тому, щоб знайти такі функції керування  $u_i(t) \rightarrow 0$ , при яких функціонал (1) прийняв би найменше значення. Впроваджуючи у функціонал (1) поки що невизначену скалярну функцію  $s(t)$ , отримуємо

$$J = s(0)x_0^2 + \int_0^{+\infty} \left[ \sum_{i=1}^m r_i \left( u_i + \frac{sb_i}{r_i} \right)^2 + \left( \frac{ds}{dt} + 2as + q - \sum_{i=1}^m \frac{b_i^2}{r_i} s^2 \right) x^2 \right] dt.$$

Тепер вимагаємо, щоб другий доданок під інтегралом тотожно дорівнював нулю, тобто, щоб рівняння Ріккати  $\frac{ds}{dt} + 2as + q - \sum_{i=1}^m \frac{b_i^2}{r_i} s^2 = 0$  мало обмежений на  $R^+$  розв'язок  $s = s^*(t)$  і цей розв'язок задовольняв би нерівності  $s^*(t) \geq 0$  і при можливості знайти його.

Розглянемо скалярне рівняння Ріккати

$$\frac{ds}{dt} = a_1(t)s^2 + a_2(t)s + a_3(t), \quad (2)$$

де скалярні функції  $a_j(t)$  неперервні і обмежені на всій осі  $R = (-\infty, +\infty)$ .

**Теорема 1.** Нехай для функцій  $a_j(t)$  виконується нерівність  $|a_2(t)| - |a_1(t) + a_3(t)| \geq \varepsilon$ ,  $\varepsilon = \text{const} > 0$ , тоді рівняння (2) має єдиний розв'язок  $s = s^*(t)$ , який задовольняє нерівність  $|s^*(t)| < 1$ ,  $\forall t \in R$ .

Якщо ж при деяких числах  $\alpha, \beta$ ,  $\alpha < \beta$  буде виконуватись нерівність

$$\begin{aligned} & |(\alpha + \beta)a_1(t) + a_2(t)| - \\ & - \left| \frac{\alpha - \beta}{2} a_1(t) + \frac{(\alpha + \beta)^2}{2(\alpha - \beta)} a_1(t) + \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} a_2(t) + \frac{2}{\alpha - \beta} a_3(t) \right| \geq \varepsilon, \end{aligned}$$

де  $\varepsilon = \text{const}$ , то рівняння (2) матиме єдиний розв'язок  $s = s^*(t)$ , який задовольняє нерівностям  $\alpha < s^*(t) < \beta$ ,  $\forall t \in R$ .

Тепер розглянемо матрично-диференціальне рівняння Ріккати

$$\frac{dS}{dt} = SA_1(t)S + A_2(t)S + SA_3(t) + A_4(t), \quad (3)$$

де  $A_i(t)$  – прямокутні матриці, неперервні та обмежені на осі  $R$ , розмірів відповідно  $A_1 - n_2 \times n_1$ ,  $A_2 - n_1 \times n_1$ ,  $A_3 - n_2 \times n_2$ ,  $A_4 - n_1 \times n_2$ ,  $S$  – невідома прямокутна матриця, яка складається із  $n_1$  рядків і  $n_2$  стовпчиків ( $S - n_1 \times n_2$ ).

Норму вектора  $x \in R^n$  позначаємо  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , де  $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$  –

скалярний добуток в  $R^n$ .

Має місце наступне твердження.

**Теорема 2.** Нехай прямокутні матриці  $A_i(t)$  такі, що складена з них квадратна симетрична матриця

$$M(t) = \begin{pmatrix} A_2(t) + A_2^T(t) & A_1^T(t) + A_4(t) \\ A_1(t) + A_4^T(t) & A_3(t) + A_3^T(t) \end{pmatrix}$$

є додатно визначена, тобто виконується нерівність  $\langle M(t)x, x \rangle \geq \varepsilon \|x\|^2$ ,  $\varepsilon = \text{const} > 0$ , тоді рівняння (3) має єдиний розв'язок  $S = S^*(t)$  який задовольняє нерівності  $\max_{\|x_2\|=1} \|S^*(t)x_2\| = \|S^*(t)\| < 1, \quad \forall t \in R$ . Причому рівняння  $\frac{d\Theta}{dt} = -\Theta A_4(t)\Theta - \Theta A_2(t) - A_3(t)\Theta - A_1(t)$  також матиме єдиний розв'язок  $\Theta = \Theta^*(t)$ , який задовольняє нерівність  $\|\Theta^*(t)\| < 1 \quad \forall t \in R$ .

Приведемо задачу з теорії оптимального керування, де виникає матричне рівняння Ріккати.

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + \frac{1}{2}u_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}u_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 - \frac{1}{2}u_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}u_1 \end{cases}, \quad t \in [0, +\infty), \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Функції керування  $u_1(t), u_2(t)$  вибираємо так, щоб  $\lim_{t \rightarrow \infty} u_i(t) = 0$  і відповідні розв'язки системи (4) також прямували до нуля на безмежності  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$ . На цих функціях визначається функціонал

$$J = \int_0^{+\infty} \left[ u_1^2(t) + u_2^2(t) + 7x_1^2(t) + 6x_1(t)x_2(t) + 3x_2^2(t) \right] dt. \quad (5)$$

Потрібно знайти найменше значення функціоналу (5).

Розв'язування. Позначимо матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи позначення, функціонал (5) приймає вигляд

$$J = \int_0^{+\infty} \left[ \langle Ru(t), u(t) \rangle + \langle Qx(t), x(t) \rangle \right] dt. \text{ Далі в цей функціонал впровадимо}$$

постійну, поки що невизначену симетричну матрицю  $S$ :

$$J = \langle Sx_0, x_0 \rangle + \int_0^{+\infty} \left[ \langle R(u(t) + Kx(t)), (u(t) + Kx(t)) \rangle + \langle [SA + A^T S + Q - K^T R K] x(t), x(t) \rangle \right] dt,$$

де матриця  $K = R^{-1}B^T S$ . Тепер для визначення матриці  $S$  вимагаємо, щоб другий доданок під інтегралом був нульовим  $SA + A^T S + Q - K^T R K = 0$ . Звідси одержуємо матричне рівняння Ріккати

$$-SNS + SA + A^T S + Q = 0, \quad (6)$$

де

$$N = B^T R^{-1} B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер з рівняння (6) нам потрібно знайти таку постійну симетричну матрицю  $S = S_0$ , яка б була невід'ємною, тобто  $\langle S_0 x, x \rangle \geq 0$ . З цією метою запишемо допоміжну систему лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dot{x} = A^T x + Qy, \\ \dot{y} = Nx - Ay. \end{cases} \quad (7)$$

Обчислюючи власні значення і власні вектори відповідної матриці

$$\begin{pmatrix} A^T & Q \\ N & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

легко знаходимо чотири лінійно незалежні розв'язки системи (7)

$$\begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad \begin{pmatrix} -10 - 6\sqrt{2} \\ -3 \\ -2 - 2\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2\sqrt{2}t}, \quad \begin{pmatrix} -10 + 6\sqrt{2} \\ -3 \\ -2 + 2\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2\sqrt{2}t}.$$

Вибираючи першу і третю колонку, маємо

$$X(t) = \begin{pmatrix} -12 & -10 - 6\sqrt{2} \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2\sqrt{2}t} \end{pmatrix},$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} -4 & -2 - 2\sqrt{2} \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2\sqrt{2}t} \end{pmatrix}.$$

Звідси одержимо

$$X \cdot Y^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & -10 - 6\sqrt{2} \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 - 2\sqrt{2} \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -12 & -10 - 6\sqrt{2} \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 + 2\sqrt{2} \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6 + 10\sqrt{2}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{93 + 50\sqrt{2}}{41} & \frac{-24 + 40\sqrt{2}}{41} \\ \frac{-24 + 40\sqrt{2}}{41} & \frac{-11 + 32\sqrt{2}}{41} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3,993 & 0,794 \\ 0,794 & 0,835 \end{pmatrix} = S_0.$$

Таким чином, найменше значення функціонал (5) приймає таке.

$$J_{\min} = \frac{130 + 2\sqrt{2}}{41} \approx 3,24.$$

### Список використаних джерел:

1. Mitropolsky Yu. A., Samoilenko A. M., Kulik V. L. Dichotomies and Stability in Nonautonomous Linear Systems. // Taylor & Francis Inc, London, 2003. 367 с.
2. Кулик В. Л., Кулик А. Н., Степаненко Н. В. Дополнение слабо регулярных линейных расширенных динамических систем до регулярных // Математический журнал. Алматы, №1(39) 2011. Том 11. С. 74-86.
3. Viktor Kulyk, Dariusz Paćzko. Wybrane zagadnienia matematycznej teorii sterowania // GLIWICE 2008.-96с.

УДК 519.6:519.622.1:519.624.2

**П. С. Сеньо**, канд. фіз.-мат. наук

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

### МЕТОДИ ЗВУЖЕННЯ ДВОХСТОРОННІХ АПРОКСИМАЦІЙ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ТА ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ

У [2] побудовані три методи двохсторонніх апроксимацій сплайнами розв'язку задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь на основі математики функціональних інтервалів. Однак, ширина таких апроксимацій збільшується при зростанні ширини інтервалу аргументу, на якому шукається розв'язок задачі. В [2] цей ефект послідовно усувається за допомогою потрібної кількості повторених кроків запропонованих алгоритмів.

У цій роботі запропоновані алгоритми звуження на проміжку  $[a, b]$  двохсторонніх апроксимацій розв'язку задачі Коші

$$y' = f(x, y(x)), \quad (1)$$

$$y(a) = y_a, \quad (2)$$

та граничної задачі

$$y'' = f(x, y(x), y'(x)), \quad (3)$$

$$g_1(y_a, y_b, y'_a, y'_b) = 0, \quad (4)$$

$$g_2(y_a, y_b, y'_a, y'_b) = 0, \quad (5)$$



де  $y_a, y_b, y'_a, y'_b$  – значення функції  $y(x)$  та її першої похідної на кінцях проміжку  $[a, b]$ , відповідно, на основі наступної теореми та висновків з неї.

**Теорема.** Нехай функція  $y(x)$  двічі неперервно диференційовна на проміжку  $[a, b]$  і на цьому проміжку

$$\underline{k} \leq y''(x) \leq \bar{k}, \quad (6)$$

де  $\underline{k}, \bar{k}$  деякі константи.

Тоді:

1) якщо  $\overline{p2}_a(b) \leq \overline{p1}_a(b)$ , то

$$y_b \in [\underline{p1}_a(b), \overline{p2}_a(b)], \quad (7)$$

інакше

$$y_b \in [\underline{p2}_a(b), \overline{p1}_a(b)], \quad (8)$$

де

$$\overline{p1}_a(x) = 0.5 \bar{k} x^2 + (y'_a - \bar{k} a) x + 0.5 \bar{k} a^2 - y'_a a + y_a, \quad (9)$$

$$\underline{p1}_a(x) = 0.5 \underline{k} x^2 + (y'_a - \underline{k} a) x + 0.5 \underline{k} a^2 - y'_a a + y_a, \quad (10)$$

$$\overline{p2}_a(x) = 0.5 \underline{k} x^2 + (y'_b - \underline{k} b) x - 0.5 \underline{k} a^2 - (y'_b - \underline{k} b) a + y_a, \quad (11)$$

$$\underline{p2}_a(x) = 0.5 \bar{k} x^2 + (y'_b - \bar{k} b) x - 0.5 \bar{k} a^2 - (y'_b - \bar{k} b) a + y_a; \quad (12)$$

$$2) \left| \overline{p1}_a(b) - \overline{p2}_a(b) \right| = \left| \underline{p1}_a(b) - \underline{p2}_a(b) \right| = \left| \overline{p1}_b(a) - \overline{p2}_b(a) \right| = \Delta, \quad (13)$$

де

$$\overline{p1}_b(x) = 0.5 \underline{k} x^2 + (y'_a - \underline{k} a) x - 0.5 \underline{k} b^2 - (y'_a - \underline{k} a) b + y_b, \quad (14)$$

$$\underline{p1}_b(x) = 0.5 \bar{k} x^2 + (y'_a - \bar{k} a) x - 0.5 \bar{k} b^2 - (y'_a - \bar{k} a) b + y_b, \quad (15)$$

$$\overline{p2}_b(x) = 0.5 \bar{k} x^2 + (y'_b - \bar{k} b) x + 0.5 \bar{k} b^2 - y'_b b + y_b, \quad (16)$$

$$\underline{p2}_b(x) = 0.5 \underline{k} x^2 + (y'_b - \underline{k} b) x + 0.5 \underline{k} b^2 - y'_b b + y_b, \quad (17)$$

$$\Delta = 0.5 (\bar{k} + \underline{k}) (b - a)^2 + (y'_a - y'_b) (b - a). \quad (18)$$

Ця теорема є узагальненням теореми 2 з [1]. Однак висновки (7), (8), (13), (18) з неї слід трактувати як конкретизацію і узагальнення теореми про середнє функції  $y(x)$  і її похідної. Зокрема, у випадку, коли  $\Delta = 0$  теорема про середнє для похідної

$$y'(x) = y'(a) + y''(\xi)(x - a), \quad \xi \in (a, b) \quad (19)$$

у точці  $x = b$  не містить невизначеності і є такою:

$$y'_b = y'_a + 0.5 (\bar{k} + \underline{k}) (b - a). \quad (20)$$

Висновки теореми дають можливість суттєво звужити двохсторонні апроксимації розв'язку задачі Коші (1)-(2) та граничних задач (3)-(5).

**Список використаних джерел:**

1. Сеньо П. С. Деякі застосування математики функціональних інтервалів / П. С. Сеньо // Матем. та комп. моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. – 2016. – Вип. 13. – С. 182-193.
2. Сеньо П. С. Двохсторонні методи розв'язування задачі Коші на підставі математики функціональних інтервалів / П. С. Сеньо // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2017. – Вип. 24. – С. 18-37.

УДК517.5

**В. А. Сорич**, канд. фіз.-мат. наук,  
**Н. М. Сорич**, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
 імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

**НАЙКРАЩЕ ОДНОЧАСНЕ НАБЛИЖЕННЯ СУМИ  
 ЗГОРТОК З ЯДРАМИ БЕРНУЛЛІ ТА ПУАССОНА**

Через  $W_{\beta,\infty}^r, W_{\beta,1}^r$  ( $r > 0, \beta \in R$ ) та  $P_{\beta,\gamma}^q, P_{\beta,1}^q$  ( $0 < q < 1, \gamma \in R$ ) позначимо класи згорток  $\varphi * B_{r,\beta}, \varphi * \mathcal{P}_\gamma^q$  ядер Бернуллі

$$B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$$

і відповідно Пуассона

$$\mathcal{P}_\gamma^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\gamma\pi}{2}\right)$$

з функціями  $\varphi$ , що належать одиничній кулі просторів  $L_\infty, L_1, \varphi \perp 1$ . Будемо ці кулі позначати  $U_\infty^0, U_1^0$  (див.[1]). Через  $\Sigma_n(\varphi; t_{n-1,i}; x), i = \overline{1,2}$ , позначимо суму

$$\begin{aligned} \Sigma_n(\varphi; t_{n-1,i}; x) &= \left( (\varphi * B_{r,\beta})(x) - t_{n-1,1}(x) \right) + \\ &+ \left( (\varphi * \mathcal{P}_\gamma^q)(x) - t_{n-1,2}(x) \right), \end{aligned}$$

де тригонометричні многочлени порядку  $n - 1$  задовольняють обмеженням

$$t_{n-1,1}(x) \geq (B_{r,\beta} * \varphi)(x), t_{n-1,2}(x) \geq (\mathcal{P}_\gamma^q * \varphi)(x), x \in [0; 2\pi].$$

В даній роботі анонсуються точні рівності для величини

$$\widehat{E}_{n,2}(U_\infty^0)_L = \sup_{\varphi \in U_\infty^0} \inf_{t_{n-1,i}} \|\Sigma_n(\varphi; t_{n-1,i}; x)\|_L. \tag{1}$$

**Теорема.** Нехай  $r > 0, 0 < q < 1, \beta, \gamma \in R$ , якщо виконується одна з умов:

- 1)  $r \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 1 \pmod{4}$ ; 2)  $r \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 3 \pmod{4}$ ;
- 3)  $r \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{4}$ ; 4)  $r \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 2 \pmod{4}$ ;
- 5)  $0 < r \leq 1, 4s \leq \beta \leq 2 - r + 4s, s \in \mathbb{Z}, \gamma \equiv 1 \pmod{4}$ ;
- 6)  $r \equiv \beta \equiv 1 \pmod{4}, \gamma \equiv 0 \pmod{4}$ ;
- 7)  $r \equiv \beta \equiv 3 \pmod{4}, \gamma \equiv 2 \pmod{4}$ ;
- 8)  $0 < r \leq 1, 4s \leq \beta \leq r + 4s, s \in \mathbb{Z}, \gamma \equiv 0 \pmod{4}$ ;
- 9)  $0 < r \leq 1, 4s + 2 \leq \beta \leq r + 2 + 4s, s \in \mathbb{Z}, \gamma \equiv 2 \pmod{4}$ ;
- 10)  $0 < r \leq 1, 4s + 2 - r \leq \beta \leq 4s + 2, s \in \mathbb{Z}, \gamma \equiv 0 \pmod{4}$ ;
- 11)  $0 < r \leq 1, 4s + 4 - r \leq \beta \leq 4s + 4, s \in \mathbb{Z}, \gamma \equiv 2 \pmod{4}$ ,

то для  $\forall n \in \mathbb{N}$  справедлива рівність

$$\begin{aligned} \hat{E}_{n-2}(U_\infty^0)_L &= 2\pi E_{n,2}(U_1^0)_L = 2\pi E_{n,2}(U_\infty^0)_C = 2E_n(K)_L = \\ &= 2\pi \|K * \text{signsinn}(\cdot)\|_C = \\ &= 8 \left| \frac{1}{n^r} \sum_{v=0}^{\infty} (2v+1)^{-r-1} \sin \left[ (2v+1)\theta_n \pi - \frac{\beta\pi}{2} \right] + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{q^{(2v+1)n}}{2v+1} \sin \left[ (2v+1)\theta_n \pi - \frac{\gamma\pi}{2} \right] \right| = 8M(n), \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\theta_n \in [0; 1)$  є єдиним коренем рівняння

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^r} \sum_{v=0}^{\infty} (2v+1)^{-r} \cos \left[ (2v+1)\theta_n \pi - \frac{\beta\pi}{2} \right] + \\ &+ \sum_{v=0}^{\infty} q^{(2v+1)n} \cos \left[ (2v+1)\theta_n \pi - \frac{\gamma\pi}{2} \right] = 0, \end{aligned}$$

а  $E_{n,2}(U_1^0)_L, E_{n,2}(U_\infty^0)_C, E_n(K)_L$  в (2) – величини найкращих наближень підмножин  $U_1^0, U_\infty^0, K$  відповідно в просторах  $L$  та  $C$  тригонометричними множинами порядку  $n - 1$ .

### Список використаних джерел:

1. Степанец А. И. Методы теории приближений в 2 ч./ А. И. Степанец. – К. : Ин-т математики НАН України, 2002. – Ч. 1. – 427с.

**Н. В. Степаненко**, канд. фіз.-мат. наук

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ

### ВПЛИВ ПАРАМЕТРІВ НА РЕГУЛЯРНІСТЬ НА ОСІ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У багатьох цікавих дослідженнях [1-3] виникають лінійні системи диференціальних рівнянь, в яких потрібно знайти такі властивості які не змінюються при малих збуреннях. Такими властивостями часто є експоненціальна дихотомія або трихотомія розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь. Оскільки для нестационарних систем це питання завжди залишається відкритим, то було б цікаво внести щось нового в дослідження дихотомічності для лінійних систем диференціальних рівнянь.

Розглянемо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \quad (1)$$

де  $x \in R^n$ ,  $P(t)$  –  $n \times n$ -вимірна матриця, елементами якої є дійсні неперервні і обмежені на осі  $R = (-\infty, +\infty)$  скалярні функції. Простір неперервних і обмежених на  $R$  функцій будемо позначати через  $C^0(R)$ . Через  $C^1(R)$  будемо позначати підпростір  $C^0(R)$  неперервно диференційованих функцій, похідна яких є обмеженою на  $R$ .

Норму вектора  $x \in R^n$  розуміємо так  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , де  $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$

скалярний добуток в  $R^n$ . Важливим питанням відносно системи (1) є питання її регулярності на всій осі  $R$ .

Нагадаємо означення регулярності.

**Означення.** Систему (1) називають *регулярною на  $R$*  якщо відповідна неоднорідна система  $\frac{dx}{dt} = P(t)x + f(t)$  при кожній фіксованій вектор-функції  $f(t) \in C^0(R)$  має єдиний обмежений на  $R$  розв'язок. Якщо ж відомо тільки, що записана неоднорідна система має хоча б один обмежений на  $R$  розв'язок при кожній  $f(t)$ , то систему (1) називають *слабо регулярною на  $R$* .

Відомо, що система (1) буде регулярною на  $R$  тоді і тільки тоді коли існує квадратична форма  $V = \langle S(t)x, x \rangle$  з симетричною матрицею коефіцієнтів  $S(t) \in C^1(R)$ , похідна якої в силу системи (1) є додатно визначеною, тобто виконується нерівність

$$\dot{V} = \left\langle \left[ \frac{dS(t)}{dt} + S(t)P(t) + P^T(t)S(t) \right] x, x \right\rangle \geq \|x\|^2 \quad (3)$$

і при цьому

$$\det S(t) \neq 0, \quad \forall t \in R. \quad (4)$$

У випадку, коли в системі (1) матриця  $P$  є постійною, із слабкої регулярності завжди випливає регулярність, яка буде тоді і тільки тоді, коли дійсні частини всіх власних значень матриці  $P$  будуть відмінні від нуля. Таким чином, якщо  $\det P = 0$ , то система (1) з постійною матрицею  $P$  не буде регулярною. Виявилось, що існують змінні матриці  $P(t)$  такі що  $\det P(t) \equiv 0 \quad \forall t \in R$  і при цьому система (1) буде регулярною на  $R$ .

Прикладом таких систем може бути наступний клас систем

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(p_1 \cos 2\omega t + p_2 \sin 2\omega t) + x_2(-p_2 \cos 2\omega t + p_1 \sin 2\omega t - \omega), \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1(-p_2 \cos 2\omega t + p_1 \sin 2\omega t + \omega) - x_2(p_1 \cos 2\omega t + p_2 \sin 2\omega t) \end{cases}$$

де ненульові дійсні параметри  $p_1, p_2, \omega \in R$  такі, що  $p_1^2 + p_2^2 = \omega^2$ ,  $p_1 \neq 0$ .

При цьому похідна в силу цієї системи від невідродженої квадратичної форми  $V = x_1^2 \cos 2\omega t + 2x_1 x_2 \sin 2\omega t - x_2^2 \cos 2\omega t$  буде дорівнювати:  
 $\dot{V} = 2p_1(x_1^2 + x_2^2)$ .

**Зауваження.** Для деяких систем (1) існують симетричні матриці  $S(t) \in C^1(R)$ , які задовольняють нерівність (3), а умова невідродженості (4) не виконується. Тоді система (1) не буде регулярною, а спряжена до неї  $\frac{dx}{dt} = -P^T(t)x$  буде слабо регулярною.

Відомо [1], що кожен слабо регулярну на  $R$  систему (1) завжди можна доповнити до регулярної наступним чином

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(t)x, \\ \frac{dy}{dt} = x - P^T(t)y. \end{cases}$$

Продовжуючи дослідження даного напрямку, приходимо до наступного твердження.

**Теорема.** Нехай існують  $n \times n$  - вимірні симетричні матриці  $S_j(t) \in C^1(R)$ ,  $j = \overline{1, k}$ , для яких виконуються нерівності

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[ \frac{dS_j(t)}{dt} + S_j(t)P(t) + P^T(t)S_j(t) \right] M_j(t)x, M_j(t)x \right\rangle \geq \\ & \geq \left\| [M_j(t) - M_{j+1}(t)]x \right\|^2, \quad j = \overline{1, k} \end{aligned}$$

з деякими  $n \times n$  - вимірними неперервними матрицями  $M_j(t)$ , причому  $\det M_1(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in R$  і  $M_{k+1}(t) \equiv 0$ , тоді похідна від квадратичної форми

$V_p = \sum_{i=1}^k p_i \langle S_i(t)x, x \rangle$  в силу системи (1) буде додатно визначеною при

достатньо великих значеннях параметрів  $p_i$ .

### Список використаних джерел:

1. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. Киев: Наук. думка, 1990. 270 с.
2. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. М.: Наука, 1987. 302 с.
3. Кулик В., Степаненко Н. Знакомінні функції Ляпунова в теорії лінійних розширень динамічних систем на торі // Укр. мат. журн. 2007. 46. №4. С. 488-500.

UDC 517.9

**A. Bomba**, Dr. Sc. (Eng.),

**K. Malash**

Rivne State Humanitarian University, Rivne

**MODELLING OF EXPLOSION PROCESSES  
WITH USING THE QUASICONFORMAL MAPPINGS METHOD  
WHERE THE IDENTIFICATION OF THE BOUNDARY OF ZONE  
OF INFLUENCE TAKES PLACE**

The investigation of the explosive processes' impact on the environment in some cases is carried out by modeling the last one as an undistributed filtration fluid. In this case, the velocity field resulting from the explosion is considered as a potential one [1]. However, in the vast majority of cases, such fields are far from perfect, since, apart from the potholes, there are also squeezed and loose areas of the soil. The influence of the characteristics of the process parameters (quasi-potential gradient) on the medium characteristics (fictitious conduction coefficient) determines the nonlinearity of the problem. To obtain solutions to the corresponding problems, in our opinion, it is expedient to develop quasiconformal mappings numerical methods, taking into account the ideas of phased fixation of the characteristics of the environment and process [2,4].

We assume that some area  $G_z$  ( $z = x + iy$ ), is bounded by the external contour  $L^* = \{z: f^*(x, y) = 0\} = \{x + iy: x = x^*(t), y = y^*(t), \alpha^* < t < \beta^*\}$  where the lines of subsections' division is unknown, the charge of the given form  $L_* = \{z: f_*(x, y) = 0\} = \{x + iy: x = x_*(t), y = y_*(t), \alpha_* < t < \beta_*\}$  is placed. The process of particle motion is described by the Darcy-type law and the equation of continuity (we consider the corresponding field of velocities stationary, non-circular, and non-shear in this kind of "extreme" case like to [2, 3]), where is the particle velocity, is the quasipotential of the corresponding field, is the medium density, is the pressure pulse [1], is the medium conductivity where is the value of the gradient, and , – are it's critical values, which characterize the delay and separation of the particles (the position of the line of the division), the parameters can be identified, proceeding from a physical experiment. This problem can be solved like [2,3].

Some difficulty in this problem formulation is to determine the external contour of the investigated area . It's so because we don't know the area of the explosion impact in advance. We suggest to identify the boundary of this area

in the process of solving a problem by solving a sequence of similar tasks, each of which differs from the previous one by their external contours (they can be reproduced by the same type functions with different parameters). After solving each of the following tasks (starting with the second one), we compare the obtained boundaries of the section of the hole, the squeezed and slightly intersected soil sections with those obtained for the previous one. In case if they coincide with sufficient accuracy, then the contour that we considered in the first of the comparable tasks is sought-after; otherwise, we move on to solving the next problem, in which we consider a somewhat "larger" area. The process is repeated until the desired boundaries of the cut, squeezed, and little-squeezed sections of the soil in the two neighboring tasks are not coincide.

Thus, an algorithm that allows identifying the position of the line of the breach section, the pressed and slightly pressed soil zones formed as a result of the explosion, as well as the boundary of the field of influence of the explosion is proposed; applying the quasiconformal mappings method automatically solves the problem of constructing a hydrodynamic grid and finding a field of speed. It can also be used to solving analogue problem for anisotropic medium.

#### References:

1. Bomba A. Nonlinear mathematical models of geohydrodynamics processes / A. Bomba, V. Bulavatskiy, V. Skopetskiy. – Kiev : Naukova Dumka, 2007. – 308 p.
2. Bomba A. Using of quasiconformal mappings to mathematical modeling of explosion processes / A. Bomba, A. Sinchuk // Volynskiy matematychniy visnyk. – Vol. 8. – P. 32-41.
3. Bomba A. Modeling of the explosion process in an anisotropic medium with quasiconformal mapping methods / A. Bomba, K. Malash // Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskiy National University. – Kremenchuk. – 2017. Vol. 4 (105). – P. 28-33.
4. Bomba A. Complex analysis methods: monography / A. Bomba, S. Kashtan, D. Prigornitskiy, S. Yaroshchack. – Rivne : NUWMNU, 2013. – 415 p.

УДК 539.3

**С. Ю. Бабич\***, д-р фіз.-мат. наук,

**Ю. П. Глухов\***, канд. фіз.-мат. наук,

**С. В. Дегтяр\*\***, канд. фіз.-мат. наук

\* Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, м. Київ,

\*\* Київський національний економічний університет ім. В. Гетьмана, м. Київ

#### **МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОШАРОВОЇ ОСНОВИ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ В ЗАДАЧАХ ПРО РУХОМЕ НАВАНТАЖЕННЯ**

Серед широкого кола питань, безпосередньо пов'язаних з постановкою і розв'язком задач про рухомі навантаження, важливими в практичному і теоретичному сенсі є питання дослідження поширення хвиль в пружних системах плоскопаралельних шарів з різними пружними властивостями.

Різноманітність вживаних типів багатошарових конструкцій і умов їх експлуатації привела до істотного різноманіття вживаних математичних моделей і методів їх дослідження. Але, незважаючи на значні накопичені результати, проблема створення і розвитку точніших математичних моделей, аналітичних і чисельних методів розрахунку напружено-деформованого стану багатошарових конструкцій при дії динамічних навантажень продовжує залишатися дуже важливою і актуальною.

У роботі представлені результати досліджень плоских і просторових задач про збурення рухомим поверхневим навантаженням багатошарової основи з початковими (залишковими) напруженнями.

Розглядається багатошарове середовище, що лежить на жорсткій основі або пружному напівпросторі.

Елементи шаруватого середовища складаються із задалегідь напружених ізотропних нелінійно-пружних стисливих або нестисливих з довільною формою пружного потенціалу. У разі ортотропного тіла вважаємо, що пружно-еквівалентні напрями співпадають з напрямками осей вибраної системи координат.

Граничні поверхні елементів багатошарового середовища є плоскі і паралельні між собою. Вважаємо можливими два варіанта контакту між елементами шаруватого середовища на граничних поверхнях: жорсткий контакт і нежорсткий контакт. Початковий напружено-деформований стан шаруватого середовища вважаємо однорідним.

До вільної границі верхнього шару прикладено навантаження, що рухається з постійною швидкістю. Відносно системи координат, пов'язаної з цим навантаженням, існує плоский деформований усталений стан.

Припускаємо, що напруження, що виникають за рахунок дії навантаження, значно менші початкових напружень. Це припущення дозволяє застосовувати лінеаризовану теорію пружності [1] для опису додаткового напруженого стану, викликаного дією навантаження.

При викладених вище умовах маємо задачу про усталений рух шаруватого середовища.

У загальному випадку рух такого багатошарового об'єкта описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних шостого порядку. Характеристичні рівняння є бікубічними алгебраїчними рівняннями алгебри.

Досліджений вплив початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь, що відповідають рівнянням руху елементів шаруватої основи. Проведена оцінка можливих значень коренів характеристичних рівнянь. Визначені необхідні і достатні умови існування кратних коренів характеристичних рівнянь для двомірних і тривимірних задач.

Чисельні розрахунки виконані для матеріалу з пружним потенціалом гармонічного типу і пружним потенціалом типу Бартенєва-Хазановича.

Отримані чисельні результати, що дозволяють встановити характер впливу початкових напружень на значення критичних швидкостей руху навантаження і на параметри напружено-деформованого стану багатошарового середовища.



Аналіз результатів показує, що наявність початкових напружень істотно впливає на розподіл напружень і швидкостей переміщень в шаруватому середовищі. Цей вплив різний залежно від положення точки шаруватого тіла відносно точки прикладення навантаження.

Значення параметрів напружено-деформованого стану в конкретній точці шаруватого тіла залежать від початкових напружень, її координат і умов контакту елементів шаруватого середовища.

### Список використаних джерел:

1. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: А.С.К., 2004. – 672 с.

УДК 539.3

О. М. Багно, д-р фіз.-мат. наук

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, м. Київ

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВОГО ПРОЦЕСУ У ШАРІ СТИСЛИВОЇ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ, ЩО ВЗАЄМОДІЄ З ПРУЖНИМ ПІВПРОСТОРОМ

У рамках моделі [1; 2], що базується на використанні тривимірних лінеаризованих рівнянь Ейлера для шару ідеальної стисливої рідини та лінійних рівнянь класичної теорії пружності для твердого півпростору, отримано дисперсійне рівняння для нормальних хвиль, яке розв'язувалося чисельно. Розрахунки проводилися для двох гідропружних систем. В якості компонентів першого хвилеводу вибиралися органічне скло та вода. Друга гідропружна система складалася з пари сталь – вода. Відзначимо, що матеріали цих пружних тіл відносяться до розряду жорстких. При цьому сталь є більш жорсткою, ніж оргскло.

Аналіз отриманих числових результатів показав, що швидкість єдиної поверхневої хвилі у пружному півпросторі з оргскла (менш жорсткий матеріал), взаємодіючому з шаром води, змінюється від швидкості хвилі Релея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,933557$ ) при  $\bar{h} \rightarrow 0$  до швидкості хвилі Стоунлі – Шольте  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,7717101$ ) при  $\bar{h} \rightarrow \infty$ .

У випадку системи: пружний півпростір зі сталі (більш жорсткий матеріал) – шар води аналіз характеру поведінки побудованих дисперсійних кривих показав, що фазова швидкість першої моди змінюється від швидкості хвилі Релея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923007$ ) при  $\bar{h} \rightarrow 0$  до швидкості хвилі Стоунлі – Шольте  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,462886$ ) при  $\bar{h} \rightarrow \infty$ . Швидкості мод вищого порядку при частотах їх зародження дорівнюють швидкості хвилі зсуву в пружному півпросторі  $\bar{c}_s$  і зі збільшенням товщини рідкого шару  $\bar{h}$  прямують до швидкості хвилі звуку в рідині  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ).

У роботі [3] показано, що фазова швидкість і структура хвилі Стоунлі – Шольте при взаємодії твердого та рідкого півпросторів залежать від механічних властивостей гідропружної системи і визначаються співвідношенням між швидкістю хвилі звуку в рідкому і швидкістю хвилі Релея в твердому півпросторах. У випадку гідропружної системи: оргскло (менш жорсткий матеріал) – вода механічні параметри такі, що швидкість поширення звукової хвилі в рідині  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 1,152595$ ) більша швидкості хвилі Релея у пружному півпросторі  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,933557$ ). Згідно з аналізом кінематичних характеристик поверхневих хвиль [3] це призводить до того, що в високочастотній частині спектра глибина проникнення поверхневої моди (хвиля типу Стоунлі) в пружне тіло більша глибини проникнення в рідину. Тому ця мода, поширюючись уздовж границі розділу середовищ, проникає в тверде тіло і локалізується, переважно, в приповерхневій області пружного півпростору, а також частково у приконтактній області шару рідини.

Для пари сталь (більш жорсткий матеріал) – вода має місце співвідношення  $\bar{a}_0 = 0,463021 < \bar{c}_R = 0,923007$ . При цьому згідно з роботою [3] у високочастотній частині спектра глибина проникнення квазіповерхневої моди 1 в рідину значно більша глибини проникнення в пружне тіло. Тому мода 1, поширюючись уздовж границі розділу середовищ, локалізується, переважно, в приконтактній області рідкого шару.

Таким чином, аналіз отриманих результатів показав, що нижча мода зі збільшенням частоти трансформується в поверхневу хвилю Стоунлі, а її локалізація в середовищах залежить від співвідношення між швидкістю хвилі звуку в шарі рідини і швидкістю хвилі Релея в пружному півпросторі. У разі взаємодії рідини з менш жорстким матеріалом ( $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$ ) значна частина потоку енергії зосереджується в твердому тілі. Зі збільшенням жорсткості (зменшенням  $\bar{a}_0$ ) потік енергії переміщується з пружного тіла в рідкий шар. За умови  $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$  рідкий шар стає основним хвилеводом, по якому здійснюється перенесення більшої частини хвильової енергії.

### Список використаних джерел:

1. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2 частях / А. Н. Гузь. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016 – Ч. 1: Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. – 2016.– 501 с.
2. Гузь А. Н. Введение в динамику сжимаемой вязкой жидкости / А. Н. Гузь. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017. – 244 с.
3. Волькенштейн М. М. Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела / М. М. Волькенштейн, В. М. Левин // Акустический журнал. – 1988. – 34, № 4. – С. 608-615.

## ГЕТЕРОКЛІНІЧНІ БІЖУЧІ ХВИЛІ В ДИСКРЕТНОМУ РІВНЯННІ СИНУС-ГОРДОН З НЕЛІНІЙНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ НА ДВОВИМІРНІЙ ГРАТЦІ

Розглядається дискретне рівняння синус-Гордон, яка описує динаміку нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розмішених на цілочисловій двовимірній ґратці. Передбачається, що кожний осцилятор нелінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = U'(q_{n+1,m} - q_{n,m}) - U'(q_{n,m} - q_{n-1,m}) + \\ + U'(q_{n,m+1} - q_{n,m}) - U'(q_{n,m} - q_{n,m-1}) - K \sin(q_{n,m}), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \quad (1)$$

де  $q_{n,m}(t)$  – узагальнена координата  $(n, m)$ -го осцилятора в момент часу  $t$ ,  $K > 0$ . Систему (1) можна розглядати як двовимірну версію моделі Френкеля-Конторової ([4]).

Серед розв'язків таких систем особливої уваги заслуговують біжучі хвилі. В статтях [1; 2; 3] вивчалися періодичні та гетероклінічні біжучі хвилі для таких систем. Ці результати поширюють результати, одержані в статтях [5; 6] для таких систем на одновимірній ґратці.

Зазначимо, що біжуча хвиля у цьому випадку має вигляд  $q_{n,m}(t) = u(n \cos \varphi + m \sin \varphi - ct)$  і для її профілю  $u(s)$ , де  $s = n \cos \varphi + m \sin \varphi - ct$ , рівняння (1) набуде вигляду

$$c^2 u''(s) = U'(u(s + \cos \varphi) - u(s)) - U'(u(s) - u(s - \cos \varphi)) + \\ + U'(u(s + \sin \varphi) - u(s)) - U'(u(s) - u(s - \sin \varphi)) - K \sin(u(s)). \quad (2)$$

Профіль гетероклінічної хвилі задовольняє умови

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s) = -\pi \quad \text{та} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} u(s) = \pi. \quad (3)$$

Важливу роль відіграють величини

$$c_1^2 := 2 \sup_{|r| < 6\pi} \left| \frac{U(r)}{r^2} \right|, \\ \delta := \frac{4c_1^2}{c^2 - c_1^2 + c\sqrt{c^2 - c_1^2}}.$$

Припускається, що потенціал  $U(r)$  задовольняє умови:

$$(i) \quad U \in C^1(\mathbb{R}), \quad U(0) = 0 \quad \text{та} \quad U(r) \geq 0 \quad \text{для всіх} \quad r \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \lim_{r \rightarrow \pm\infty} U(r) = +\infty.$$

$$(iii) \text{ Існує скінченна границя } \lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{U(r)}{r^2} \right|.$$

$$(iv) \text{ Швидкість хвилі } c \text{ задовольняє нерівність } c^2 > c_1^2.$$

За допомогою варіаційного методу і принципу концентрованої компактності одержано наступний результат.

**Теорема ([3]).** *Нехай виконуються умови (i)–(iv) і  $c$  таке достатньо велике, що  $\delta < \pi$ . Тоді рівняння (2) має розв'язок  $u$ , який задовольняє крайові умови (3).*

### Список використаних джерел:

1. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні синус-Гордона на двовимірній ґратці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. 2013. Вип. 9. С. 5-10.
2. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль в системі осциляторів на двовимірній ґратці // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2014. Т. 57. С. 45-52.
3. Bak S. M. The existence of heteroclinic travelling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2018. Vol. 14, №1.
4. Braun O. M., Kivshar Y. S. The Frenkel-Kontorova Model. Concepts, Methods and Applications. Texts and Monographs in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 2004. 472 p.
5. Kreiner C.-F., Zimmer J. Heteroclinic travelling waves for the lattice sine-Gordon equation with linear interaction // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2009. Vol. 25. P. 915-931.
6. Kreiner C.-F., Zimmer J. Travelling wave solutions for the lattice sine-Gordon equation with nonlinear interaction // Nonlinear Anal. 2009. Vol. 70. P. 3146-3158.

УДК 627.324.2/3:532.546:532.72

**А. П. Власюк\***, д-р техн. наук,  
**Н. А. Жуковська\*\***, канд. техн. наук,  
**В. В. Жуковський\*\***,  
**В. Ю. Федорчук\*\***

\*Національний університет «Острозька академія», м. Острог,

\*\*Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВОГО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БАГАТОШАРОВОГО ГРУНТОВОГО МАСИВУ З УРАХУВАННЯМ ТЕПЛОМАСОПЕРЕНЕСЕННЯ

Розглядається ґрунтовий масив, що складається з  $n$  шарів з різними механічними та фізико-хімічними властивостями в кожному з них. Шари ґрунту вважаються пружно-деформівними в межах лінійної теорії пружності

з різними пружними параметрами, на які діє сила тяжіння, а у випадку водонасиченого ґрунту враховується ще й архімедова та фільтраційні сили.

Математичну модель напружено-деформованого стану багатопшарового ґрунтового масиву з урахуванням тепломасоперенесення у тривимірному випадку в загальноприйнятих позначеннях можна описати наступною крайовою задачею [1]:

– система рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту з урахуванням тепломасоперенесення для шарів ґрунту, що знаходяться у водонасиченому та природному станах

$$\begin{aligned}
 & \mu_i(c_i, T_i) \Delta U_i + \left( \lambda_i(c_i, T_i) + \mu_i(c_i, T_i) \right) \frac{\partial \varepsilon_\theta^{(i)}}{\partial x} + \\
 & + \frac{\partial \lambda_i(c_i, T_i)}{\partial x} \varepsilon_\theta^{(i)} + 2 \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial x} \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial y} \left( \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right) + \\
 & + \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial z} \left( \frac{\partial U_i}{\partial z} + \frac{\partial W_i}{\partial x} \right) - \left( \left( 3 \frac{\partial \lambda_i(c_i, T_i)}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial x} \right) T_i + \right. \\
 & \left. + \left( 3 \lambda_i(c_i, T_i) + 2 \mu_i(c_i, T_i) \right) \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) \alpha_T^{(i)} + X_i = 0, \\
 & \mu_i(c_i, T_i) \Delta V_i + \left( \lambda_i(c_i, T_i) + \mu_i(c_i, T_i) \right) \frac{\partial \varepsilon_\theta^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_i(c_i, T_i)}{\partial y} \varepsilon_\theta^{(i)} + \\
 & + 2 \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial y} \frac{\partial V_i}{\partial y} + \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial x} \left( \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right) + \\
 & + \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial z} \left( \frac{\partial V_i}{\partial z} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \right) - \left( \left( 3 \frac{\partial \lambda_i(c_i, T_i)}{\partial y} + 2 \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial y} \right) T_i + \right. \\
 & \left. + \left( 3 \lambda_i(c_i, T_i) + 2 \mu_i(c_i, T_i) \right) \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) \alpha_T^{(i)} + Y_i = 0, \\
 & \mu_i(c_i, T_i) \Delta W_i + \left( \lambda_i(c_i, T_i) + \mu_i(c_i, T_i) \right) \frac{\partial \varepsilon_\theta^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial \lambda_i(c_i, T_i)}{\partial z} \varepsilon_\theta^{(i)} + \\
 & + 2 \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial z} \frac{\partial W_i}{\partial z} + \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial x} \left( \frac{\partial U_i}{\partial z} + \frac{\partial W_i}{\partial x} \right) + \\
 & + \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial y} \left( \frac{\partial V_i}{\partial z} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \right) - \left( \left( 3 \frac{\partial \lambda_i(c_i, T_i)}{\partial z} + 2 \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial z} \right) T_i + \right. \\
 & \left. + \left( 3 \lambda_i(c_i, T_i) + 2 \mu_i(c_i, T_i) \right) \frac{\partial T_i}{\partial z} \right) \alpha_T^{(i)} + Z_i = 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

де компоненти масових сил обчислюються за формулами

$$\begin{aligned}
X_i &= \begin{cases} \frac{dp_1^{(i)}}{dx}, X_i \in \Omega_i, \\ 0, X_i \in \Omega_i', \end{cases} & Y_i &= \begin{cases} \frac{dp_2^{(i)}}{dy}, X_i \in \Omega_i, \\ 0, X_i \in \Omega_i', \end{cases} \\
Z_i &= \begin{cases} \gamma_{3\theta}^{(i)} + \frac{dp_3^{(i)}}{dy}, X_i \in \Omega_i, \\ \gamma_{np}^{(i)}, X_i \in \Omega_i', \end{cases}
\end{aligned} \tag{2}$$

нормальні та дотичні деформації

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^{(i)} &= \frac{\partial U_i}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^{(i)} = \frac{\partial V_i}{\partial y}, \quad \varepsilon_z^{(i)} = \frac{\partial W_i}{\partial z}, \\
\varepsilon_{xy}^{(i)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xz}^{(i)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial z} + \frac{\partial W_i}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz}^{(i)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial z} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \right),
\end{aligned} \tag{3}$$

нормальні та дотичні напруження

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{(i)} &= \lambda_i(c_i, T_i) \varepsilon_\theta^{(i)} + 2\mu_i(c_i, T_i) \varepsilon_x^{(i)} - (3\lambda_i(c_i, T_i) + 2\mu_i(c_i, T_i)) \alpha_T^{(i)} \bar{T}_i, \\
\sigma_y^{(i)} &= \lambda_i(c_i, T_i) \varepsilon_\theta^{(i)} + 2\mu_i(c_i, T_i) \varepsilon_y^{(i)} - (3\lambda_i(c_i, T_i) + 2\mu_i(c_i, T_i)) \alpha_T^{(i)} \bar{T}_i, \\
\sigma_z^{(i)} &= \lambda_i(c_i, T_i) \varepsilon_\theta^{(i)} + 2\mu_i(c_i, T_i) \varepsilon_z^{(i)} - (3\lambda_i(c_i, T_i) + 2\mu_i(c_i, T_i)) \alpha_T^{(i)} \bar{T}_i, \\
\tau_{xy}^{(i)} &= 2\mu_i(c_i, T_i) \varepsilon_{xy}^{(i)}, \quad \tau_{xz}^{(i)} = 2\mu_i(c_i, T_i) \varepsilon_{xz}^{(i)}, \quad \tau_{yz}^{(i)} = 2\mu_i(c_i, T_i) \varepsilon_{yz}^{(i)},
\end{aligned} \tag{4}$$

де  $\varepsilon_\theta^{(i)} = \varepsilon_x^{(i)} + \varepsilon_y^{(i)} + \varepsilon_z^{(i)}$ ,  $X_i \in \Omega_i$ ,  $t > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $i_* = \overline{1, k}$ ,  $i^* = \overline{k+1, n}$  та рівняння конвективної дифузії при наявності тепломасоперенесення та узагальнені рівняння фільтрації солевих розчинів в неізотермічних умовах у водонасичених шарах, рівняння конвективного теплоперенесення у всій області дослідження, а також при відповідних крайових умовах на границях ґрунтового масиву та умовах спряження ідеального контакту для п'єзометричного напору, концентрації солей, температури, зміщень і напружень.

### Список використаних джерел:

1. Vlasyuk A. P., Zhukovska N. A., Zhukovskyy V. V., Klos-Witkowska A., Pazdriy I., Iatskyovska U. Mathematical Modelling of three-dimensional problem of soil mass stressed-strained state considering mass and heat transfer // Proceedings of the 2017 IEEE 9th International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications, September 2017, Volume 1, pp.265-269.

**В. С. Вовк,****В. Г. Самойленко,** д-р фіз.-мат. наук,**В. О. Сатко**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

### АСИМПТОТИЧНІ ТА ЧИСЕЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА

Одним з найбільш відомих нелінійних рівнянь математичної фізики є рівняння

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

яке запропонували Дідерік Кортевег і Густав де Фріз у 1895 році для опису відокремленої хвилі.

Це рівняння, яке зараз відоме як рівняння Кортевега-де Фріза, вивчалось багатьма вченими. Інтерес до цього рівняння пов'язаний з тим, що рівняння (1) володіє солітонними розв'язками, прикладом яких є функція

$$u(x,t) = \frac{a^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{a}{2} (x - a^2 t) \right).$$

Такі розв'язки демонструють так звану пружну взаємодію, яка притаманна твердим частинкам. Властивість пружної взаємодії певних частинних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза була встановлена за допомогою чисельного моделювання Мартіном Крускалом і Норманом Забускі [1] в 1965 році (взаємодію двох солітонних розв'язків можна спостерігати на анімації за посиланням [2]). М. Крускал і Н. Забускі також запропонували термін *солітон* і, відповідно, *солітонний розв'язок*.

Рівняння (1) є цікавим об'єктом для математичного дослідження і володіє розв'язками з різноманітними властивостями, які суттєво залежать від початкової функції. Крім солітонних розв'язків, це рівняння має так звані сингулярні розв'язки, які руйнуються за скінченний час, або ж грубо або ж згідно сценарію градієнтної катастрофи [3]. Вивчення рівняння Кортевега-де Фріза є досить складною задачею і для побудови його розв'язків та дослідження їх властивостей використовуються різні аналітичні і якісні методи, серед яких одним з найбільш потужних є метод оберненої задачі розсіювання. У випадку коли дисперсія середовища є малою, а середовище неоднорідним, тобто його властивості залежать від просторової і часової змінних, виникає сингулярно збурене рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\varepsilon^n u_{xxx} = a(x,t,\varepsilon)u_t + b(x,t,\varepsilon)uu_x, \quad (2)$$

де  $\varepsilon$  – малий параметр,  $n$  – натуральне число,  $a(x,t,\varepsilon), b(x,t,\varepsilon)$  – деякі гладкі функції змінних  $x, t, \varepsilon$ .

У загальному випадку точні розв'язки рівняння (2) отримати вже не можна, тому чи не єдиними ефективними методами дослідження цього

рівняння є асимптотичні методи і методи чисельного моделювання. Так, застосування нелінійного методу ВКБ дає можливість отримати [4], [5] асимптотичні солітоноподібні розв'язки рівняння (2), а чисельні методи дозволяють знайти наближені розв'язки цього рівняння для конкретних коефіцієнтів. Цілоком природньо виникає ідея про проведення порівняльного аналізу асимптотичних і чисельних розв'язків згаданого рівняння, що, зокрема, дозволить перевірити ефективність відповідних алгоритмів побудови асимптотичних розв'язків.

З іншого боку, при реалізації алгоритмів побудови асимптотичних солітоноподібних розв'язків виникають (лінійні і нелінійні) диференціальні рівняння (першого і третього порядків) зі змінними коефіцієнтами, точні розв'язки яких знайти дуже складно. У зв'язку з цим цілоком логічно розв'язувати такі рівняння чисельними методами і тим самим поєднати асимптотичні та чисельні методи для отримання наближених розв'язків рівняння (2).

### Список використаних джерел:

1. Zabusky N. J. Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states / N. J. Zabusky, M. D. Kruskal // Phys. Review Lett. – 1965. – V. 15. – P. 240-243.
2. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Two\\_soliton.gif](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Two_soliton.gif)
3. Похожаев С. И. О сингулярных решениях уравнения Кортевега-де Фриза / С. И. Похожаев // Матем. заметки. – 2010. – Т. 88, вып. 5. – С. 770-777.
4. Samoilenko V. Hr. Asymptotic expansion for one-phase soliton-type solution of Korteweg-de Vries equation with variable coefficients / V. Hr. Samoilenko, Yu. Samoilenko // Ukrainian Mathematical Journal. – 2005. – V. 57, №1. – P. 132-148.
5. Samoilenko V. Hr. Asymptotic two-phase soliton-like solutions of the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients / V. Hr. Samoilenko, Yu. Samoilenko // Ukrainian Mathematical Journal. – 2008. – V. 60, №3. – P. 449-461.

УДК 518.968

**К. Г. Геселева**

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

### **СУМІСНІСТЬ ТА ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ ТА ОБМЕЖЕННЯМИ**

Широке застосування в різних областях науки і техніки мають інтегро-функціональні рівняння з малою нелінійністю. У деяких випадках про розв'язки цих рівнянь буває відома додаткова інформація. Тому важливим є не тільки питання розв'язання такого рівняння, а й встановлення умов сумісності відповідної задачі.

Розглянемо в просторі  $L_2[a, b]$  інтегро-функціональне рівняння з малою нелінійністю



$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)dt + \int_a^b H(x,t)y(h(t))dt + \varepsilon \int_a^b G(x;t)F(t;y(t))dt, x \in [a,b], \quad (1)$$

з початковою умовою та обмеженнями

$$y(x) = \psi(x), x \in [a,b], \int_a^b \Phi_i(x)y(x)dx = \gamma_i, i = \overline{1,m}, \quad (2)$$

де  $f(x), \psi(x)$  – задані відповідно на  $[a,b]$  та за його межами функції, а  $y(x)$  – шукана функція. Лінійно-незалежна система функцій  $\{\Phi_i(x)\}$  та числова множина  $\{\gamma_i\}, i = \overline{1,m}$  – відомі. До рівняння (1) зводиться, наприклад, крайова задача для диференціального рівняння з відхиленням аргументу із запізненням. Зокрема у випадку сталого запізнення  $\Delta, h(x) = x - \Delta$ .

Задачу (1)-(2) будемо вважати сумісною, якщо існує така функція  $y(x)$ , яка є розв'язком рівняння (1), задовольняє початкову умову та обмеження (2).

Досліджено питання про сумісність задачі (1)-(2). Ідея варіанту ітераційного методу, у випадку сумісності задачі, полягає в тому, що послідовні наближення до шуканого розв'язку знаходимо за формулами

$$z_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)y_{k-1}(t)dt + \int_a^b H(x;t)y_{k-1}(h(t))dt + \varepsilon \int_a^b G(x;t)F(t;y_{k-1}(t))dt, x \in [a,b], \quad (3)$$

$$y_{k-1}(x) = \psi(x), x \in [a;b], \quad (4)$$

$$y_k(x) = z_k(x) + \int_a^b K(x;t)u_k(t)dt + \int_a^b H(x;t)u_k(h(t))dt + \varepsilon \int_a^b G(x;t)F(t;u_k(t))dt - u_k(x), x \in [a;b], \quad (5)$$

$$u_k(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^k \xi_j^k(x), x \in [a,b], u_k(x) = 0, x \notin [a,b], \quad (6)$$

$$\int_a^b \Phi_i(x)y_k(x)dx = \gamma_i, i = \overline{1,m}. \quad (7)$$

Для визначення невідомих параметрів  $\lambda_j^k, j = \overline{1,m}$ , отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \lambda_j^k = b^k, i = \overline{1, m},$$

де  $a_{ij}$  знаходять певним чином через величини  $K(x, t)$ ,  $H(x, t)$ ,  $h(t)$ , а

$$b_i^k = \int_a^b \Phi_i(x) z_k(x) dx - \gamma_i, i = \overline{1, m}.$$

Метод (3)-(7) буде збіжним, якщо матриця  $\Lambda = (a_{ij})$  – невиводжена, задача (1)-(2) сумісна і  $\rho(M) < 1$  ( $\rho(M)$  виражається через величини  $K(x, t), H(x, t), G(x; t), F(t; y(t))$ ), причому послідовність  $\{y_k(x)\}$  збігатиметься до єдиного розв'язку  $y^*(x)$  задачі (1)-(2), а послідовність  $\{u_k(x)\}$  збігатиметься до нуля.

УДК 517.947

**А. П. Громик**, канд. техн. наук

Подільський державний аграрно-технічний університет,  
м. Кам'янець-Подільський

### **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ У НЕОБМЕЖЕНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ КЛИНОВИДНИХ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ**

Розглядається задача побудови обмеженого на множині

$$D_k = \left\{ (t, r, \varphi, z) \mid t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j); \right. \\ \left. \varphi \in (0; \varphi_0), \varphi_0 < 2\pi; z \in (-\infty; +\infty) \right\}$$

класичного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [1]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[ a_{rj}^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \\ + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (1)$$

з відповідними початково-крайовими умовами, умовами спряження

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left( \alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right]_{z=R_k} = 0; \quad (2) \\ j = \overline{1, 2}; k = \overline{1, n}$$

й одними з крайових умов на гранях клина

$$u_j \Big|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z); u_j \Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{1j}(t, r, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1}; \quad (3)$$

$$u_j \Big|_{\varphi=0} = g_{2j}(t, r, z); \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{2j}(t, r, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{3j}(t, r, z); u_j \Big|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{3j}(t, r, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{4j}(t, r, z); \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\omega_{4j}(t, r, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1}. \quad (6)$$

Щодо проміжку  $I_n^+$  розглянуто 4 канонічні випадки:

1.  $R_0 = 0, R_{n+1} = +\infty$  (клиновидний простір)
2.  $R_0 > 0, R_{n+1} = +\infty$  (клиновидний простір з порожниною)
3.  $R_0 = 0, R_{n+1} = R < +\infty$  (необмежений клиновидний суцільний циліндр)
4.  $R_0 > 0, R_{n+1} = R < +\infty$  (необмежений клиновидний порожнистий циліндр)

Зауважимо, що:

1) у випадку  $\chi_j = 0$  рівняння (1) є класичними тривимірними неоднорідним хвильовим рівняннями (рівнянням коливань) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;

2) якщо  $\alpha_{11}^k = 0; \beta_{11}^k = 1; \alpha_{12}^k = 0; \beta_{12}^k = 1; \alpha_{21}^k = E_1^k; \beta_{21}^k = 0; \alpha_{22}^k = E_2^k; \beta_{22}^k = 0$ , де  $E_s$  – модулі Юнга, то умови спряження (2) збігаються з умовами ідеального механічного контакту. Таким чином, розглянуті гіперболічні крайові задачі математичної фізики можна вважати узагальненими математичними моделями коливних процесів у необмежених за змінною  $z$  кусково-однорідних за радіальною змінною  $r$  клиновидних за кутковою змінною  $\varphi$  циліндрично-кругових середовищах.

Інтегральні зображення точних розв'язків досліджуваних крайових задач (математичних моделей) одержано методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень з використанням методу головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна). Побудовані розв'язки мають алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задач й можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків коливних процесів у кусково-однорідних клиновидних середовищах, які описуються циліндричною системою координат. Проведено аналіз одержаних розв'язків в залежності від типу крайових умов на гранях клина  $\varphi = 0$  та  $\varphi = \varphi_0$  (Діріхле-Діріхле, Діріхле-Неймана, Неймана-Діріхле, Неймана-Неймана).

### Список використаних джерел:

1. Самойленко В. Г., Конет І. М. Рівняння математичної фізики. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2014. – 283 с.
2. Конет І. М., Пилипюк Т. М. Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка – Світ, 2017. – 84 с.

УДК 537.7

**О. Д. Кожушко,**

**П. М. Мартинюк,** д-р техн. наук

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне.

### **ПРО ЗАСТОСУВАННЯ FREEFEM++ ДО ЗАДАЧІ ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ У ВИПАДКУ РОЗЛИВУ ЗАБРУДНЮЮЧОЇ РЕЧОВИНИ НА ПОВЕРХНІ ҐРУНТУ**

Складність моделювання процесів вологоперенесення обумовлюється впливом на їх перебіг впливає значної кількості факторів. Математична модель задачі, яка побудована в роботі [2], містить наступні рівняння: вологоперенесення, масоперенесення, теплоперенесення та кінетики масообмінного процесу.

Мета даної роботи – чисельне дослідження двовимірної моделі вологоперенесення [2] у випадку розливу забруднюючої речовини на поверхні ґрунту. В якості забруднюючої речовини для даної задачі прийнято концентрований розчин кам'яної солі (NaCl), адже характеристики його розчинів є добре вивченими. Для конкретизації рівняння кінетики масообмінних процесів використано рівняння нерівноважної оборотної адсорбції і десорбції розчинених речовин при ізотермі Генрі [1, с. 175]:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1(c\sigma - \alpha N).$$

Для визначення змінних параметрів середовища (пористості, коефіцієнтів вологоперенесення, дифузії ґрунтової вологи та фільтрації), в даній роботі використано відомі результати (їх огляд наведено у [2]).

Нехай маємо двовимірний прямокутний масив ґрунту шириною  $L$  м та глибиною  $H$  м. Верхня межа шару ґрунту  $\Gamma_3$  контактує з атмосферою. Нижня межа ґрунту  $\Gamma_1$  є непроникною (лежить на кам'яній основі або на слабо проникних глинистих ґрунтах). Необхідно дослідити процеси вологоперенесення в заданому масиві ґрунту у випадку розливу на поверхні рідини з високою концентрацією хімічної речовини. Для заданої задачі використано наступні граничні умови:

$$\left. \frac{\partial s}{\partial n} \right|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = \left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, t \geq 0,$$

$$\left. \frac{\partial s}{\partial n} \right|_{\Gamma_1} = \left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1, t \geq 0,$$

$$T(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1} = T_1(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1, T(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_3} = T_{atm}(t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_3, t \geq 0,$$

$$s(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_3} = 1, \quad c(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_3} = C_2, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_3, 0 \leq t \leq t_1,$$

$$\left[ \left( \mathbf{D}_c \frac{\partial c}{\partial n} + \mathbf{D}_T \frac{\partial T}{\partial n} \right) - (\mathbf{q}_p, n)(c - C_1) \right]_{\Gamma_3} = 0,$$

$$-\mathbf{D}_p \frac{\partial s}{\partial n} (\sigma - \theta_{\min}) \Big|_{\Gamma_3} = q_E, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_3, t > t_1,$$

де  $T_1(\mathbf{X})$  – температура ґрунту на глибині,  $T_{atm}(t)$  – температура повітря,  $C_2 = C_{\max}$  – концентрація солі в розлитій речовині,  $q_E$  – обсяг випаровування вологи з поверхні ґрунту.

При розв’язуванні поставлених задач виділено два основні випадки та порівняно їх результати: 1) класична задача вологоперенесення; та 2) вологоперенесення із врахуванням тепло- та солеперенесення. Для відшукування її розв’язку використано програмне середовище FreeFem++, що реалізує розв’язування задач математичної фізики методом скінченних елементів [3].

Отримано, що у класичній задачі волога просочується на всю глибини ґрунту та встановлюється на рівні 0,66-0,72. В той же час при врахуванні тепло-солеперенесення розлита волога не досягає нижньої межі, де значення вологості залишається рівним початковому значенню 0,5. Відносна різниця розподілу вологи цих задач досягає 25% біля нижньої межі. В результаті встановлено, що процеси тепло-солеперенесення та зміна пов’язаних з ними параметрами є вагомими факторами для розглянутого випадку задачі.

### Список використаних джерел:

1. Веригин Н. Н., Васильев С. В., Саркисян В. С. и др. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород. Москва: Недра, 1977. 271 с.
2. Кутя Т. В., Герус В. А., Мартинюк П. М. Рівняння вологоперенесення в ґрунтах з урахуванням теплових та хімічних чинників. Математичні методи та фізико-механічні поля. 2017. Том 60, №1. С. 169-177.
3. Hecht, F., Auliac, S., Pironneau, O. et al. FreeFem++. Third Edition. Laboratoire Jacques-Louis Lions, Universite Pierre et Marie Curie, Paris. – 378 p. URL: <http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf> (дата звернення: 08.02.2018)

**І. М. Конет**, д-р фіз.-мат. наук,

**Т. М. Пилипюк**, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет

імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## ЕЛІПТИЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В НЕОБМЕЖЕНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВИХ ОБЛАСТЯХ

Розглядається задача побудови обмеженого на множині

$$D_k = \left\{ (r, \varphi, z) \mid r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j); \varphi \in [0; 2\pi); z \in (-\infty; +\infty) \right\}$$

$2\pi$ -періодичного щодо кутової змінної  $\varphi$  класичного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними еліптичного типу 2-го порядку [1]

$$\left[ a_{rj}^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j - \chi_j^2 u_j = -f_j(r, \varphi, z); \quad r \in I_j;$$

$$j = \overline{1, n+1}$$

з крайовими умовами

$$\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=-\infty} = 0; \quad \frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1; \quad j = \overline{1, n+1},$$

умовами спряження [2]

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left( \alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{r=R_k} = 0; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n}$$

та відповідними крайовими умовами на межі проміжку  $I_n^+$ , де

$a_{rj}, a_{\varphi j}, a_{zj}, \chi_j, \alpha_{js}^k, \beta_{js}^k$  – деякі сталі;

$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{j1}^k - \alpha_{j1}^k \beta_{2j}^k \neq 0; \quad c_{1k} \cdot c_{2k} > 0;$

$f(r, \varphi, z) = \{ f_1(r, \varphi, z), f_2(r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(r, \varphi, z) \}$  – задана обмежена неперервна функція;

$u(r, \varphi, z) = \{ u_1(r, \varphi, z), u_2(r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(r, \varphi, z) \}$  – шукана двічі неперервно диференційовна функція.

Щодо проміжку  $I_n^+$  розглянуто 4 канонічні випадки:

1)  $R_0 \equiv 0; \quad R_{n+1} \equiv +\infty$  (простір),

2)  $R_0 > 0; \quad R_{n+1} \equiv +\infty$  (простір з порожниною),

- 3)  $R_0 \equiv 0$ ;  $R_{n+1} \equiv R < +\infty$  (необмежений суцільний циліндр),  
 4)  $R_0 > 0$ ;  $R_{n+1} \equiv R < +\infty$  (необмежений порожнистий циліндр).

Інтегральні зображення єдиних точних аналітичних розв'язків досліджуваних крайових задач одержано методом класичних інтегральних перетворень Фур'є та гібридних інтегральних перетворень (Фур'є-Бесселя, Вебера, Ганкеля 1-го роду, Ганкеля 2-го роду) у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна). Побудовані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків стаціонарних процесів у кусково-однорідних середовищах, які описуються циліндричною системою координат.

### Список використаних джерел:

1. Самойленко В. Г., Конет І. М. Рівняння математичної фізики. – Київ: ВПЦ «Київський університет». 2014. – 283 с.
2. Конет І. М., Пилипук Т. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ. 2017. – 80 с.

УДК 539.3

**В. Ф. Мейш\***, д-р фіз.-мат. наук,

**Ю. А. Мейш\*\***, д-р техн. наук

\* Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, м. Київ,

\*\* Національний транспортний університет, м. Київ

## ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ДИСКРЕТНО ПІДКРІПЛЕНИХ ЕЛІПСОЇДАЛЬНИХ ОБОЛОНКАХ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Приведено постановку динамічних задач та рівняння коливань підкріплених еліпсоїдальних оболонок з врахуванням дискретності розміщення ребер при нестационарних навантаженнях. Підкріплена еліпсоїдальна оболонка з врахуванням дискретності розміщення ребер являє собою пружну структуру, що складається з обшивки і набору підкріплюючих ребер. Покладалось, що напружено-деформований стан гладкої оболонки та підкріплюючих ребер може бути визначений в рамках теорії оболонок та стержнів типу Тимошенка. Вважаємо, що деформований стан гладкої оболонки може бути визначений через компоненти узагальненого вектора переміщень серединної поверхні оболонки  $\bar{U} = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2)^T$ . Деформований стан  $i$ -го підкріплюючого елемента, направлено вздовж осі  $\alpha_1$ , визначається через компоненти узагальненого вектора переміщень центрів ваги поперечних перерізів ребра  $\bar{U}_i = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i})^T$ . Відповідно деформований

стан  $j$ -го підкріплюючого елемента, направлено вздовж осі  $\alpha_2$  – вектором  $\bar{U}_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, \varphi_{1j}, \varphi_{2j})^T$ . Покладаємо, що оболонка та дискретні підкріплюючі елементи жорстко з'єднані між собою. Покладаються відповідні умови контакту обшивка – ребро (випадок жорсткого підкріплення оболонка – підкріплюючий елемент). Для виведення рівнянь коливань дискретно підкріпленої еліпсоїдальної оболонки використовується варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського. Для чисельного розв'язку отриманих рівнянь застосовується різницевий метод побудови чисельного алгоритму. На основі вказаного підходу отримано розв'язки динамічних задач поведінки дискретно підкріплених еліпсоїдальних оболонок, які дозволяють проводити детальний аналіз напружено деформованого стану неоднорідної структури по просторовим та часовій координатам.

УДК 517.946

Г. І. Міхалевська, канд. фіз.-мат. наук

Хмельницький національний університет, м. Хмельницький

### МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЕЙЛЕРА-ЛЕЖАНДРА-(КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЕДСВА) НА СЕГМЕНТІ $[0, R_3]$ ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Одна із задач динаміки в неоднорідному середовищі приводить до побудови обмеженого в області

$$D = \{ (t, r) : t > 0, r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_3 < \infty \}$$

розв'язку системи диференціальних рівнянь гіперболічного типу 2-го порядку [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\alpha_1}^* [u_1] &= f_1(t, r), \quad r \in (0, R_1), \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \Lambda_{(\mu)} [u_2] &= f_2(t, r), \quad r \in (R_1, R_2), \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 B_{\alpha_2} [u_3] &= f_3(t, r), \quad r \in (R_2, R_3) \end{aligned} \quad (1)$$

з початковими умовами

$$\begin{aligned} u_1|_{t=0} &= g_{11}(r), \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{t=0} = g_{12}(r), \quad r \in (0, R_1), \\ u_2|_{t=0} &= g_{21}(r), \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{t=0} = g_{22}(r), \quad r \in (R_1, R_2), \\ u_3|_{t=0} &= g_{31}(r), \quad \frac{\partial u_3}{\partial t}|_{t=0} = g_{32}(r), \quad r \in (R_2, R_3), \end{aligned} \quad (2)$$



умовами спряження

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left( \alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right]_{r=R_i} = 0, \quad j, k = 1, 2 \quad (3)$$

та крайовими умовами

$$\lim_{r \rightarrow 0} [r^\gamma u_1(t, r)] = 0, \quad \left( \alpha_{22}^3 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^3 \right) u_3 \Big|_{r=R_3} = 0, \quad (4)$$

де  $B_\alpha^* = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1)r \frac{d}{dr} + \alpha^2$  – диференціальний оператор Ейлера [3],

$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_1^2}{1 - chr} + \frac{\mu_2^2}{1 + chr} \right)$  – узагальнений диференціальний

оператор Лежандра [4],  $B_\alpha = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1)r \frac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2$  –

диференціальний оператор Конторовича-Лебедева [3],  $\lambda \in (0, \infty)$ ,

$2\alpha + 1 > 0$ ,  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$ ,  $\alpha_{22}^3 \geq 0$ ,  $\beta_{22}^3 \geq 0$ ,  $\alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \neq 0$ ,  $\alpha_{jm}^k \geq 0$ ,  $\beta_{jm}^k \geq 0$ ,

$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$ ,  $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$ ,  $j, m, k = 1, 2$ .

Інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку задачі (1)-(4) побудовано методом гібридного інтегрального перетворення типу Ейлера-Лежандра-(Конторовича-Лебедева) [4].

### Список використаних джерел:

1. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 735 с.
1. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. – М. : Физматгиз, 1959. – 468 с.
2. Ленюк М. П. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лебедева / М. П. Ленюк, Г. І. Міхалевська. – Чернівці : Прут, 2002. – 280 с.
3. Міхалевська Г. І. Гібридне інтегральне перетворення Ейлера-Лежандра-(Конторовича-Лебедева) на сегменті  $[0, R_3]$  полярної осі / Г. І. Міхалевська, В. Ц. Міхалевський // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : зб. наук. пр. – Чернівці : Прут, 2011. – Вип.20. – С. 168-178.

**Р. С. Мусій**, д-р. фіз.-мат. наук,  
**Х. Т. Дрогомирецька**, канд. фіз.-мат. наук,  
**О. В. Веселовська**, канд. фіз.-мат. наук,  
**Л. В. Гошко**, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет “Львівська політехніка”, м. Львів

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОПРУЖНОЇ ПОВЕДІНКИ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ЦИЛІНДРА ЗА НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ДІЇ ЗА ВРАХУВАННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО РОЗСІЮВАННЯ ЕНЕРГІЇ**

Розглянуто електропровідний неферомагнітний циліндр віднесений до циліндричної системи координат  $r, \varphi, z$ , вісь  $Oz$  якої співпадає з віссю симетрії циліндра радіуса  $R$ . Поверхня циліндра теплоізольована і вільна від зовнішнього силового навантаження. Фізико-механічні характеристики матеріалу циліндра приймаються сталими. Циліндр знаходиться за однорідної електромагнітної дії, яка зумовлює в ньому нестационарні об'ємні джерела джоулевого тепла  $Q$  і пондеромоторні сили  $\vec{F}$ , що створюють нестационарне температурне поле  $T$  і механічні напруження, які описуються компонентами  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) тензора динамічних напружень  $\hat{\sigma}$ . За врахування процесу термопружного розсіювання енергії, привнесеної в циліндр електромагнітною дією, температурне поле і поле деформацій є взаємопов'язаними. Відомо, що за різко нестационарних електромагнітних дій вплив рухомості середовища на струми провідності є несуттєвим. Тому математична модель для визначення термопружної поведінки даного циліндра складається з двох етапів. На першому етапі зі співвідношень Максвелла визначається нестационарне електромагнітне поле, яке описується осовою компонентою  $H_z$  вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  та зумовлені цим полем джерела джоулевого тепла  $Q = 1 / \sigma (\text{rot} \vec{H})^2$  і пондеромоторні сили  $\vec{F} = \mu \cdot \text{rot} \vec{H} \times \vec{H}$ . Тут  $\sigma$  – коефіцієнт електропровідності;  $\mu$  – магнітна проникність матеріалу циліндра. На другому етапі з рівнянь зв'язаної плоскої осесиметричної динамічної задачі термопружності в переміщеннях [1] знаходяться температура  $T$  і вектор переміщень  $\vec{U} = \{U_r; 0; 0\}$  та відповідні їм компоненти  $\sigma_{jj}$  ( $j = r, \varphi, z$ ) тензора динамічних напружень  $\hat{\sigma}$ .

За використання методики апроксимації шуканих функцій, якими є  $H_z$ ,  $T$  і  $U_r$ , по радіальній координаті циліндра [1], знайдено загальний розв'язок даної задачі за однорідної нестационарної електромагнітної дії у вигляді згорток функцій, що відповідають однорідним розв'язкам від-

повідних задач електродинаміки і термопружності та заданим початковим і крайовим умовам. Чисельно проаналізовано температуру і напруження в циліндрі з нержавної сталі X18H9T за однорідної дії електромагнітного імпульсу (ЕМІ) залежно від його часових параметрів та параметра  $\varepsilon_*$ , що характеризує зв'язаність полів деформації і температури.

Дію ЕМІ математично описано значенням функції  $H_z$  на поверхні циліндра у вигляді  $H_z(R,t) = kH_0(e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t})$ . Тут  $\beta_1$  і  $\beta_2$  – параметри, що відповідають часам фронтів наростання і спадання ЕМІ;  $k$  – нормувальний множник;  $H_0$  – максимальне значення напруженості магнітного поля за дії ЕМІ.

Виявлено наступні нові закономірності теплових і механічних властивостей даного циліндру за розглядуваної дії ЕМІ:

- значення напружень і температури за тривалостей ЕМІ  $t_i \leq 10^{-2} c$  за врахування термопружного розсіювання ( $\varepsilon_* \neq 0$ ) практично не відрізняються від таких, знайдених без такого врахування ( $\varepsilon_* = 0$ );
- за  $\varepsilon_* \neq 0$  максимальні значення температури приблизно на  $1 \div 3\%$  більші, ніж при  $\varepsilon_* = 0$ ;
- за  $\varepsilon_* = 0$  при окреслених вище тривалостях ЕМІ режим власних коливань всіх компонент тензора динамічних напружень досягається приблизно за час  $t \geq 0,5t_i$ ;
- за  $\varepsilon_* \neq 0$  у циліндрі амплітуда власних коливань всіх компонент  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) тензора  $\hat{\sigma}$  згасає (практично до нуля) за час  $t \leq 1,0 \cdot 10^5 t_i$ .

**Висновок.** За тривалостей ЕМІ  $t_i \leq 10^{-2} c$  процес нагріву і деформування електропровідного циліндра має адіабатичний характер [1].

#### Список використаних джерел:

1. Мусій Р.С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми. – Львів: РАСТР-7, – 2010. – 216 с.

**О. М. Омелян**, канд. фіз.-мат. наук

Полтавський національний технічний університет  
імені Юрія Кондратюка, м. Полтава

## НЕЛОКАЛЬНІ АНЗАЦИ ТА РЕДУКЦІЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ХЕМОТАКСИСУ

**Вступ.** У попередній нашій роботі [1] ми знайшли нелокальні анзаци та провели редукцію нелінійної системи рівнянь конвекції-дифузії, використавши симетрійні властивості відповідної лінійної системи. В даній роботі ми знайшли нелокальні анзаци та виконали за їх допомогою редукцію нелінійної системи, використавши симетрійні властивості нелінійної системи.

Розглянемо систему нелінійних рівнянь конвекції-дифузії виду:

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_t = \partial_x \left[ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu(u^2)^2 \end{pmatrix} \right], \quad (1)$$

де  $u^a = u^a(x_0, x_1)$ ,  $a = \overline{1,2}$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ ,  $t$  – часова змінна,  $x$  – просторова змінна, нижній індекс означає диференціювання за відповідною змінною. Система рівнянь вигляду (1) застосовується в природничих науках для моделювання хемотаксису мікроорганізмів внаслідок впливу фізичних або хімічних факторів (див. [2], [3]).

Дією композиції нелокальних перетворень:

$$t = t, \quad x = x, \quad u^a = v^a_x, \quad (2)$$

$$t = x_0, \quad x = w^2, \quad v^1 = w^1, \quad v^2 = x_1. \quad (3)$$

$$x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad w^1 = z^1, \quad w^2 = z^2, \quad (4)$$

де  $v^a = v^a(t, x)$  – нові невідомі функції,  $x_0, x_1$  – нові незалежні змінні,  $w^a = w^a(x_0, x_1)$  – нові залежні змінні,  $z^a = z^a(x_0, x_1)$  – нові залежні змінні; система (1) перетворюється до системи нелінійних рівнянь виду:

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[ \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_1}{(z^2)^2} & \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)z^1}{(z^2)^3} \\ -\frac{2\lambda_1}{z^1 z^2} & \frac{2\lambda_1 + \lambda_2}{(z^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}_1 - \begin{pmatrix} \frac{\mu z^1}{(z^2)^2} \\ \frac{\mu}{z^2} \end{pmatrix} \right]. \quad (5)$$

Дослідження симетрійних властивостей систем (1), та (5) показало, що ці системи володіють принципово різними алгебрами інваріантності. Зокрема, система (5) при  $\mu = 0, \lambda_2 = \lambda_1$  ін варіантна відносно алгебри

$$A_8 = \left\langle \partial_0, \partial_1, D = 2x_0 \partial_0 + z^2 \partial_{z^2}, D_2 = x_1 \partial_1 - \frac{3}{2} z^1 \partial_{z^1} - z^2 \partial_{z^2} \right\rangle, \quad (6)$$

$$Q_1 = z^1 \partial_{z^1}, K = x_1^2 \partial_1 - x_1 (3z^1 \partial_{z^1} + 2z^2 \partial_{z^2}) \Big\}.$$

Дією нелокальних перетворень (2-4) на лівівські анзаци системи (5), побудовані за виглядом алгебри інваріантності (6), отримуємо наступні нелокальні анзаци системи (1).

$$u^1 = \varphi^1(\omega) \cos \alpha, \quad u^2 = \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\cos^2 \alpha}, \quad (7)$$

$$\omega = x, \quad \alpha = \varphi^2(\omega) - \frac{t}{p};$$

$$u^1 = t^{-\frac{1}{2}} \varphi^1(\omega) \cos \alpha, \quad u^2 = t^{-\frac{1}{2}} \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\cos^2 \alpha}, \quad (8)$$

$$\omega = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad \alpha = \varphi^2(\omega) - \frac{1}{p} \ln t.$$

Нелокальні анзаци (7-8) редукують систему (1) до наступних систем звичайних диференціальних рівнянь

$$\ddot{\varphi}^1 = \varphi^1 (\dot{\varphi}^2)^2, \quad \ddot{\varphi}^2 + 2 \frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1} \dot{\varphi}^2 = \frac{2}{p}; \quad (9)$$

$$\ddot{\varphi}^1 = \omega \dot{\varphi}^1 + [(\dot{\varphi}^2)^2 + 1] \varphi^1, \quad \ddot{\varphi}^2 = (\omega - 2 \frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1}) \dot{\varphi}^2 + \frac{2}{p}. \quad (10)$$

Розв'язавши редуковані системи (9), (10) та використавши відповідні анзаци, можна знайти точні розв'язки системи (1).

### Список використаних джерел:

1. Омелян О. М., Серова М. М. Лінеаризація систем нелінійних рівнянь конвекції-дифузії за допомогою нелокальних перетворень // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. – 2016. – Вип. 13. – С. 131-143.
2. Keller E. F., Segel L. A., Model for chemotaxis. // J.Theor.Biol. – 1971. – V.30. – P. 225-234.
3. Adler J. Chemotaxis in bacteria. // Science. – 1996. – V. 153. – P. 708-716.

**М. Р. Петрик**, д-р фіз.-мат. наук,  
**Д. М. Михалик**, канд. техн. наук,  
**О. Ю. Петрик**,  
**І. В. Бойко**, канд. фіз.-мат. наук

Тернопільський національний технічний університет  
імені Івана Пулюя, м. Тернопіль

## **МОДЕЛЮВАННЯ АДСОРБЦІЇ І ДЕСОРБЦІЇ ВУГЛЕВОДНІВ У НАНОПОРИСТИХ КАТАЛІЗАТОРАХ НЕЙТРАЛІЗАЦІЇ ВИКИДІВ З ВИКОРИСТАННЯМ НЕЛІНІЙНОЇ ІЗОТЕРМИ ЛЕНГМЮРА**

Розробка ефективних математичних моделей дослідження кінетики процесів тепломасопереносу вуглеводнів, що протікають в мікро- і макро порах цеолітних каталізаторів систем нейтралізації вихлопних газів є важливим завданням, що націлене на зниження основних джерел викидів в атмосферу об'єктів виробництва енергії і транспорту. Викиди автотранспорту, особливо продуктів неповного згорання, кількість яких стрімко збільшується при періодичних увімкненнях-вимкненнях бензинових двигунів (режими холостої роботи та «холодних» запусків) під час багатогодинних зупинок у багатокілометрових корках великих та малих міст на сьогодні складають найбільшу загрозу довкіллю та здоров'ю людей та пришвидшують процес глобального потепління.

Оптимальне проектування таких об'єктів визначається експериментальними і теоретичними дослідженнями кінетики складного комплексу процесів тепломасопереносу, адсорбції і десорбції вуглеводнів, що протікають в мікро- і макро порах цеолітів каталізаторів.

Вхідний потік газової суміші дифундує в макропори (межчастинковий простір) каталітичного середовища і в мікро- і нанопори частинок (кристалітів) цеоліту, при цьому припускається, що в системі досягається стан динамічної рівноваги (насичення), що визначається відповідним градієнтом концентрацій адсорбованого речовини, а закон динамічної рівноваги визначається залежністю Ленгмюра. Процеси адсорбції і десорбції розглядаються у вигляді послідовних фаз, що визначаються тривалості насичення робочого шару адсорбенту, а також тривалістю його регенерації (десорбції поглиненої речовини з мікропор адсорбенту). З причини змін температурного режиму роботи системи і вхідних потоків враховується вплив температурних ефектів на внутрішню кінетику масопереносу.

В основі моделей лежить система диференціальних рівнянь з частинними похідними, які описують зовнішню дифузію в макропорах (газова фаза між кристалітами цеоліту) і внутрішню дифузію в мікро- і нанопорах кристалітів (адсорбційна фаза) з урахуванням взаємовпливу потоків в макропори міжчастинкового простору і сумарної кількості мікропотоків в порах частинок каталітичного середовища. Адсорбційна взаємодія між молекулами адсорбату і активними центрами адсорбції на поверхні поділу фаз в макропорах кристаліту визначається на підставі моделі адсорбційної рівноваги (adsorption equilibrium) Ленгмюра з урахуванням ряду фізичних передумов.

Кінетика циклічної адсорбції і десорбції для систем нейтралізації вихлопних газів в робочому середовищі адсорбенту с урахуванням наведених фізичних обґрунтувань і припущень описується наступною системою нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c(t, z)}{\partial t} + \frac{\partial a(t, z)}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial z} &= D_{inter} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}; \\ -H \frac{\partial T(t, z)}{\partial t} - u h_g \frac{\partial T}{\partial z} - Q \frac{\partial a}{\partial t} - X^2 T + \Lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= 0; \\ \frac{\partial a}{\partial t} &= \beta(c - \gamma a(z, t) - \varepsilon a^2(z, t)), \end{aligned} \quad (1)$$

з початковими та крайовими умовами, для адсорбції:

$$c(t, z)|_{t=0} = 0; \quad c(t, z)|_{z=0} = c_m; \quad \frac{\partial}{\partial z} c(t, z)|_{z=\infty} = 0, \quad (2)$$

та початковими та крайовими умовами для десорбції:

$$\begin{aligned} T(t, z)|_{t=0} = T_0; \quad c(t, z)|_{z=0} = c_m(t); \quad \frac{\partial}{\partial z} c(t, z)|_{z=\infty} = 0; \\ T(t, z)|_{z=0} = T_{in}(t); \quad \frac{\partial}{\partial z} T(t, z)|_{z=\infty} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

Задача (1)-(3) є змішаною крайовою задачею для нелінійної системи диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними параболічного типу, тому розв'язок задачі будемо шукати у вигляді асимптотичні сум.

$$\begin{aligned} c(t, z) &= c_0(t, z) + \varepsilon c_1(t, z) + \varepsilon^2 c_2(t, z) + \dots, \\ T(t, z) &= T_0(t, z) + \varepsilon T_1(t, z) + \varepsilon^2 T_2(t, z) + \dots, \\ a(t, z) &= a_0(t, z) + \varepsilon a_1(t, z) + \varepsilon^2 a_2(t, z) + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

УДК 539.3

**Є. А. Сторожук**, д-р фіз.-мат. наук,  
**С. Б. Харенко**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, м. Київ

### **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ КОНІЧНОЇ ОБОЛОНКИ З КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ ПРИ ДІЇ КОМБІНОВАНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

В інженерній практиці викликає інтерес дослідження пружнопластичного стану тонкостінних елементів конструкцій (оболонки і пластинки), які знаходяться під дією двох або більшої кількості видів навантаження. В цьому випадку в елементах конструкцій можуть виникати зони

розвантаження, а їх кінцевий напружено-деформований стан буде залежати від історії (послідовності) навантаження.

Розглядається тонка конічна оболонка, яка виготовлена з однорідного ізотропного матеріалу, послаблена двома круговими отворами і віднесена до спряженої криволінійної ортогональної системи координат  $(\ell, \vartheta, \gamma)$  з початком у вершині конуса. Отвори можуть бути розташованими вздовж твірної або вздовж напрямної. При значних рівнях діючого навантаження в області вказаних концентраторів напружень виникають пластичні деформації, а властивості матеріалу оболонки описуються нелінійною діаграмою деформування.

Геометричні співвідношення запишемо на основі теорії непологих оболонок, в якій мають місце гіпотези Кірхгофа–Лява, у векторній формі [1, с. 55]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\ell\ell} &= \bar{e}_\ell \cdot \frac{\partial \bar{u}}{A_\ell \partial \ell}; \quad \varepsilon_{\ell g} = \bar{e}_g \cdot \frac{\partial \bar{u}}{A_\ell \partial \ell} + \bar{e}_\ell \cdot \frac{\partial \bar{u}}{A_g \partial \vartheta}; \\ \mu_{\ell\ell} &= \bar{e}_\ell \cdot \frac{\partial \bar{\phi}}{A_\ell \partial \ell}; \quad 2\mu_{\ell g} = \bar{e}_g \cdot \frac{\partial \bar{\phi}}{A_\ell \partial \ell} + \bar{e}_\ell \cdot \frac{\partial \bar{\phi}}{A_g \partial \vartheta}; \\ e_{\ell\ell} &= \varepsilon_{\ell\ell} + \gamma \mu_{\ell\ell}; \quad e_{\ell g} = \varepsilon_{\ell g} + 2\gamma \mu_{\ell g} \quad (\ell \rightarrow g), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $A_\ell, A_g, k_{\ell\ell}, k_{g g}$  – параметри Ламе і кривини серединної поверхні оболонки;  $\bar{u} = u\bar{e}_\ell + v\bar{e}_g + w\bar{n}$  – вектор переміщень точок серединної поверхні оболонки;  $\bar{e}_\ell, \bar{e}_g, \bar{n}$  – орти системи координат  $(\ell, \vartheta, \gamma)$ ;  $\bar{\phi} = \phi_\ell \bar{e}_\ell + \phi_g \bar{e}_g$  – вектор кутів повороту нормалі, які визначаються за формулами:  $\phi_\ell = -\bar{n} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial A_\ell \partial \ell} \quad (\ell \rightarrow g)$ .

Фізичні співвідношення представимо згідно теорії текучості з ізотропним зміцненням, в якій прийнято умову пластичності Мізеса, а прирости пластичних деформацій визначаються за асоційованим законом текучості [2, с.58]:

$$de_{\ell\ell}^p = \frac{3de_i^p}{2\sigma_i} S_{\ell\ell} \quad (\ell \rightarrow g); \quad de_{\ell g}^p = \frac{3de_i^p}{\sigma_i} S_{\ell g}. \quad (2)$$

У формулах (2) введені позначення:  $\sigma_i, de_i^p$  – інтенсивності напружень і приростів пластичних деформацій;  $S_{\ell\ell}, S_{g g}, S_{\ell g}$  – компоненти дивіатора напружень.

Пружнопластичний стан конічної оболонки з двома круговими отворами описується системою нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних восьмого порядку із змінними коефіцієнтами. Розв'язання таких систем пов'язане із значними математичними труднощами. Тому автори розробили чисельну методику розв'язання задач даного класу.

Система розв'язувальних рівнянь отримана з принципу можливих переміщень за допомогою процедури покрокового навантаження, методу



додаткових напружень і методу скінченних елементів. Запропоновано варіант методу скінченних елементів, в якому геометричні гіпотези Кірхгофа–Лява реалізовані дискретно ( у вузлах скінченного елемента), а мембранні деформації  $\varepsilon_{\ell\ell}, \varepsilon_{g\theta}, \varepsilon_{\ell g}$  (1) обчислюються з використанням методу подвійної апроксимації.

Конкретні числові результати отримані для конічної оболонки з двома однаковими круговими отворами при дії рівномірного внутрішнього тиску і осового розтягу значної інтенсивності.

### Список використаних джерел:

1. Максимюк В. А. Вариационно-разностные методы в линейных и нелинейных задачах деформирования оболочек из металлических и композитных материалов (обзор) / В. А. Максимюк, Е. А. Сторожук, И. С. Чернышенко // Прикл. механика. – 2012. – Т. 48, №6. – С. 3-80.
2. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. – М. : Машиностроение, 1975. – 400 с.

УДК 517.944

Г. П. Хома, д-р фіз.-мат. наук,

С. Г. Хома–Могильська, канд. фіз.-мат. наук

Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Щоб дослідити асимптотичними методами Крилова-Боголюбова-Митропольського-Мосеєнкова [1, 2] такі крайові  $2\pi$ -періодичні задачі вигляду:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t) + \varepsilon F(x, t, u, u_t, u_x); \quad (1)$$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t) + \varepsilon F(x, t, u, u_t, u_x); \quad (2)$$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t) + \varepsilon F(x, t, u, u_t, u_x); \quad (3)$$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = P(x, t, u) + \varepsilon F(x, t, u, u_t, u_x), \quad (4)$$

де  $\varepsilon$  – малий параметр,  $P(x, t, u)$  – взагалі, нелінійна функція, що задовольняють крайові та  $2\pi$ -періодичні умови

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (5)$$

$$u(x, t + 2\pi) = u(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (6)$$

потрібно знайти поведінку таких незбурених задач ( $\varepsilon=0$ ) для рівнянь

$$u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = g(x, t); \quad (7)$$

$$u_{tt}^0 - a^2 u_{xx}^0 = f(t); \quad (8)$$

$$u_{tt}^0 - a^2 u_{xx}^0 = g(x, t); \quad (9)$$

$$u_{tt}^0 - a^2 u_{xx}^0 = P(x, t, u), \quad (10)$$

що задовольняють крайові та  $2\pi$ -періодичні умови вигляду

$$u^0(0, t) = u^0(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (11)$$

$$u^0(x, t + 2\pi) = u^0(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (12)$$

Крайова  $2\pi$ -періодична задача вигляду:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (13)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (14)$$

$$u(x, t + 2\pi) = u(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (15)$$

з самого початку [1, 3–4] при  $a = 1$  досліджувалася у класах функцій

$$A_2 = \{g : g(x, t) = g(\pi - x, t + \pi) = g(x, t + 2\pi)\}; \quad (16)$$

$$A_2^+ = \{g : g(x, t) = -g(\pi - x, t) = -g(x, t - \pi) = g(x, -t)\}, \quad (17)$$

де встановлено такі результати:

**Лема 1.** Якщо  $g \in A_2^+$ , то  $g \in A_2$ , та за допомогою оператора  $S$ , що породжує функцію

$$u(x, t) = -\frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi, \tau) d\tau \equiv (Sg)(x, t), \quad (18)$$

яка при  $g \in G_{\pi t} \cap Q_{2\pi}$  є класичним розв'язком рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (19)$$

**Лема 2.** Якщо  $g \in C_\pi \cap A_2^+$ , то  $Sg \in C_\pi^{1,1} \cap A_2^+$ .

**Теорема [4].** Якщо  $g \in G_{\pi t} \cap A_2^+$ , то функція  $u(x, t) = (R_2^+ g)(x, t)$ , яка визначена формулою

$$u(x, t) = (R_2^+ g)(x, t) \equiv (Sg)(x, t) + \frac{\pi - 2x}{4\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi, \tau) d\tau, \quad (20)$$

є єдиною функцією з простору  $C_\pi^{2,2} \cap A_2^+$ , яка задовольняє умови крайової  $2\pi$ -періодичної задачі (19), (14), (15). Крім того,  $R_2^+ \in L(C_\pi \cap A_2^+, C_\pi^{1,1} \cap A_2^+)$ ,  $R_2^+ \in L(G_{\pi t} \cap A_2^+, C_\pi^{2,2} \cap A_2^+)$ , при цьому

$$\begin{aligned} \left\| (R_2^+ g)(x, t) \right\|_{C_x} &\leq \frac{\pi^2}{2} \|g(x, t)\|_{C_x}; \\ \left\| (R_2^+ g)_t(x, t) \right\|_{C_x} &\leq \frac{\pi}{2} \|g(x, t)\|_{C_x}; \\ \left\| (R_2^+ g)_x(x, t) \right\|_{C_x} &\leq \pi \|g(x, t)\|_{C_x}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{де } \|\varphi(x,t)\|_{C_x} = \sup_{(x,t) \in [0,\pi] \times \mathbf{R}} |\varphi(x,t)|.$$

### Список використаних джерел:

1. Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – К. : Наук. думка, 1991. – 232 с.
2. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К. : Вища школа, 1976. – 589 с.
3. Вейвода О.М., Штедры М. Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений // Дифференциальные уравнения. – 1984. – Т. 20, № 10. – С. 1733-1739.
4. Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. I // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, № 7. – С. 912-921.

УДК 517.3;532.5

**Д. И. Черний**, канд. физ.-мат. наук

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка, г. Киев

### О ПРЕОБРАЗОВАНИИ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА К ОБЫКНОВЕННОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Для вязкой несжимаемой жидкости, в предположении о консервативности поля внешних сил  $U$  уравнения Навье-Стокса могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nabla U + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{V}, \quad (1)$$

$$\nabla \vec{V} = 0. \quad (2)$$

В докладе представлено, как при рассмотрении плоскопараллельных слоистых течений (параллельно плоскости  $OXY$ , ортогонально оси  $OZ$ , Рис.1) в случае, когда вектор вихря параллелен плоскости  $OXY$  для уравнений (1), (2) получается интеграл движения в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{P}{\rho} + U - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = f(z,t). \quad (3)$$

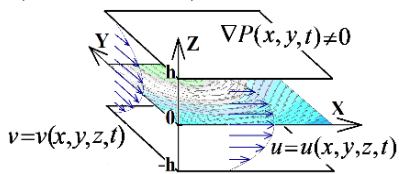


Рис. 1. Схема течения

Здесь  $f(z, t)$  должна быть определена для всех моментов времени  $t$  и для каждого слоя  $z$ , соответственно. При  $\mu \rightarrow 0$  величиной  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$  можно пренебречь, что приводит (18) к интегралу Коши-Лагранжа для плоского течения.

В докладе представлено, как при заменах, с разделением переменных выражение (3) позволяет сделать постановку нелинейной начально-краевой задачи для определения изменения структуры скоростей в слое в виде

$$R_t - \frac{\mu}{\rho} R_{zz} = A(t)R^2 + B(t)R + C(t) \quad (3)$$

при начальных условиях

$$R(z, 0) = P_n(z) \quad (4)$$

и краевых условиях вида

$$R(\pm 1, t) = 0 \quad (3)$$

либо краевых условиях вида

$$R(0, t) = 1, \quad (4)$$

$$R(-1, t) = 0 \quad (R(1, t) = 0). \quad (5)$$

Рассматриваются свойства решений при различных условиях и различных численных значениях параметров.

#### Список використаних джерел:

1. Ламб Г. Гидродинамика. М., Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1947. 928 с.
2. Cherniy D., Dovgij S., Meleshko V. The Vortex Model of a Viscid Wall's Layer // IUTAM Symposium on "Vortex Dynamics: Formations, Structure and Function", Abstract Book, March 10(Sun)-14(Thu), 2013, Centennial Hall, Kyushu University School of Medicine, Fukuoka, Japan, p.p. 126-127.
3. Hele-Shaw H. S. Investigation of the nature of surface resistance of water and of stream motion under certain experimental conditions // Trans.Inst. Nav. Arch. XI
4. Черний Д. И. Математическая модель течения в мелководной акватории. // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна Серія «Мат. моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» Харків, 2016. Вип. 29. С. 78-86.

УДК 519.83

**T. Karataieva**, Ph. D.,

**V. Koshmanenko**, Ph. D.

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv

**THE WINNER'S STRATEGY FOR A LOSER  
IN A MODEL OF 3-PLAYERS CONFLICT GAME**

We discuss a model of 3-players conflict game based on simple formula [1, 2] of vital resource redistribution:

$$p_i(t+1) = \frac{1}{z} p_i(t)(1 - c_i r_i(t)), \quad i = 1, 2, 3, \quad t = 0, 1, 2, 3 \dots$$

where  $p_i(t)$  is relative value of the  $i$ -th agent resource,  $r_i(t)$  – the corresponding value for the averaged co-agent,  $\frac{1}{z}$  – rationing on whole resource. Parameter  $0 \leq c_i \leq 1$  defines the strategy of the  $i$ -th agent and characterizes the activity of conflict interaction. The problem is to investigate behavior of  $p_i(t)$ ,  $t \rightarrow \infty$  for any initial distribution of the resource  $0 < p_1, p_2, p_3 < 1$ ,  $t = 0$ , depending on the choice of strategic parameters  $c_i$ .

If all  $c_i$  are the same, for example,  $c_i = 1$ , then

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{max}(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t) = 0, \quad p_{max} := \max_i \{p_i\}, \quad p_k \neq p_{max}.$$

In particular, an agent with minimum starting value of the resource (loser) disappears the first,  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{min}(t) = 0$ , where  $p_{min} := \min_i \{p_i\}$ .

We are looking for an optimal  $c_{min}$  strategy for a loser, which provides him with not only survival, but even achieve a complete victory in the war with his opponents.

*Theorem* Let  $p_{max} < \frac{1}{2}$ . A loser reaches the complete victory,  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{min}(t) = 1$ , if its conflict activity parameter satisfies the inequality:

$$0 \leq c_i < c_{max} \frac{1 - p_{max}}{2(1 - p_{min})}.$$

The inequality  $0 \leq c_{min} \leq c_{max} \cdot p_{min}/p_{max}$  ensures the victory for a loser under any  $p_{max} < 1$ .

**References:**

1. Koshmanenko V. Theorem of conflicts for a pair of probability measures // Math. Methods of Operations Research. – 2004 – Vol. 59, № 2. – P. 303-313.
2. Koshmanenko V. The Spectral Theory of Conflict Dynamical Systems} (in Ukrainian). Kyiv, Naukova dumka, 2016. – 287 p.

**O. E. Kovalenko**, Ph. D.

Institute of Mathematical Machines and Systems Problems  
NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

## **ON CONSOLIDATION OF INFORMATION IN SYSTEMS OF SITUATIONAL MANAGEMENT**

Information is a broad notion concerned different aspects of sensing and representation of the environment. The meaning of the concept 'information' varies in different philosophical schools and its pragmatic sense varies geographically and over different pragmatic contexts.

The situation notion could be defined as a conscious knowledge of the individual (-s) about the dynamics of the environment, represented by certain types of information messages that is the basis for constructing a substantiated interpretation of the sequence of changes in states (dynamics) of the world (subject area) from a certain point of view. In situational management information presents as assessment of a state of an target domain through the formal logical treatment of knowledge and beliefs in the context of information theory, results of questionnaires, or propagation of general messaging. Semantic information theory defines semantic information as well-formed, meaningful, useful and (it is desirably) truthful information.

Situational management activity concerned with consolidation and processing of information of heterogeneous origin to receive semantic information. Hence, it is important to develop adequate means (principles, methods and tools) for information consolidation. Most common approach to information consolidation is based on information fusion methods.

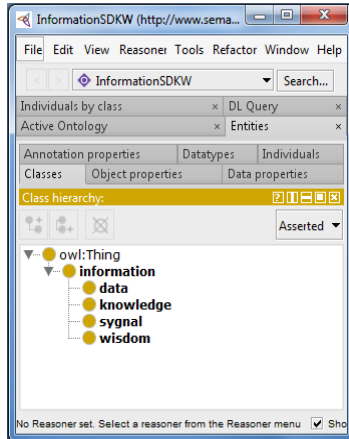
According to Data Fusion Information Group (DFIG) Model [1] there are defined six levels of information fusion:

- Level 0 – Data Assessment;
- Level 1 – Object Assessment;
- Level 3 – Impact Assessment;
- Level 4 – Process Refinement;
- Level 5 – User Refinement;
- Level 6 – Mission Management.

To refinement of different levels it is necessary to build sound hierarchy of notions concerned with basic notion of "information". There is proposing I-SDKW model (Information as Signals (Perception of Symbols, Signs), Data (acquisition and structuring of signals), Knowledge (Knowing, Awareness, Understanding, Using of data), and Wisdom) covers different cycles of thinking such as learning, intelligence, and decision cycles. Thus information is transformed through receiving, collecting, aggregating, filtering, representing, awaring, interpreting, judging, using, enrichment, composing, and growing to higher level stages. The top level fragment of I-SDKW ontology is depicted on fig. 1.

In this model information appears and transforms in different manifestation. So information is manifested either signal, or structure, or theory (system), or recommendations, or best practices etc. But knowledge is not enough for wise decision. Wisdom is that the decision should be conformed to context of situation.

Ontology is the result of systematization of knowledge domain thesaurus. The information about problem domain is structured from signals (sequences, symbols, signs, and icons) to data structures, further to controlled vocabularies, further to taxonomies, further to thesaurus, further to ontologies.



*Fig. 1. Fragment of I-SDKW ontology*

Therefore we can to build perceptual hierarchy from signal to wisdom and effector hierarchy from wisdom to signal.

Transformation of information relevant to other concepts is information is received as signals, collected and stored as data, interpreted as knowledge and using as wisdom. Ontology of information transformation from signal perception through bit structures to wise reasoning (statements) is useful for situational management.

Proposed I-SDKW transformation model includes different stages of information presentation and utilization. Information as Signals associated with primary perception of sequences, symbols and signs by sensor systems (natural or artificial). Information as Data associated with acquisition, registering and structuring of signals. Information as Knowledge associated with knowing, awareness, understanding, and using of data. Information as Wisdom covers different cycles of thinking such as learning, intelligence, and decision cycles. In this model information appears and transforms in different manifestation. So information is manifested either signal, or structure, or theory (system), or recommendations, or best practices etc.

### References:

1. Blasch, E. One Decade of the Data Fusion Information Group (DFIG) Model // In: Next-Generation Analyst III. International Society for Optics and Photonics, 2015. p. 94990L.

**Т. М. Власова,**

**О. Є. Коваленко,** канд. техн. наук,

**В. В. Вишневський,** канд. техн. наук,

**В. В. Соломонов**

Інститут проблем математичних машин і систем НАН України, м. Київ

## **ОРГАНІЗАЦІЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ОБ'ЄКТІВ СЕРВІСУ ПІДТРИМКИ ПРОВЕДЕННЯ НАРАД В СИСТЕМАХ СИТУАЦІЙНОГО УПРАВЛІННЯ**

Ситуаційне управління являє собою цілеспрямовану індивідуальну або колективну діяльність, пов'язану з розпізнаванням, поясненням і прогнозуванням ситуацій, які виникли або можуть виникнути в динамічних системах, та впливом на них з використанням відповідних концепцій, моделей і технологій. Така діяльність здійснюється у системах ситуаційного управління – організаційно-технічних комплексах підтримки управлінських рішень на основі комплексного моніторингу факторів впливу на процеси, що відбуваються в середовищі керування., з використанням сучасних інформаційних технологій. Формування управлінських рішень, які приймаються шляхом колективного обговорення і проводиться у формі нарад, є одним з ключових етапів ситуаційного управління.

Автоматичне документування процесу проведення наради здійснюється з використанням сервісу підтримки проведення нарад. Технологія, що реалізується сервісом підтримки проведення нарад, описана в [1] і базується на об'єктній моделі протоколу проведення наради. Кореневий об'єкт «Протокол наради» формується на основі інформації, зібраної під час підготовки до наради або безпосередньо під час її проведення в режимі *ad-hoc* («на льоту»). У структурі автоматично побудованого інформаційного об'єкту «Протокол наради» фіксуються всі етапи проведення наради. Використання об'єкту «Протокол наради» забезпечує відтворення всіх згенерованих вкладених об'єктів проведеної наради. По ходу проведення наради здійснюється безперервне відстеження та оновлення створених об'єктів наради для фіксації її поточного стану та спостереженням за нарадою з боку авторизованих користувачів.

При формуванні «Протоколу наради» враховуються основні діючі нормативні вимоги до оформлення подібних документів. В основу створеного документа «Протокол наради» покладена узагальнена (базова) модель наради [1]. «Протокол наради» розділений на опис та тіло, в якому відображається послідовність подій, що відбулись під час проведення наради. Опис формується при підготовці наради, а тіло створюється динамічно в процесі проведення наради. Базова модель протоколу складається з об'єктів опису та типових об'єктів тіла наради «Предмет обговорення». Типові структуровані об'єкти «Предмет обговорення» використовуються для фіксації ходу обговорення кожного питання порядку ден-



ного наради і прийнятих рішень. Кількість, найменування та послідовність об'єктів «Предмет обговорення» в конкретному протоколі наради попередньо визначаються проектом порядку денного цієї наради і можуть коригуватися відповідно до фактичного ходу наради.

«Предмет обговорення» є об'єктом, що відповідає регламентним процедурам проведення наради і може включати, за необхідністю, такі компоненти:

- найменування предмету обговорення;
- інформацію про предмет обговорення;
- питання і відповіді по предмету обговорення;
- виступи (пропозиції) по предмету обговорення;
- голосування по предмету обговорення;
- проект рішення.

Регламентні процедури передбачають гнучке використання функцій протоколювання. Після вибору предмету обговорення адміністратор, відповідно до регламенту і обставин, може вибрати послідовність кількох регламентних процедур обговорення або одну з них. Також, відповідно до ситуації, адміністратор може пропустити питання порядку денного і перейти до наступного. Управління регламентними процедурами здійснюється через інтерфейс регламентних процедур, що забезпечує:

- включення запису виступу по предмету обговорення;
- запуск процедури «питання і відповіді» по предмету обговорення;
- запуск процедури дискусії по предмету обговорення;
- запуск процедури голосування по предмету обговорення.

Після виконання регламентних процедур їх результати зберігаються в поточних об'єктах. До деяких предметів обговорення адміністратор може звертатися багаторазово, наприклад, до обговорення «Проекту рішення». В такому випадку кожного разу формується новий об'єкт, що додається до масиву відповідних об'єктів.

Запропонована модель організації інформаційних об'єктів дозволяє строго слідувати регламенту проведенні наради і фіксувати тільки фактичні матеріали наради, доступні через кореневий об'єкт «Протокол наради».

### **Список використаних джерел:**

1. Vlasova Tatiana, Kovalenko Oleksii E., Kosolapov Vladimir. Organizational-Information Technology for Providing and Decisions Making in Situational Management // In: Proceedings of 14th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET), Lviv-Slavske, Ukraine, February 20-24, 2018, – IEEE.

**О. Є. Коваленко**, канд. техн. наук,

**Т. О. Коваленко**

Інститут проблем математичних машин і систем НАН України, м. Київ

## **КОНВЕРГЕНЦІЯ ТА КОНФІГУРУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В СИСТЕМАХ СИТУАЦІЙНОГО УПРАВЛІННЯ**

Ситуаційне управління являє собою цілеспрямовану індивідуальну або колективну діяльність, пов'язану з розпізнаванням, поясненням і прогнозуванням ситуацій, які виникли або можуть виникнути в динамічних системах, та впливом на них з використанням відповідних концепцій, моделей і технологій. Така діяльність здійснюється у системах ситуаційного управління (ССУ) – організаційно-технічних комплексах підтримки управлінських рішень на основі комплексного моніторингу факторів впливу на процеси, що відбуваються в середовищі керування., з використанням сучасних інформаційних технологій.

Зміст процесів ситуаційного управління в ССУ визначається конкретними проблемами і задачами ситуаційного управління, які потребують вирішення. Для забезпечення ефективної роботи ССУ необхідно організувати потрібне середовище функціонування. Основним призначенням ССУ є надання учасникам процесів ситуаційного управління організаційно-технологічних сервісів (послуг) для виконання покладених на них функцій. Отже, ССУ можуть розглядатись з точки зору систем управління послугами СУП (service management systems) і повинні відповідати вимогам відповідних стандартів, зокрема ISO/IEC 20000 та ISO/IEC 17788. Зокрема, стандартом ISO/IEC 17788 визначаються переліки типів можливостей надання сервісів та категорій сервісів, що відповідають цим типам можливостей (табл. 1).

Таблиця 1.

*Типи можливостей та категорії сервісів*

Категорії сервісів	Типи можливостей сервісів		
	Інфраструктура	Платформа	Застосунок
Обчислення як сервіс (Com- raaS)	X		
Комунікації як сервіс (CaaS)		X	X
Зберігання даних як сервіс (DSaaS)	X	X	X
Інфраструктура як сервіс (IaaS)	X		
Мережа як сервіс (NaaS)	X	X	X
Платформа як сервіс (PaaS)		X	
Програмне забезпечення як сервіс (SaaS)			X

Реалізація ССУ на основі концепції сервіс-орієнтованої архітектури (COA) та хмарних обчислень вимагає створення засобів конфігурування ССУ у відповідності до умов і вимог їх використання. Оскільки ССУ є організаційно-технічним комплексом, то результат конфігурування середовища ССУ повинен відповідати архітектурній моделі організації та охоплювати всі рівні організаційно-технічних засобів, які забезпечують її діяльність. На відміну від звичайних СУП ССУ повинні надавати не окремі сервіси обробки інформації, а технологічні пакети (technological cases) сервісів, орієнтовані на підтримку технологічних етапів процесів ситуаційного управління для конкретної проблеми. Тому засоби конфігурування ССУ повинні надавати можливості створення таких технологічних пакетів.

Функціонування ССУ відбувається у режимі багатосторонньої кооперативної діяльності зацікавлених учасників і передбачає конвергенцію наукових методів та технологічних засобів різних областей діяльності, пов'язаних з конкретними проблемами ситуаційного управління. Отже, конфігурування пакетів сервісів ССУ повинно забезпечувати можливості конвергенції потрібних наукових методів і технологій. Створення технологічних пакетів може здійснюватись на основі знань про предметні області ситуаційного управління з використанням мультиагентного підходу [1]. Конвергенція методів і технологій в рамках технологічного пакету здійснюється на основі формального опису проблеми ситуаційного управління, який включає наступні елементи:

- характеристика проблеми ситуаційного управління;
- перелік цільових критеріїв ситуаційного управління;
- проектна модель вирішення проблеми ситуаційного управління;
- ресурсні вимоги;
- ресурсні обмеження.

Опис проблеми ситуаційного управління представляється як формальна модель бізнес-процесів ситуаційного управління з урахуванням визначених ресурсних вимог і обмежень. Інформація про вимоги і обмеження середовища ситуаційного управління зберігається в довідниках і каталогах, що характеризують відповідні категорії сервісів. Конфігурування середовища ситуаційного управління під конкретну проблему здійснюється з використанням засобів конфігурування систем на основі підходу «інфраструктура як код» (IaC), зокрема, Ansible, Puppet, CFEngine та ін.

Таким чином, конвергенція та конфігурування інформаційних технологій в ССУ на основі формальних моделей бізнес-процесів ситуаційного управління та каталогів ресурсів систем, дозволяє адаптувати ССУ для вирішення різних проблем ситуаційного управління та надати набори технологічних сервісів в залежності від контексту діяльності.

### **Список використаних джерел:**

1. Коваленко О. Є. Побудова багаторівневих мультиагентних інформаційних систем заснованих на знаннях // Information Technology and Security. July-December 2016. Vol. 4. Iss. 2 (7). – С. 146-154.

**В. В. Литвин** \*, д-р техн. наук,  
**Д. І. Угрин** \*\*, канд. техн. наук,  
**С. Ф. Шевчук** \*\*, канд. техн. наук

\* Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів,  
\*\* Чернівецький факультет Національного технічного університету  
«Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці

## **РОЗВИТОК ТЕОРІЇ РОЙОВОГО ІНТЕЛЕКТУ В ЗАДАЧАХ АДМІНІСТРАТИВНО-ТЕРИТОРІАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ**

Останнім часом в Україні спостерігається тенденція до децентралізації влади і об'єднання декількох населених пунктів, формуючи таким чином спроможну територіальну громаду (ТГ). Йдеться про її здатність самостійно забезпечувати належний рівень різноманітних послуг, враховуючи інфраструктуру, ресурси і географічне розташування.

Парламентом 5 лютого 2015 року було схвалено Закон України «Про добровільне об'єднання територіальних громад» [1], а Урядом, для забезпечення його реалізації, затверджено Методику формування спроможних територіальних (постанова Кабінету Міністрів України № 214 від 08.04.2015) [2]. Саме ці акти визначають, яким чином має відбуватись об'єднання громад для того, щоб вони стали спроможними.

Здійснюючи розподіл ресурсів між громадами і схвалюючи перспективний план формування спроможної територіальної громади, робочим групам слід керуватись затвердженою методикою формування спроможних ТГ. Таким чином, враховуючи фінансове забезпечення, громада зможе самостійно або через відповідні органи місцевого самоврядування забезпечувати належний рівень надання послуг, зокрема, у сфері освіти, культури, охорони здоров'я, соціального захисту, житлово-комунального господарства [2].

Однак в реальній практиці досить важко сформувати спроможну громаду через наявність багатьох ключових факторів формування громади:

- неможливість забезпечення на належному рівні надання вторинної медичної допомоги та спеціалізованої освіти;
- потреба в приміщеннях для розміщення установ;
- складне географічне положення, яке має враховувати щоденні міграції мешканців в межах зони доступності адміністративного центру.

Тому на сьогоднішній день основними проблемами реформи є:

- правильний розподіл ресурсів для мінімізації фінансування з боку держави;
- організація перспективних планів об'єднання у всіх районах України з визначенням потенційного центру громади із врахуванням доступності послуг у відповідних сферах на території спроможної ТГ та з умовою наявності середньої школи і амбулаторії в зоні доступності.

Порушення методики формування може призвести до непередбачуваного обороту фінансів у громаді, а також до виникнення «білих плям» – це

випадки, коли зона доступності до потенційних центрів не покриває всю територію області. Відстань від центру громади до її найвіддаленішого населеного пункту має бути такою, щоб у екстрених випадках її не довше ніж за 30 хвилин могли подолати пожежна команда, швидка допомога, поліцейський патруль. Допомога, що буде надана через більший проміжок часу різко втрачає ефективність [2]. Все це зумовлює актуальність теми дослідження.

Метою роботи є розробка системи, за допомогою якої можна було б імітувати формування спроможних територіальних громад. В якості алгоритмів для досягнення мети роботи слід використати алгоритми колективного інтелекту.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі задачі:

1. Проаналізувати методики формування громад для подальшої алгоритмізації.
2. Зробити алгоритмізацію математичної моделі і програмну реалізацію методів оптимізації на основі адаптованих алгоритмів: мурашиного (Ant Colony Optimization – ACO) та оптимізації зграєю птахів (Migrating Bird Optimization – MBO).
3. Розробити систему у вигляді веб-сайту для візуалізації результатів роботи алгоритмів та інтерактивного відображення мапи, як основного інструменту для моделювання.
4. Реалізувати систему динамічно змінюваних критеріїв моделювання.

Розглянуто процес формування територіальних громад, використовуючи алгоритми колективного інтелекту. Головною метою формування територіальних громад є скорочення бюджету та заощадження державних коштів. Досліджено затверджену методику та процес формування спроможних громад, коли в населених пунктах, які формують громаду є адміністративна будівля, заклад охорони здоров'я, загальноосвітня школа III ступеня, дитячий садок. Заклади соціального захисту, житлово-комунального господарства, враховуючи фінансове забезпечення та щоденні міграції мешканців в межах зони доступності адміністративного центру. За функцію мети формування територіальних громад взято мінімальну відстань від центру громади до інших населених пунктів. Розроблено математичну модель такої задачі, використавши специфічні обмеження, які виникають із постановки самої задачі. Для побудови ефективних алгоритмів формування територіальних громад введено поняття незалежності громад, а також суміжності окремих рад. Адаптовано стохастичні алгоритми колонії мурах та зграї птахів для вирішення сформованої багатокритеріальної оптимізаційної задачі. Проведено дослідження запропонованого підходу.

### Список використаних джерел:

1. Про добровільне об'єднання територіальних громад [Електронний ресурс]: Закон України від 05.02.2015 № 157-VIII. – Режим доступу: <http://zakon5.rada.gov.ua/laws/show/157-19>
2. Про затвердження Методики формування спроможних територіальних громад [Електронний ресурс] Постанова Кабінету Міністрів України від 08.04.2015 № 214. – Режим доступу: <http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/214-2015-p>.

**О. І. Махович**, канд. техн. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## РЕДУКЦІЯ ЧИСЛОВОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ ІНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВОЛЬТЕРРИ ТИПУ ЗГОРТКИ

Явні інтегральні моделі об'єктів із розподіленими параметрами, що представлені інтегральними операторами Вольєрра, володіють обчислювальною стійкістю, високою точністю, низькою чутливістю до високочастотних завад вхідного сигналу, відсутністю ефекту Гіббса. Особливістю їх числової реалізації для випадку ядра довільного вигляду є зростання об'єму обчислень по мірі збільшення кроку [1].

Запропонована особливість реалізації оператора Вольєрри

$$y(t) = \int_0^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau \quad (1)$$

полягає у способі обчислення квадратурних сум без застосування циклічних операцій підсумовування для квадратурної формули на кожному кроці. Обчислення проводяться лише за допомогою матричних операцій одразу над цілими векторами сформованих коефіцієнтів квадратурної формули.

Нехай значення інтеграла згортки (1) в точці  $t_i$  замінюється квадратурною сумою лівих прямокутників. Тоді для випадку рівномірної та однакової сітки вузлів для змінних  $t$  і  $\tau$  із кроком  $h = \Delta t = \Delta \tau = t_{j+1} - t_j, t_j = \tau_j$  маємо:

$$y(t_i) = \int_0^{t_i} K(t_i - \tau)x(\tau)d\tau \approx h \sum_{j=0}^{i-1} K(t_i - t_j)x(t_j) = h \sum_{j=0}^{i-1} K(t_{i-j})x(t_j),$$

або

$$y_i = y(t_i) = h \langle \overline{K_{i-j}}, \overline{x_j} \rangle, j = \overline{0, i-1}, \quad (2)$$

де  $\langle \cdot \rangle$  — скалярний добуток векторів,  $\overline{K_{i-j}}, \overline{x_j}$  — вектори-рядки.

У випадку вхідного впливу  $x(t) \equiv x = const$   $i$ -тий елемент вектора-розв'язку визначається виразом

$$y_i = x \int_0^{t_i} K(t_i - \tau)d\tau \approx hx \sum_{j=0}^{i-1} K(t_i - t_j) = hx \sum_{j=0}^{i-1} K(t_{i-j}) = hx \sum_{j=1}^i K(t_j)$$

Тоді вектор шуканого розв'язку  $\overline{y_n}$  має вигляд

$$\overline{y_n} = (y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n) \approx hx \left( \sum_{j=1}^0 K(t_j) \quad \sum_{j=1}^1 K(t_j) \quad \sum_{j=1}^2 K(t_j) \quad \dots \quad \sum_{j=1}^n K(t_j) \right).$$

В середовищі Matlab шуканий вектор формується за допомогою оператора суми з накопиченням [2, 3]

$$y = [0 \quad h * x * \text{cumsum}(K(2:\text{end}))];$$

де  $y$  – вектор шуканого розв’язку;  $h$  – крок  $\Delta t$ ;  $x$  – вхідний вплив;  $K$  – вектор значень ядра інтегрального оператора  $K(t_i)$ ,  $\text{cumsum}()$  – функція знаходження суми з накопиченням елементів вектора-аргументу. Оскільки операції скалярного добутку векторів піддаються розпаралелюванню, можна очікувати зменшення витрат процесорного часу числової реалізації.

Для дослідження ефективності запропонованого способу числової реалізації інтегрального оператора Вольтерри проведено ряд обчислювальних експериментів, в яких визначалась реакція лінійного динамічного об’єкта на вхідний вплив у вигляді одиничного стрибка. Розв’язок знаходився як результат матричних операцій одразу над цілими векторами вхідного впливу та ядра. При цьому фіксувався час, затрачений на знаходження розв’язку запропонованим способом і традиційним обчисленням квадратурних сум. Результати показали, що при кількості вузлів  $\approx 2 \cdot 10^4$  час обрахунку запропонованим методом та традиційним склав 0.000534 с та 0.011408 с відповідно; при кількості вузлів  $\approx 2 \cdot 10^6$  час обрахунку склав 0.055267 с та 1.025395 с, а при кількості вузлів  $\approx 2 \cdot 10^7$  – 0.500963 с та 10.153589 с відповідно, що становить майже 20-ти разове зменшення витрат процесорного часу.

Запропонований прийом числової реалізації інтегрального оператора Вольтерри із виродженим ядром виявився ефективніший у порівнянні із традиційним обчисленням квадратур із застосуванням оператору циклу, що дозволило зменшити витрати процесорного часу на знаходження результату.

### Список використаних джерел:

1. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы: справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – К. : Наук. думка, 1986. – 544 с.
2. Метьюз Д. Г. Численные методы. Использование Matlab. 3-е издание. : пер. с англ. / Д. Г. Метьюз, К. Д. Финк. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2001. – 720 с.
3. Ануфриев И. Е. Matlab 7 / И. Е. Ануфриев, А. Б. Смирнов, Е. Н. Смирнова. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.

**V. M. Shramenko, Ph. D.**

National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky  
Kyiv Politechnical Institute”, Kyiv

### **MACHINE LEARNING AND THE PROBLEM OF CREDIT SCORING**

Credit scoring is one of the most crucial parts of a commercial banks' work. The main goal is an estimation of a probability of no credit return by borrowers. There are two risks: either risk losing money by not lending it or, which is worse, by giving credit to a risky client.

These days most banks have "given from above" scoring tables which make it possible to calculate a score for any client. This technique is quite imperfect.

In recent years machine learning is becoming more and more popular and used in various areas one of which is banking. However, current models do not give good results as well as a high precision of a forecast.

In our work, we considered more factors as primal data. Not only did we add macroeconomic indexes of the country, but we also tracked indexes of industry in which borrower works. For instance, if a person has a well-paid job in a sector which is now predictably falling than credit score should have factors dedicating this fall as well as a probability of losing the job or cut in wage.

For this reason, in our research, we analyze both static factors, for which we build a classification model, and time series, which display a dynamic of various important factors.

For data analysis we use Python language and it's libraries: NumPy, SciPy and scikit-learn.

Credit scoring enables not just giving credits but also controlling a credit portfolio of the bank aka construct optimal control.

УДК 004.42

**А. Б. Андруховський**

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

### **ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ СУЧАСНИХ ІНСТРУМЕНТІВ ЕЛЕКТРОННОГО НАВЧАННЯ ВУЗЬКОПРОФІЛЬНИХ ФАХІВЦІВ У ГАЛУЗІ ІТ ТА ПРОГРАМУВАННЯ**

Сучасні тенденції розвитку суспільства мають великий вплив на розвиток людини. Роботодавці вимагають від ринку праці висококваліфікованих спеціалістів, які могли б постійно навчатися новому та удосконалювати свої знання та навички шляхом самоосвіти. Метою сучасного



викладача, який викладає курс програмування, має стати формування в студентів навиків професійного програмування.

В онлайнній освіті у галузі ІТ та програмування спостерігається тенденція переходу від MOOC до SPOC. У першу чергу це продиктовано потребою у невеликій кількості добре підготовлених спеціалістів вузького профілю. При підготовці таких фахівців важливо програм застосовувати сучасні підходи до розробки програмного забезпечення, такі як розробка через тестування (test-driven development).

Для здійснення процесу тестування програмного забезпечення, застосовують три технології тестування [1]:

- black-box testing (тестування методом чорної скриньки);
- white-box testing/ glass-box testing (тестування методом прозорої скриньки);
- gray-box testing (метод тестування напівпрозорої скриньки). Детальніше про технології тестування ПЗ можна прочитати у [2, 3] та з інших джерел.

Слід також зауважити, що для досягнення максимальних результатів у навчанні програмування необхідно поєднувати теоретичні відомості з практичними демонстраціями. Саме ці вимоги спонукають розробляти і використовувати нові інструменти електронного навчання.

До таких інструментів слід сервіс Anaconda (Anaconda Cloud / Anaconda Enterprise 5), сервіс Jupiter Notebook та систему перевірки завдань OKPY. Кожен із зазначених компонентів має свої функціональні особливості перед аналогами:

Anaconda – є одним з популярних дистрибутивів системи програмування для мови Python. Він включає в себе набір пакетів зорієнтованих на сучасні технології Data Science/Data Mining, а також інтегрується з професійною системою програмування Microsoft Visual Studio 2017.

Jupiter Notebook – є унікальним сервісом, який дозволяє поєднувати традиційний текст, математичні формули та програмні фрагменти на мові Python. Особливістю блокнотів є Jupiter можливість відображення результатів виконання програмних фрагментів. Це дозволяє використовувати їх як інтерактивні електронні посібники.

Система перевірки завдань ОКPY – є онлайнною системою, яка, використовуючи REST API, дозволяє автоматизувати процес видачі, перевірки, та обліку результатів виконання завдань для студентів.

Для мови програмування Python та Jupiter Notebook існує бібліотека (пакет в термінах Python), що дозволяє організувати набір тестових завдань і їх виконання до відправки на сервер ОКPY.

Використання такого способу перевірки суттєво зменшить навантаження на викладача, оскільки йому будуть надходити лише робочі (без помилок) проекти студентів.

Підготувавши ряд навчальних матеріалів, автор, ґрунтуючись на власному практичному досвіді, дійшов висновку, що використання зазначених

вище інструментів значно скорочує час на підготовку навчальних матеріалів і підвищує якість навчання. Безумовно, що виявлення кількісних характеристик та вагомих факторів, вимагають подальших досліджень.

### **Список використаних джерел:**

1. Левинстон Дж. Тестирование ПО с помощью Visual Studio 2010 : [пер. с англ.]. – Москва : ЭКОМ Паблишерз, 2012. – 336 с.
2. Тестирование программного обеспечения [Электронный ресурс]: сайт про тестування програмного забезпечення. – Режим доступу: <http://www.protesting.ru/testing>.
3. Интернет университет информационных технологий [Электронный ресурс]: сайт університету інформаційних технологій. – Режим доступу: <http://www.intuit.ru/department/se/testing/5>.

УДК 004.94

**І. В. Бейко**, д-р техн. наук

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ

### **СУЧАСНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ У ПІДВИЩЕННІ ЯКОСТІ НАВЧАННЯ**

Сьогодні комп'ютерні засоби та інформаційні технології відкривають можливості кардинально підвищити ефективність роботи викладачів і студентів у підвищити якість навчання математичних дисциплін. Сучасні електронні підручники із відео-лекціями та віртуальними лабораторними роботами відкривають можливості проводити науково дослідні обчислювальні експерименти і забезпечувати високоефективне інтегроване індивідуально орієнтоване комп'ютеризоване навчання, яке активізує творче мислення, допитливість, мотивацію до розумової праці та до поглибленого опанування новими знаннями. Для створення таких електронних підручників використовуються редактори WYSIWYG, Moodle, Ilias, CourseLab, ToolBook Instructor, Authorware, Adobe Captivate, а для уніфікації їх компонентів використовуються міжнародні стандарти, що регламентують технологію створення уніфікованих електронних навчальних матеріалів (найбільш поширеним є стандарт SCORM). Проте за дещо застарілими навчальними програмами наші викладачі ще часто змушують студентів витратити час на менш важливу роботу, зокрема надто багато часу виділяється на «витягування» надто складних інтегралів, незважаючи на те, що Wolfram/Alpha миттєво витягує усі найскладніші інтеграли із усіх задачників. У провідних університетах світу рішуче оновлюються навчальні програми, рішуче вилучається усе мало важливе з метою вивільнити більше часу на опанування більше важливого, зокрема, сучасних методів і засобів математично-комп'ютерного моделювання і прогнозування складних взаємодіючих процесів об'єктивної реальності. Адже завданням майже всіх наук є відшукування нових знань про

досліджувані причинно-наслідкові залежності об'єктивної реальності. У доповіді розглядаються можливості використання сучасних комп'ютерних засобів для підвищення якості викладання таких дисциплін.

УДК 378:[37.011.31-051:004]:517.98

**Д. Є. Бобилєв,**  
**В. В. Корольський**

Криворізький державний педагогічний університет, м. Кривий Ріг

### **КОМП'ЮТЕРНА ПІДТРИМКА ЕВРИСТИЧНИХ МЕТОДІВ НАВЧАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ**

Як показує досвід, використання евристичної бесіди під час навчання функціонального аналізу спонукає студентів самостійно ставити завдання, здійснювати роздіблення задачі на серію допоміжних задач, в межах кожної з яких здійснюється невеликий пошук. Таким чином, евристична бесіда активізує та стимулює самостійну діяльність студентів.

Основний принцип евристичного навчання – це співтворчість студентів між собою і викладачем у навчальному процесі. Діалогічна взаємодія є ключовою при навчанні майбутніх учителів математики. Діалогічна взаємодія – це система формування і розвитку практичних навичок співтворчості і спілкування учнів на основі відкритості та духовного взаємозбагачення. Діалогічна технологія саморозвитку формує у молоді комунікативні якості творчої особистості.

Комп'ютерна підтримка евристичних методів навчання функціонального аналізу (КПЕМНФА) – це активний дидактичний засіб самонавчання та діалогічної взаємодії студентів між собою і освітнім середовищем в процесі навчання функціонального аналізу.

В основу КПЕМНФА функціонального аналізу можуть бути покладені: 1) системні і проблемно-алгоритмічні підходи; 2) методології творчості; 3) засоби сучасних інформаційних і комунікаційних технологій; 4) методологія евристичних діалогів і ін.

На наш погляд зручним середовищем для побудови КПЕМНФА функціонального аналізу майбутніх учителів математики є середовище дистанційного навчання Moodle.

Першою базою для побудови евристичних діалогів в КПЕМНФА є процес доведення деяких теорем курсу функціонального аналізу. Наприклад, засвоєння теорем, кожна з яких закінчується питанням – це засвоєння ознайомчого рівня, а організація форуму з даної тематики (використання елемента курсу) це вже продуктивний рівень, оскільки реалізується евристичний тип роботи.

Безумовно, що контроль знань студентів є основною частиною засвоєння умінь і навичок, і є показником формування певної професійної

компетентності. Різновидом контролю є перевірочні завдання, які передбачають доведення абсолютно нових для студентів тверджень. Це є другою базою для побудови евристичних діалогів та їх реалізації в креативному навчальному процесі.

КПЕМНФА функціональному аналізу, реалізована нами в середовищі дистанційного навчання Moodle (<http://moodle.kdpu.edu.ua/course/-index.php?categoryid=4>), полегшує самостійне розв'язання наукової проблеми, допомагає студенту самостійно розвивати дослідницькі вміння і навички, зміцнювати «пізнавальну цікавість», висувати гіпотези, розширює його уявлення про характер наукової проблеми, яка розв'язується та ін. За допомогою побудованої системи евристичних діалогів студент отримує можливість нестандартно розв'язувати наукову проблему. Тому студент може спробувати самостійно робити справжні наукові відкриття вже в процесі свого навчання.

Розроблено систему лабораторно-комп'ютерних практикумів з курсу функціонального аналізу з комп'ютерною інтерактивною підтримкою, технологія проведення яких спрямовані на поетапне формування компонентів професійно-творчого потенціалу студента відповідно до рівня творчих завдань, які розв'язуються. Дана система успішно може бути використана для навчання майбутніх вчителів математики.

Евристичний діалог «Студент – КПЕМНФА» є формою опосередкованого педагогічного управління творчим саморозвитком і включає в себе наступні основні елементи: спеціально розроблений навчальний посібник з функціонального аналізу на паперових носіях (модульно-кодовий навчальний посібник), комп'ютер і Інтернет. Студент працює тільки з двома елементами: з книгою (навчальним посібником), що містить весь навчальний і довідковий матеріал, і комп'ютером за допомогою якого він отримує завдання, самостійно їх виконує, і потім надсилає розв'язок, після чого викладач перевіряє виконане завдання і, якщо воно неправильно розв'язане надсилає у відповідь варіант діалогу, який дозволяє студенту самостійно побачити помилку в своїх міркуваннях і правильно розв'язати задачу. Таким чином здійснюється евристичний діалог між студентом і «віртуальним викладачем».

Евристичні діалогові відносини – це взаємозв'язки і взаємодії суб'єктів навчально-творчої діяльності «Студент – Студент» (С – С), «Студент – Викладач» (С – В), «Студент – Творча група» (С – ТГ) за допомогою евристичних діалогів.

Таким чином, ефективність застосування багатовимірною евристичного діалогу з КПЕМНФА функціональному аналізу майбутніх учителів математики досягається.

**В. А. Гришук\***,  
**Т. М. Іванюк\*\***

\* Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

\*\* Подільський спеціальний навчально-реабілітаційний соціально-  
економічний коледж, м. Кам'янець-Подільський

## **ОСОБЛИВОСТІ ВИБОРУ ІНСТРУМЕНТАЛЬНИХ ЗАСОБІВ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

Однією з головних задач, що стоять перед системою підготовки майбутніх спеціалістів, є підвищення якості математичної підготовки з урахуванням сучасних напрямів розвитку і використання інформаційних технологій у професійній діяльності. У всьому світі яскраво проявляється тенденція використання комп'ютера як невід'ємного засобу вивчення окремих наукових дисциплін. В області проведення математичних досліджень досягненням високого рівня є створення інтегрованих математичних систем, які використовуються з метою максимального спрощення для користувача комп'ютерної реалізації математичних алгоритмів і методів, що широко застосовуються в дослідженнях [2].

Вибір одного з наявних математичних пакетів є досить важливим завданням, оскільки, обраний програмний продукт повинен задовольняти ті потреби, які перед ним будуть ставити дослідники чи інженери, з врахуванням його функціональних можливостей та доступністю.

Подібно до підходів, використаних в [1], було виконано порівняння інструментальних засобів комп'ютерного моделювання Scilab та Maxima, шляхом їх тестування за деякими критеріями з вказівкою їх вагової оцінки:

1. Інсталяція, навчання, зручність використання (15%);
2. Математична функціональність (35%);
3. Графічна функціональність (12%);
4. Функціональність програмного середовища (12%);
5. Підтримка платформ (3%);
6. Швидкість роботи (23%).

Розглянемо детальніше кожен з наведених критеріїв. В першому критерії досліджувались легкість встановлення, підтримка навчання, наявність вбудованої довідки та форуму користувачів, зручність використання тощо. Математична функціональність розглянутих пакетів прикладних програм оцінювалась за напрямками: стандартна математика, лінійна алгебра, розв'язувачі рівнянь, аналіз, апроксимація, статистика. Оцінка функціональних можливостей графіки математичних пакетів відбувалась шляхом тестування доступних стандартних 2D/3D і спеціалізованих графічних функцій. Можливість розв'язання складних моделей, доступність вбудованого набору типових дій та забезпечення потужного програмного середовища для влас-

них дослідницьких розробок досліджувались в межах оцінки функціональності програмного середовища. Не менш вагомими критеріями є швидкість виконання поставлених задач та можливість використання середовища на будь-якій апаратній платформі комп'ютерної техніки.

По кожному розглянутому критерію було сформовано кінцеві вагові оцінки, що занесені до таблиці 1.

Таблиця 1.

*Кінцеві результати тестування (відсоток пройдених тестів)*

<b>Тест</b>	<b>Scilab</b>	<b>Maxima</b>
Інсталяція, навчання, зручність використання	80.5%	58.5 %
Математична функціональність	67.69%	85.12%
Графічна функціональність	100.0%	64.6%
Функціональність програмного середовища	80.0%	60.0%
Підтримка платформ	83.3%	33.3%
Швидкість роботи	88.9%	11.1%
Сумарний результат	80.3%	57.01%

Проведені дослідження показали, що середовище Scilab має кращі функціональні характеристики в порівнянні з середовищем Maxima.

Основні переваги Scilab: швидкість виконання поставлених задач, більша функціональність програмного середовища та вбудований додаток XCos для імітаційного моделювання. Краще підходить для підготовки фахівців з інформаційних технологій та інших технічних спеціальностей.

Основними перевагами Maxima є підтримка символьних обчислень та математична функціональність. Краще підходить для підготовки здобувачів спеціальності математика.

#### **Список використаних джерел:**

1. Stefan Steinhaus. Comparison of mathematical programs for data analysis. Edition 4.42. – München / Germany, 2008. – 59 p.
2. Іванюк В. А. Математичні пакети прикладних програм : навчальний посібник / В. А. Іванюк. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. – 160 с.

**А. М. Кух**, канд. пед. наук,  
**О. М. Кух**

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **STEM-ОСВІТА ЯК СТРАТЕГІЯ РЕАЛІЗАЦІЇ КОМПЕТЕНТІСНОГО НАВЧАННЯ**

Вітчизняна освіта і педагогічна наука вступила в епоху чергових реформ: автономність загальноосвітньої школи, інтегрованість навчальних програм і планів, концепція системно-діяльнісно-компетентісного навчання, як наслідок, новий Закон України про освіту – риси нашого часу, які визначають стратегію і тактику національної політики в галузі освіти.

Одним із перспективних напрямків розвитку вітчизняної науки і техніки вбачається у застосуванні в загальноосвітній та вищій школі технології STEM – освіти (Science – наука, Technology – технологія, Engineering – інженерія, Mathematics – математика). На думку експертів, STEM-освіта має на меті об'єднання наук, яке спрямоване на розвиток інноваційних технологій, на формування креативного мислення, на забезпечення промисловості висококваліфікованими інженерними кадрами [1]. Така стратегічна мета STEM-освіти неодмінно веде до інтеграції природничо-математичних предметів і дисциплін, що є назрілою і необхідною умовою оновлення системи загальної та вищої педагогічної освіти.

Досягнення науково-технічного прогресу, розвиток нанотехнологій і цифрової електроніки, інформаційно-комунікаційних технологій, вимоги сьогодення, диктують об'єднання навчальних предметів в умовах загальноосвітньої школи і виводять проблему підготовки педагогічних кадрів на якісно новий рівень – готовність педагогічного працівника до роботи в умовах інтеграції природничих наук і володіння сучасними ефективними освітніми технологіями.

В умовах застосування технології STEM у вищих навчальних закладах при підготовці педагогів основний акцент переноситься на формування здатності майбутнього педагога швидко орієнтуватися на ринку праці; аналіз розвитку світових технологій та їх доповнюваність знаннями з різних наук; володіння відповідними методиками і елементами технічного супроводу (створення презентацій, демонстрація відеофрагментів, використання натурної наочності, тощо); визначення майбутнім учителем місця і значення подій, явищ, історичних фактів та постатей цілісно, у взаємозв'язку із цінностями, значенням для розвитку культури особистості, соціуму; співвіднесення знань з різних дисциплін із системою наукового пізнання та наукового світогляду, наукової картини світу; практичну значимість наукових знань; формування критичного мислення; розвиток дослідницької діяльності; здатність до організації та підтримки цілеспрямованої пізнавальної діяльності учнів.

Таким чином, STEM-освіта – це створення умов щодо збалансованого гармонійного формування науково-орієнтованої освіти на основі модернізації математично-природничої та гуманітарних профілів освіти [2]. Звичайно, належить розв'язати багато організаційних, технічних, матеріально-ресурсних та інших завдань для реалізації повноцінної STEM освіти, проте як технологія освіти у ВНЗ вона має мати місце.

Надзвичайно важливим є питання про компетентності, якими має оволодіти майбутній педагог для реалізації інтегрованого навчання в загально-освітній школі. Використовуючи базис ознак компетентності [3] на основі аналізу напрямків «наука», «практика» та «культура» [3] пропонуємо його розглядати як технологію НПК для уточнення компетентностей. Технологія НПК включає в себе, в когнітивній сфері: «запам'ятовування», «усвідомлення», «готовність», «застосування», «уявлення», «сприйняття», в емоційно-ціннісній – афектній сфері: «увага», «умовивід», «міркування», «адаптація», «почуття», «мотив»; в сфері психо-моторній: «копіювання», «навичка», «оволодіння», «уміння», «розуміння», «переконання», і ознаки метакомпетентностей – «цілепокладання», «діяльність», «творчість», «комунікація», усвідомлення «потреби», «інтерес», «здатність», «самоконтроль», «ООД (планування)», вияв «знань».

### **Список використаних джерел:**

1. STEM-освіта. – Режим доступу: <https://imzo.gov.ua/stem-osvita/>
2. Підходи та особливості сучасної STEM-освіти — Режим доступу: <https://cyberleninka.ru/article/n/pidhodi-ta-osoblivosti-suchasnoyi-stem-osviti>
3. Кух А.М. Компетентність і світогляд //SWORD: Научний взгляд в будущее – Випуск 6, Том 3. – Одеса. Купrienko С.В., 2017 – с. 23-29. – Режим доступу: <http://www.sworld.education/nvvb/6-3.pdf>.

УДК 378.9.372.853.53

**О. М. Кух,**

**А. М. Кух,** канд. пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МЕДІАКОМПЕТЕНТНІСТЬ**

Одержання міцних знань та вмінь в здійснюється в процесі вивчення методичних дисципліни за допомогою дидактичних завдань, в основу яких покладена таксономія освітніх цілей Блума. Нагадаємо, що таксономія Блума спирається та на компоненти розвитку свідомості і закріплення знань у пам'яті такі як пригадування, розуміння, застосування, аналіз, оцінка і синтез (створення). Формування медіакомпетентності майбутніх учителів пролягає через освоєння інформаційно-комунікаційних технологій, які широко



застосовуються в сучасній вищій освіті. Медіакомпетентність педагога можна подати у вигляді системи обізнаності в галузі інформаційних та цифрових технологій наступним чином.

**ПРИГАДУВАННЯ** – видобування знань з пам'яті, процес використання пам'яті для відтворення визначень, фактів, списків або точного переказу матеріалу (цитування).

Форми вияву компетентності. Читання (цитування), вікторина / Тест, флеш-картки, визначення, факти, списки, закладки, пошукові запити.

Володіння інструментарієм: редагування текстів, карти пам'яті, флеш картки інструменти презентацій, локальні і online інструменти редагування текстів – Open Office Документи Google, Zoho документи, Thinkfree і т.п. Середовища Moodle, Hot Potatoes, об'єкти SCORM. Локальні і online інструменти редагування текстів: Word, Pages, Open Office, Документи Google, Zoho документи; прості карти пам'яті, Wiki, Moodle Глосарій, Ask.com, локальні і online інструменти редагування текстів для складання списків, карти пам'яті, інтернет форуми, електронна пошта; електронні записники, локальні і online інструменти Web 2.0 інструментів: del.icio.us, Diigo., пошукові системи типу Google, Yahoo, цифрові бібліотечні каталоги, цифрові аналітичні матеріали.

Ознака володіння. Впізнавання, опис, ідентифікація, прояснення, неймінг, розміщення, знаходження, маркування списком, вказівка, виділення, закладки, соціальні мережі, соціальні закладки, обрані / локальні закладки, пошук, пошук в Google.

**РОЗУМІННЯ** – виділення суті і змісту з різних видів інформації, виражене письмово або графічно.

Форми вияву компетентності. Узагальнення (анотування), пояснення, розширений і логічний пошук, блогінг, щоденники / журнали, атегоризація, тегування.

Володіння інструментарієм: Робота в текстових редакторах, карти пам'яті, веб-публікації, блоги, інтернет журнали, веб-сторінки, спільні документи – Документи Google, Wallwisher, Wiki; спільні диктофони, інструменти підкастингу, інструменти для обробки відео, карти пам'яті; розширені функції пошуку пошукових машин Google, Yahoo і т. п.; Blogger, WordPress, Bloglines і т. п.: blogger, Ning, Bebo, Facebook, Edublogs, Moodle, livejournal; сервіси соціальних закладок DIIGO Delicio.us і т. д., дискусійні форуми, Adobe Acrobat Reader, читання блогів, підписка через RSS агрегатори, наприклад, Feedly, на сайти, новини, блоги.

Ознака володіння. Інтерпретація, узагальнення, виведення, переказ, класифікація, порівняння, пояснення, ілюстрація, розширений пошук, логічний пошук, блогінг, публікація твітів, категоризація і замітки, коментування, анотування.

**ЗАСТОСУВАННЯ** – виконання або використання процедур, спрямованих на реалізацію одержаних знань.

Форми вияву компетентності. Ілюстрація, симуляції, анімація і захоплення екрану, презентація (Представлення), інтерв'ю, виробництво, редагування.

Володіння інструментарієм: Corel, Inkscape, GIMP, Paint, онлайн інструменти для створення коміксів – Comic Life, інструменти для створення історій і казок; карти, онлайн графічні інструменти, Google SketchUp, програмне забезпечення для моделювання наукових експериментів, глобальних конфліктів; Camtasia, CamStudio, iMovie, MovieMaker, SnagIt; PowerPoint, Google презентація, презентація Zoho, Skype, інтерактивна дошка для спільної роботи, аудіо і відео конференцв'язок; локальні і онлайн інструменти для роботи з текстом, інструменти для створення карт пам'яті, підкастів, диктофони, співпраця з використанням різних колаборативних інструментів web 2.0: дошки для спільної роботи, інструменти відео і аудіоконференцій; інструменти для підкастів, записи відео, захоплення екрану, аудіо і відео конференцв'язку, VoIP, PowerPoint; інструменти обробки відео і аудіо, wiki редагування.

Ознака володіння. Реалізація, використання, виконання, робота, гра, біг, оперування, , завантаження, обмін, редагування.

АНАЛІЗ – розбір матеріалу або концепції на складові частини, визначення того, як ці частини співвідносяться або взаємодіють один з одним або із загальною структурою. Розумові дії включають диференціацію, організацію і пояснення відмінностей між компонентами.

Форми вияву компетентності. Інструменти досліджень, бази даних, карти пам'яті, графіки і таблиці, анотування, веб-інтерфейс – опитування.

Володіння інструментарієм: Survey Monkey, Google форми, різні web 2.0 опитувань і голосування, інструменти соціальних мереж і так далі; програми для роботи з текстом, таблицями, електронна пошта, форуми для обговорень; реляційні бази даних; використання MySQL і Access, бази даних у вигляді електронних таблиць, wiki, географічні системи або GIS – Google Earth, Google Maps, Карти Flickr, ArcView: локальні і онлайн інструменти для роботи з текстом, веб-публікації: схема "риб'ячий скелет", інструменти SWOT, діаграми Венна, різні локальні і онлайн інструменти для карт.

Ознака володіння. Порівняння, організація, розбір, структуризація, інтеграція, змішування, аналіз.

ОЦІНКА – створення суджень, що ґрунтується на певних критеріях і стандартах шляхом перевірки і критики.

Форми вияву компетентності. Дебати або дискусія, повідомлення або оцінка, дослідження.

Володіння інструментарієм: локальні і онлайн інструменти для роботи з текстом, інструменти для підкастів, карти пам'яті, чати, месенджери, електронна пошта, інтерактивні дошки, онлайн засобу для спільної роботи; запис у блозі, wiki, ведення сайту, онлайн щоденника, презентації; пошук в Інтернет, GIS: Google Earth, карти Google, Flickr, презентації, відео і аудіо, конференції, Twitter, соціальні мережі дошки оголошень, чати, відео конференцв'язок, чати, обмін миттєвими повідомленнями, інструменти соціальних мереж, веб-класи, обмін миттєвими повідомленнями, відео і аудіо, конференції.

Ознака володіння. Перевірка, гіпотеза, критика, експеримент, су-  
дження, тестування, виявлення, моніторинг (блог/відеоблог), коментар,  
огляд, модерування, співпраця, мережа.

**СТВОРЕННЯ (СИНТЕЗ)** – поєднання елементів в одне ціле, реор-  
ганізація елементів в новий об'єкт або структуру, за допомогою ство-  
рення, планування або виробництва.

Форми вияву компетентності. Виробництво медіаконтенту, ство-  
рення презентацій, історій.

Володіння інструментарієм: Movie Maker, iMovie, Adobe Premier;  
онлайн інструменти [www.eyespot.com](http://www.eyespot.com), [www.pinnacleshare.com](http://www.pinnacleshare.com),  
[www.animoto.com](http://www.animoto.com), [www.dvolver.com](http://www.dvolver.com), PowerPoint, Impress, Zoho, Google,  
Comic Life, Hypercomic, Prezi, VoiceThread.

Ознака володіння. Проектування, будівництво, планування, винахід,  
розробка, складання, програмування, зйомка, анімація, блог, видавництво,  
компіляція.

Вважаємо, що запропонована система цілей сприятиме більш повній реалізації компетентнісної підготовки майбутніх педагогів з інформатики, так і галузі інформаційної культури, медіаосвіти та інформаційних технологій.

### Список використаних джерел:

1. Кух А. М. Модель системи фахової підготовки викладача фізики / А. М. Кух // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського державного університету: Серія педагогічна: Дидактика фізики в контексті орієнтирів Болонського процесу. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський державний університет, інформаційно-видавничий відділ, 2005. – Вип. 11. – С. 45-48.
2. Кух А. М. Синергетичний підхід до формування методичних систем фахової підготовки учителя фізики / А. М. Кух // Матеріали ІХ Всеукраїнської наукової конференції «Фундаментальна та професійна підготовка фахівців з фізики». – К. : НПУ, 2004. – С. 83-84.
3. Кух А. М. Системно-особистісно-діяльнісний підхід до формування системи фахової підготовки учителів фізики. / А. М. Кух // Збірник наукових праць. Педагогічні науки. – Херсон : В-во ХНУ, 2005. – Вип. 39 – С.267-273 4. Цифрова таксономія Блума – Andrew Churches <http://edorigami.wikispaces.com> Attribution – Share alike (By – SA)

УДК 004.942

**В. В. Листопадова**, канд. фіз.-мат. наук,

**В. В. Ясеньчук**

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігора Сікорського», м. Київ

### НОВІ ТЕХНОЛОГІЇ В ОСВІТІ

Зі збільшенням кількості інформації та розвитком науково-технічного прогресу збільшується потреба у висококваліфікованих фахівцях. Тому постає питання чи всі спеціалісти компетентні в своїй галузі,

чи вмiють вони опрацьовувати, володiти та використовувати iнформацiю з рiзних джерел в своїх цiлях. Найбiльше це стосується педагогiв, якi посидають важливе мiсце в процесi навчання. Звiдси постає нова проблема про вмiння використовувати iнформацiйнi технологiї в освiтi.

Iнформацiйнi технологiї – це сукупнiсть методiв, виробничих процесiв i програмно-технiчних засобiв, iнтегрованих з метою збирання, обробки, зберiгання, розповсюдження, вiдображення i використання iнформацiї в iнтересах її користувачiв [2, с.192].

Важливим напрямком модернiзацiї освiти є iнформатизацiя навчального процесу та поширення комунiкацiйних та iнформацiйних технологiї. Саме тому ми маємо придiляти велику увагу щоб цi технологiї застосовувалися у процесi професiйної пiдготовки та подальшiй професiйнiй дiяльностi фахiвця. Iнформатизацiя навчального процесу повинна здiйснюватися шляхом упровадження навчальних курсiв з iнформацiйних систем i технологiї. Всi викладачi повиннi обов'язково володiти навичками роботи з комп'ютером, як iнструментом повсякденної дiяльностi, для пiдвищення рiвня iнформацiйної культури студентiв i для покращення якостi навчального процесу, адже студентам не вистачає iнформацiї, а радше часу для пошуку, аналізу, розумiння та застосування iнформацiї. Тому роль викладача полягає саме в тому, щоб допомогти студентам розвинути навички, щоб визначити, як знайти, аналізувати та iнтерпретувати iнформацiю.

Новi iнформацiйнi технологiї надають викладачевi певну базу i можливiсть вибору змiсту, методiв i засобiв подання iнформацiї з урахуванням можливостей технологiї та особистої творчої iндивiдуальностi. Основною метою нових iнформацiйних технологiї є забезпечення студентiв достовiрною iнформацiєю i покращення їхньої життєдiяльностi в умовах iнформацiйного суспiльства. Отже, викладач повинен бiльш глибоко вивчити цю технологiю.

Нинi з'являються програмнi продукти, якi дають можливiсть урiзноманiтнити навчання, що робить його бiльш цiкавим i доступним для кожного.

Сьогодні не можна уявити наше життя без iнтернету, адже вiн завжди доступний. Студенти можуть користуватися програмами дистанцiйного навчання, дивитися вiдеоуроки з рiзних дисциплiн, навiть не виходячи з дому. Незалежно вiд того день чи нiч студент може навчатися в будь який зручний для нього час.

Ще однією з головних iнформацiйних технологiї є електронна книга. Вона має безлiч переваг в порiвняннi з простою книгою, адже вона не може бути пошкодженою або втраченою на вiдмiну вiд друкованих пiдручникiв, якi можуть стати застарiлими та вклучати дезiнформацiю.

Велика кiлькiсть онлайн-освiти у iнтернетi привела до деякого зниження вартостi освiти, що робить вищу освiту бiльш доступною для будького, не зважаючи на вiк, фiзичний стан чи соцiальне положення.

Упровадження мультимедійних засобiв навчання значно пiдвищує якiсть сприйняття та засвоєння студентами матерiалу, пiдвищує мотивацiю до вивчення професiйних дисциплiн, створює бiльш тiсну спiвпрацю мiж викладачами та студентами. До основних компонентiв цiєї технологiї належать:

мультимедіа-презентація; слайд-шоу; електронний звіт; мультимедіа-доповідь; електронний журнал мультимедіа-видання; навчальні фільми тощо.

Мультимедіа означає сучасну комп'ютерну технологію, яка збирає в себе текст, звук, відеозображення, графічні зображення й анімацію. [1]

Завдяки мультимедіа-презентації викладач може ефективно візуалізувати інформацію та показати на наглядних прикладах певну тему з конкретної дисципліни. Мультимедійні технології можна назвати універсальними, адже вони можуть бути використані під час всього навчального процесу (вступу до нового матеріалу, закріплення, узагальнення та контроль знань). Інформація, яка представлена у вигляді презентацій суттєво краща за підручники, адже використовується ефект анімації. В студента задіяне слухове й візуальне сприйняття, що дає змогу збільшити не тільки обсяг інформації, що сприймається, а й міцність її засвоєння.

Віртуальна реальність під час навчання змінює всю систему педагогіки, тому що породжує ефект присутності. Студенти безпосередньо бачать досліджувані об'єкти та явища, моделюють та аналізують певну ситуацію і звичайно приймають якісь рішення та діють в залежності від обставин. Отже, мультимедійні засоби навчання вдосконалюються з розвитком техніко-технологічного та програмного рівня.

В умовах науково технічного процесу, комп'ютеризації та інформатизації постала проблема застосування інформаційних технологій у підготовці спеціалістів. Застосування цих технологій є основним у професійній підготовці фахівців для підвищення їхнього навчально-виховного процесу, а також їхньої конкурентоспроможності на ринку праці.

Отже, підсумуємо унікальні можливості засобів нових інформаційних технологій. Це зберігання в архівах і передача великих обсягів інформації, доступ до центрального банку даних, візуалізація інформації та інше. Використання засобів нових інформаційних технологій мають великі перспективи в освіті.

Доцільно поєднувати традиційні та інтерактивні методи навчання, що значно підвищує ефективність навчального процесу. Змішана модель навчання надає студентам нові можливості по вивченню дисциплін – можна в будь-який зручний час проглянути в режимі онлайн теоретичний матеріал, пройти тестування, перевірити свої знання по предмету, ознайомитись з додатковими джерелами по пройденим темам.

В даний час в суспільстві всі люди потребують, незалежно від їх суспільного становища, використання інформації для вирішення певних проблем і завдань які перед ними постають.

Отже, виникає питання чи вся інформація, яку ми отримуємо є правильна. Щоб переконатися в достовірності цієї інформації ми повинні шукати джерела з гарною репутацією. При цьому використовувати інформацію зосереджену в книгах, патентах, журналах, звітах, ідеях, активно, на сучасному технічному рівні, яка була використана у повсякденній, виробничій, науковій, освітній та інших видах людської діяльності.

Як говорилося вище, в даний етап активно використовується інформація як суспільний продукт, через це відбувається формування високо-

організованого інформаційного середовища, яке впливає на життєдіяльність людей.

Інформаційне середовище складається з багатьох інформаційних об'єктів, технології збору, накопичення, передачі, обробки, продукування та поширення інформації. Якщо в суспільстві створене інформаційне середовище, то формуються прогресивні тенденції розвитку продуктивних сил, процеси інтелектуалізації діяльності членів суспільства у всіх його сферах.

Отже, підсумовуючи сказане, можемо стверджувати, що використання інформаційних технологій – це життєва необхідність сьогодення, адже вони роблять навчання цікавішим і ефективнішим, дають можливість вільно висловлювати думку і розвивати самовпевненість. Студенти можуть брати активну участь у роботі, а не стандартно зазубрювати відповіді на питання, досягти більшого результату з найменшою затратою часу, краще сприймати і запам'ятовувати інформацію.

### **Список використаних джерел:**

1. Підгорна В. В. Методика та педагогічні умови впровадження мультимедійних технологій. – К. : Видавництво А.С.К., 2003.
2. Машбиц Е. И. Психолого-педагогические проблемы компьютеризации обучения. – М.: Педагогика, 1988. – 192 с.
3. Тальзина Н. Ф. Технология обучения и её место в педагогическом процессе // Современная высшая школа. – 1997. – Т.1.

**Р. В. Моцик**, канд. пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **ЗАСТОСУВАННЯ КЕЙС-ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ ПІДГОТОВЦІ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ**

Аналіз наукової педагогічної літератури засвідчив актуальність такої проблеми як модернізація вищої освіти на засадах використання інноваційних форм, методів та технологій навчання студентів, серед яких важливе місце відведено кейс-технології.

Багатий досвід використання кейс-технології накопичено за кордоном у процесі професійної підготовки педагогів: у США – Дж. Маанен, Л. Бреслов, Дж. Ерскін та М. Ліндерс; Великій Британії – К. Херрід, В. Ноймс та М. Ноймс, М. Райхельт, Р. Прінг; Австралії – А. Уотсон. Активно використовуються кейси при вивчанні спеціальних дисциплін інженерами у США – С. Сміт, Мирон Ф. Уман, та Канаді – Г. Кардос.

В нашій країні кейс-метод набув значного поширення у 70-80-ті рр. ХХ ст. Аналіз ситуацій почав використовуватись під час навчання управлінців, в основному на економічних спеціальностях ВНЗ, у першу чергу, як метод прийняття рішень. Тому науковці Г. Брянський, Ю. Єкатеринославський, О. Козлова, Ю. Красовський, В. Платов, Д. Поспелов, О. Овсянніков,

В. Рапопорт та інші зробили значний внесок у розробку та впровадження цієї технології. Більшість досліджень проблеми використання кейс-методу в українській та російській педагогічній науці присвячено викладанню економічних дисциплін Г. Багієв, Н. Боталова, В. Давиденко, О. Маргвелашвілі, Е. Михайлова, В. Наумов, О. Смолянинова та ін.).

Плідно працюють у напрямку впровадження методу аналізу ситуацій фахівці українського Центру інновацій та розвитку Ю. Сурмін, А. Сидоренко, В. Лобода, А. Фурда.

Однією з найбільш ефективних інноваційних технологій навчання, що використовуються з метою формування у студентів професійних умінь, є кейс-технологія, основне завдання якої полягає у створенні бази знань, на основі якої надалі здійснюється практична діяльність майбутнього вчителя.

Функціональні можливості кейс-технології досить широкі. Насамперед у порівнянні з традиційними технологіями навчання, кейс-технологія сприяє ефективному формуванню широкого інформаційного поля в форматі певної професійної діяльності, а також активізує розвиток професійних, аналітичних і комунікативних навичок. Не менш важливим є і той факт, що кейс-технологія – це середовище не тільки професійного навчання, а й виховання особистості в цілому.

Існують різні визначення цієї технології навчання, хоч вони дуже близькі за змістом. У зарубіжних публікаціях зустрічаються такі назви як метод вивчення ситуацій (case studies), ділових історій (case stories) і, насамкінець, просто метод кейсів (case method). У вітчизняних виданнях частіше за все говориться про метод конкретних ситуацій (КС), ділових ситуацій, кейс-метод, а також про ситуаційні задачі. Ми будемо спиратися на поняття «кейс-технології», що якнайповніше відображає суть цього підходу до навчання.

Кейс-технологія є інтерактивною технологією навчання, в основі якої лежать реальні ситуації, спрямовані і на засвоєння знань, і на формування нових якостей і умінь. Сам по собі «кейс» є певною функціональною системою, його основна функція – це можливе ефективне застосування отриманих результатів з метою вирішення будь-яких професійних задач.

Метою кейс-технології при підготовці майбутніх учителів є, окрім набуття навичок педагогічного спілкування, удосконалення навичок вирішення проблем і прийняття рішень у ситуаціях, які складаються у процесі професійної діяльності в системі відносин «учитель – учень», «учитель – батьки учня», «учитель – учитель», «учитель – адміністрація школи».

Ефективність застосування будь-якої технології навчання залежить від врахування певних чинників. Що стосується кейс-технології, то вона теж не є винятком. Насамперед реальна проблема або педагогічна ситуація ніколи не має єдиного правильного або неправильного рішення, тому визначення найбільш оптимального з них можливе лише за умови висування декількох гіпотез, ґрунтовного їх обговорення і прийняття колективного рішення. Цього можна досягти лише за умови участі групи студентів у процесі обговорення, мозкового штурму, генерування ідей. От-

же, одним з чинників ефективності кейс-технології у професійній підготовці майбутніх учителів є робота у групі. Групова навчальна діяльність сприяє формуванню у студентів практичних навичок, які у подальшому дозволяють їм застосувати свої інтелектуальні і професійні якості, проявити гнучкість і нестандартність при прийнятті тих чи інших рішень. Це дуже важливо, оскільки рейтинг якості особистості, який зумовлює успішність соціальної і професійної адаптації, в наш час перерозподіляється у бік тих фахівців, які вміють проявляти творчу активність, здатні правильно оцінити ситуацію, швидко знайти правильне рішення, володіють навичками професійного спілкування.

На занятті викладач починає обговорення кейса з того, що пропонує одному із студентів «відкрити» кейс, тобто описати ситуацію і у деяких випадках запропонувати стратегію. Цей процес неочікуваного виклику «до дошки» називається cold call і є великим стимулом для хорошої попередньої підготовки до занять. Алгоритм роботи з кейсом ґрунтується на попередньому самостійному опрацюванні ситуації, спробі вирішити поставлені завдання. Таким чином, наступним чинником ефективного застосування кейс-технології є наявність фундаментальних теоретичних знань з педагогічних дисциплін і попередня підготовка до занять, опрацювання педагогічної ситуації.

Надзвичайно важливо показати студентам їхню особисту зацікавленість у знаннях, що набуваються у процесі навчання, які можуть і повинні знадобитися їм надалі у педагогічній діяльності. Тому чинником ефективності кейса буде реальність і значущість ситуації, яка аналізується, вона повинна відтворювати характер взаємовідносин, які насправді існують у шкільному житті, для її розв'язання студенту необхідно застосувати і раніше надбані знання, і ті, які ще потрібно буде освоїти у процесі розробки кейса.

Висока якість отриманих знань прямо корелює з рівнем мотивації студентів. Досягти високого рівня мотивації можливо завдяки створенню ситуації успіху. Саме відчуття успіху є однією з головних рушійних сил кейс-методу, формування стійкої позитивної мотивації, нарощування пізнавальної діяльності. Таким чином, наступним чинником ефективного застосування кейс-технології буде діяльність, спрямована на активізацію студентів, стимулювання їх успіху, підкреслення досягнень майбутніх учителів.

При підготовці до роботи з кейсами викладачу необхідно відповісти на наступні запитання:

- чому необхідно навчити студентів у ході роботи над кейсом?
- як ця мета співвідноситься з матеріалами курсу й іншими навчальними цілями окремого заняття й усієї програми в цілому?
- чи потрібно роздати студентам усі матеріали, чи видавати їх невеликими порціями у процесі роботи?
- які ставити запитання студентам, що сприяли б їхнім роздумам, розумінню, проясненню і проникненню в суть проблеми?
- як спланувати час, щоб його вистачило і на докладну рефлексію, яка не менш важлива, ніж власне робота над кейсом?



Щоб організувати роботу у групі таким чином, викладач повинен бути високопрофесійним фахівцем, досконало володіти методами навчання, які є в структурі кейс-технології, бути технологічно обізнаним, уміти складати кейси і організувати групову роботу, мати високий рівень комунікативних здібностей. Тобто наступним і дуже важливим чинником ефективності використання кейс-технології у навчальному процесі є педагогічна майстерність викладача сучасного університету.

Застосування кейс-технології має бути методично, інформаційно, організаційно й педагогічно обґрунтованим і забезпеченим як на рівні організації навчально-виховного процесу в сучасному університеті, так і на рівні планування його окремим викладачем.

Необхідно зазначити, що кейс-технологія здійснює зв'язок освіти з життям за допомогою залучення у процес навчання реальних комунікативно-ситуативних завдань. Вона дозволяє застосовувати різноманітні методи, засоби навчання, з одного боку, а з іншого – інтегрувати отримані знання і професійні уміння, що сприятиме значному підвищенню рівня якості фахової підготовки майбутніх учителів у сучасному університеті.

УДК 338.48:378:004

**М. О. М'ястковська**, канд. пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **УДОСКОНАЛЕННЯ ПІДГОТОВКИ ФАХІВЦІВ У СФЕРІ ТУРИЗМУ НА ОСНОВІ ЗАСТОСУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ**

Важливим завданням вищої освіти є підготовка висококваліфікованих фахівців, здатних до конкурентоспроможності на ринку праці. А це вимагає, зокрема, мобільності та креативності в умовах сьогодення.

Особливістю підготовки фахівців в сфері туризму є багатоаспектний характер за видами діяльності, особливості технології виробництва комплексного туристичного продукту в різних сегментах ринку та високий рівень комунікативних зв'язків [1].

Інформаційні технології є важливим стимулом розвитку світової економіки, засобом для більш ефективного і творчого розв'язання економічних та соціальних проблем. І, водночас, одним із важливих засобів якісного покращення підготовки майбутніх фахівців. Тому вдосконалення підготовки фахівців у сфері туризму на основі застосування інформаційних технологій надається важливе значення.

Удосконалення підготовки фахівців на основі застосування інформаційних технологій нами реалізується, зокрема, під час вивчення навчальної дисципліни «Інформаційне забезпечення туристичного бізнесу» при підготовці фахівців у сфері туризму. Відповідно, змістове наповнення включає

такі питання для вивчення, без яких ускладнюється як подальше навчання, так і майбутня професійна діяльність: напрямки та принципи використання мережі Інтернет в сфері туризму; технології електронного маркетингу в сфері туризму; Інтернет-технології інформаційно-довідкової діяльності та реклами; завдання системи забезпечення інформаційної безпеки; проблеми захисту інформації в комп'ютерних мережах; забезпечення захисту інформації в комп'ютерних мережах; автоматизовані інформаційні системи підприємств і організацій; системи електронної обробки табличних даних в туризмі; бази даних туристичного профілю та ін.

Сучасний рівень інформаційно комунікаційних технологій та їх застосування, зокрема, за рахунок гнучкості та широких можливостей з реалізації комплексних рішень, сприяє підвищенню якості освіти майбутніх фахівців.

Одним з головних завдань системи навчання у вищих навчальних закладах є підготовка майбутніх фахівців для вміння застосовувати отримані знання на практиці, у реальних ситуаціях. Оскільки інформаційні технології стрімко розвиваються, змінюються, удосконалюються, їх використання може ускладнюватися через проблему вибору відповідної технології для реалізації конкретного прикладного завдання. Тому наше завдання – ознайомити студентів з різними напрямками інформаційних технологій, щоб вони могли орієнтуватися в різних технологіях, з метою вибору найбільш ефективного засобу для успішного розв'язання конкретної прикладної задачі.

Застосування інформаційних технологій для вдосконалення підготовки фахівців в сфері туризму дозволяє реалізовувати, зокрема, креативність студентів у навчанні, самостійність тощо. При цьому спостерігається зростання професійної майстерності та фахової компетентності.

Постійний розвиток інформаційних технологій, їх застосування у різних сферах життя, зокрема, економіці та освіті, вимагає постійного удосконалення підготовки фахівців на основі застосування інформаційних технологій.

### **Список використаних джерел:**

1. Лоїк Г.Б. Підготовка майбутніх менеджерів туризму засобами інформаційно-комунікаційних технологій / Г.Б. Лоїк. // Міжнародний науковий журнал "Науковий огляд". – № 5(15) (2015). – Режим доступу: <http://naukajournal.org/index.php/naukajournal/article/view/502/678>.

**Т. М. Пилишок**, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **ПЕДАГОГІЧНІ ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ ЯК ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ**

*Педагогічні програмні засоби (ППЗ)* – пакети прикладних програм, призначені для вирішення різних завдань навчання: формування знань, умінь і навиків, контролю якості засвоєння, узагальнення і систематизації знань і т.п., а також програмна документація, що визначає порядок застосування програмних засобів. У навчальному процесі можуть застосовуватися різні види ППЗ: комп'ютерні навчальні програми, інформаційно-пошукові системи навчального призначення, експертні системи навчального призначення та ін. Вони відрізняються програмною реалізацією, цілями та способами застосування в навчальному процесі [2].

Основний показник високої якості педагогічного програмного засобу – ефективність навчання. Педагогічні програмні засоби повинні задовольняти вимогам: стимулювати всі види пізнавальної активності учнів, які необхідні для досягнення основних навчальних цілей; враховувати у змісті навчального матеріалу та навчальних завдань вже набуті знання, уміння і навички учнів; забезпечувати діалог та діагностувати учня з метою індивідуалізації навчання; звести до мінімуму рутинні операції по введенню відповіді; інформувати учня про мету навчання, повідомляти, наскільки він просунувся в її досягненні, його основні недоліки, характер повторюваних помилок; допускати індивідуалізацію навчання, дозволяти учню приймати рішення про стратегії навчання, характер допомоги і т.п.; адекватно використовувати всі способи представлення інформації – у вигляді тексту, графіки, зображення, анімації, відео-фрагментів; вести діалог, керований не тільки комп'ютером, а й учнем; дозволити учню вхід і вихід з програми в будь-якій її точці, забезпечити доступ до раніше пройденого навчального матеріалу; допускати модифікацію, внесення змін до способів управління навчальною діяльністю.

ППЗ мають реальні *переваги* в порівнянні з паперовими носіями інформації, або навіть з електронними книгами.

Найбільша перевага цього освітнього продукту полягає в тому, що це не звичайний електронний підручник на електронному носії, а цілісна програма, яка поєднує теоретичні та практичні питання, віртуальні лабораторні роботи та практикуми, має електронний журнал успішності, конструктор уроків, комп'ютерні анімації фізико-хімічних процесів, інтерактивні і тестові завдання та багато інших можливостей. ППЗ є не тільки економічно вигідними, але і зрозумілішими для сучасної молоді, робота з ППЗ активізує самостійне мислення учнів. Їх легко оновлювати,

не зазначаючи при цьому істотних витрат. ППЗ передбачають велику кількість і високу якість ілюстративних матеріалів (рисуноків, графіків, карт, схем, фотографій, відеофрагментів, звукових рядів, інтерактивних моделей, тренажерів, 2D-, 3D-анімацій та ін.), що сприяє високому рівню ефективності навчання. ППЗ дозволяють об'єктивно та достовірно визначати рівні навчальних досягнень учнів за допомогою різноманітних багаторівневих тестів, завдань, тренажерів.

Сучасний вчитель, володіючи основами комп'ютерних технологій, може як застосовувати у своїй педагогічній діяльності існуючий арсенал ППЗ навчального призначення, так і створювати нові цікаві програмні засоби самостійно [3-5].

### **Список використаних джерел:**

1. Пилишок Т. М. Педагогічні програмні засоби навчального призначення, їх класифікація / Т. М. Пилишок // Наук. пр. Кам'янець-Поділ. нац. ун-ту ім. І. Огієнка: зб. за підсум. звіт. наук. конф. викл., докторантів і асп.: вип. 16, у 3 т. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2017. – Т. 2. – С. 57-59
2. Пилишок Т. М. ППЗ з математики: аналіз, застосування, засоби проектування / Т. М. Пилишок // Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності: зб. наук. праць за матеріалами Всеукр. наук.-практ. конф., 18-19 травня 2017 р. / Вінницький держ. педагог. ун-т ім. Михайла Коцюбинського [та ін.]. – Вінниця: ФОП Рогальська І.О., 2017. – С. 143-146.
3. Пилишок Т. М. Класифікація та засоби проектування педагогічних програмних засобів навчального призначення / Т. М. Пилишок // Прикладні задачі та ІТ-технології. Матер. міжвуз. наук. семінару, присвяченого 100-річчю від дня народження професора Василя Павловича Рубаника (1917-1993) і 55-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій (9-10 червня 2017 р.). – Чернівці: Яворський С.Н., 2017. – С. 88-90.
4. Пилишок Т. М. Використання тригерів в інтерактивних презентаціях для створення наочності / Т. М. Пилишок // Наук. пр. Кам'янець-Поділ. нац. ун-ту ім. І. Огієнка: зб. за підсум. звіт. наук. конф. викл., докторантів і асп.: вип. 15, у 3 т. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2016. – Т. 2. – С. 61-62.

**О. Б. Розумовська**

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **ШЛЯХИ ФОРМУВАННЯ ОКРЕМИХ СКЛАДОВИХ ПРОФЕСІЙНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНІХ ФАХІВЦІВ СФЕРИ ТУРИЗМУ ЗАСОБАМИ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ**

Європейський досвід та досвід інших країн світу переконливо свідчить про те, що компетентнісний підхід у навчанні майбутніх фахівців різний напрямів дає можливість якісно змінити рівень підготовки високоосвідчених та кваліфікованих спеціалістів. Саме такий підхід стає основою формування галузевих стандартів вищої освіти України, в тому числі для фахівців сфери обслуговування. В Законі України “Про вищу освіту” компетентність визначається як “динамічна комбінація знань, вмінь і практичних навичок, способів мислення, професійних, світоглядних і громадянських якостей, морально-етичних цінностей, яка визначає здатність особи успішно здійснювати професійну та подальшу навчальну діяльність і є результатом навчання на певному рівні вищої освіти”[1, с. 5].

У роботах Лозовецька В., Саух І., Лоїк Г., Степанець Н. визначено та обґрунтовано складові професійної компетентності для фахівців сфери туризму. Тоді як нашою метою є дослідження шляхів формування цих складових засобами інформаційно-комунікаційних технологій.

У системі професійної підготовки майбутніх фахівців сфери туризму складові компетентності можна репрезентувати у вигляді таких груп: діяльнісно-операційні, політичні та соціальні; культурологічні; комунікативні; інформативні.

Зважаючи на сучасний етап розвитку людської цивілізації і проникнення у всі галузі людської діяльності інформаційно-комунікаційних технологій, формування вказаних складових професійної компетентності можливе за умови максимального використання досягнень інформатизації суспільства.

Розглянемо шляхи формування елементів професійної компетентності фахівців спеціальності Туризм в розрізі вивчення навчальних дисциплін “Інформаційні системи та технології”, “Інформаційне забезпечення туристичного бізнесу”.

Ключову позицію серед складових діялісно-операційної групи займає вміння приймати рішення та здійснювати самостійний вибір власної стратегії професійної діяльності в нових умовах праці. Сприяє формуванню таких вмінь використання методу проєктів в освітньому процесі.

Політичні та соціальні складові передбачають здатність брати участь у розробці групових рішень, підтримувати та покращувати демократичні інституції. В розрізі формування таких якостей при вивченні “Інформаційні системи та технології”, “Інформаційне забезпечення туризму”.

тичного бізнесу” застосовуються колективні проекти з використанням хмарних технологій.

Цілком очевидно, що на тлі процесів глобалізації більшого значення набувають іншомовні комунікативні здібності сучасних спеціалістів сфери туризму. Удосконаленню таких здібностей сприяє використання англomовного програмного забезпечення.

Особливу функцію відіграють навчальні дисципліни “Інформаційні системи та технології”, “Інформаційне забезпечення туристичного бізнесу” при формуванні інформативної групи складових професійної компетентності. Саме в процесі вивчення цих дисциплін формуються готовність до використання різноманітних засобів і методів автоматизації в професійній діяльності, здатність оптимізувати робочий процес на основі інформаційно-комунікаційних технологій, здатність до структурування і перетворенню інформації відповідно до запитів клієнтів.

#### Список використаних джерел:

1. Закон України Про вищу освіту – Режим доступу <http://zakon5.rada.gov.ua/laws/show/1556-18>.
2. Лозовецька В. Т. Формування професійної компетентності фахівця сфери послуг і туризму. Навчально-методичний посібник / Розділ 1. Теоретико- методологічні засади формування професійної компетентності фахівця сфери послуг і туризму в умовах ринкового середовища. – Київ: Педагогічна думка, 2010. – С. 9-79.
3. Лоїк Г. Б. Модель формування професійної компетентності майбутніх менеджерів туризму / Г. Б. Лоїк // Науковий вісник Чернівецького університету. Педагогіка та психологія. – 2013. – Вип. 647. – С. 112-118.
4. Саух І.В. Моделі професійної компетентності менеджера туристичної індустрії як основа конкурентоспроможності галузі [Електронний ресурс] / І. В. Саух // Економіка. Управління. Інновації. – 2010. – № 2. – Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/eui\\_2010\\_2\\_38](http://nbuv.gov.ua/UJRN/eui_2010_2_38)

УДК 378.147.227

#### В. П. Татауров

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

### ФОРМУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ ПОЧАТКОВИХ КЛАСІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ХМАРНИХ СЕРВІСІВ

Розвиток інноваційних та інформаційних технологій вимагає суттєвих змін у навчально-виховному процесі, в тому числі і у початковій школі.

Відповідно до проекту нового базового Закону «Про освіту» ключовими для Нової української школи визначено 10 ключових компетентностей серед яких присутня *інформаційно цифрова компетентність*. Під даною компетентністю розуміється «впевнене, а водночас критичне за-

стосування інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) для створення, пошуку, обробки, обміну інформацією на роботі, в публічному просторі та приватному спілкуванні. Інформаційна й медіа-грамотність, основи програмування, алгоритмічне мислення, роботи з базами даних, навички безпеки в Інтернеті та кібербезпеці. Розуміння етики роботи з інформацією (авторське право, інтелектуальна власність тощо)» [1, с.11].

Формування набору ключових компетентностей в процесі підготовки майбутнього вчителя початкових класів стає одним з найважливіших завдань сучасної освіти. Сучасному учителю початкових класів необхідно вміти ефективно застосовувати сучасні технології в освітньому процесі, використовувати ресурси Всесвітньої павутини, інформаційно-комунікаційні технології в спілкуванні і обміні інформацією. Всіма цими компетенціями повинен володіти випускник вищого навчального закладу – вчитель початкових класів.

Організацію навчального процесу можна, розглядати як процес управління, а викладача – як менеджера, що реалізує функції планування, організації, мотивації і контролю. Головне завдання викладача – навчити студента навикам і вмінню планувати і організовувати свою діяльність, вмінню працювати з літературою, систематизувати і узагальнювати інформацію, аналізувати матеріал, логічно мислити. Придбання таких навичок залежить від викладача, зокрема від його вміння якісно організувати роботу.

На сьогоднішній день в освітньому просторі для організації навчальної діяльності широко використовуються хмарні технології. Одними з найбільш популярних хмарних сервісів є G Suite та Office 365. Дані сервіси надають можливість планування завдань, ведення електронного календаря, використовувати хмарне сховище даних, створювати сайти дисциплін, кафедр, тощо. Активно залучати студентів до групової діяльності над проектами, проводити on-line конференції, організовувати опитування, створювати презентації, зберігати відео подкасти та інше. Під час вивчення дисципліни «ІКТ в освіті і науці» студенти не лише можливості даних сервісів, а й є активними учасниками у створенні якісних педагогічного контенту з допомогою даних сервісів.

Вивчення даних хмарних сервісів та використання їх в організації навчально-пізнавальної діяльності у студентів підвищується рівень ІКТ компетентності. Майбутні вчителі початкових класів зможуть якісно покращити свою педагогічну майстерність у роботі з дітьми та організацію співпраці з батьками.

### **Список використаної літератури**

1. Нова українська школа. Концептуальні засади реформування середньої школи [Електронний ресурс] / [Л. М. Гриневич, О. Елькін, С. А. Калашнікова та ін.]. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: <http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/ua-sch-2016/konczepczya.html>.

## ЗМІСТ

### Секція 1. Математичне та комп'ютерне моделювання у прикладних задачах

<b>Chabanyuk Ya. M., Khimka U. T., Budz I. S.</b> The Real Property Market with Semi-Markov Switching.....	3
<b>Kayumov Sh., Sagatova S. M.</b> A Different Method of Solving the Second Boundary Value Problem of Parabolic Type Equations .....	4
<b>Kharchenko N. V., Satur O. R.</b> Dynamical Model of Opinion Formation .....	8
<b>Koshmanenko V. D., Voloshyna V. O.</b> Limit States of Conflict Dynamical Systems with Point Spectrum.....	9
<b>Verlan A. F., Furtat Yu.O.</b> Subsystems' Parameters Evaluation for Diagnostic Experiment Planning .....	11
<b>Андрейцев А. Ю., Клецька Т. С., Крижановська Т. В., Семененко Т. М., Смирнов І. В.</b> Поетапне визначення температури плакованої частинки в плазмовому струмені при напиленні покриттів .....	13
<b>Артюх М. В., Литвин О. М.</b> Тестування методу побудови виробничих функцій зі змінними коефіцієнтами (ВФЗКЕ).....	14
<b>Бараннік В. В., Слободянюк О. В., Твердохліб В. В., Хіменко В.В.</b> Диференційований підхід до обробки внутрішнього змісту відеокадрів для підвищення візуальної якості відеопотоку .....	16
<b>Верлань А. А., Палагин В. В.</b> Методы редукции математических моделей динамических систем .....	18
<b>Верлань А. Ф.</b> Принципи організації керованих натурних моделюючих систем .....	19
<b>Власюк А. П., Ільків І. В.</b> Математичне та комп'ютерне моделювання перенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні в насичено-ненасичених ґрунтах в одновимірному випадку в неізотермічних умовах.....	22
<b>Газдюк К. П., Жихаревич В. В., Нікітіна О. М., Остапов С. Е.</b> Еволюційний алгоритм варіабельного руху черв'якоподібного організму .....	23



<b>Герасименко В. І., Кречко В. В.</b> Про процес поширення кореляцій в квантових системах .....	24
<b>Дуднік А. С.</b> Визначення відстані між об'єктами на основі часу прибуття сигналу .....	25
<b>Жученко О. А., Коротинський А. П., Кашишев Є. В.</b> Аналіз впливу розрідження на процес нагріву багатокамерної печі випалювання .....	26
<b>Зорін О. С., Палагін В. В.</b> Моделювання систем передачі даних шумовими негаусовими сигналами з ексцесною модуляцією .....	28
<b>Іванюк В. А., Стертен Ю.</b> Дослідження обчислювальних особливостей форм динамічних моделей вимірювальних перетворювачів .....	30
<b>Кушлик Б. Р., Кушлик-Дивульська О. І., Сорокіна А. Л.</b> Дослідження якості відображення шрифтів на структурованій поверхні .....	32
<b>Лисецкий Ю. М., Каревина Н. П.</b> Математические модели как инструмент исследования сложных систем .....	33
<b>Магеровська Т. В., Пахолок Б. Б., Пелех Я. М.</b> Моделювання і аналіз розподілу магнітного поля у магнітотвердому шарі, що знаходиться за умов одночасної дії гармонійного за часом та постійного магнітного полів .....	35
<b>Мусій Р. С., Мельник Н. Б., Оришин О. Г., Гошко Л. В.</b> Термонапружений стан електропровідного циліндра з тонким електропровідним покриттям за нестационарної електромагнітної дії .....	37
<b>Понеділок В. В.</b> Апаратно-орієнтований метод диференціювання сигналів .....	38
<b>Постолатій Н. Ю., Прокоф'єва Л. Л., Положаєнко С. А.</b> Математична модель процесу дифузії у багатокомпонентних системах .....	40
<b>Прокопович Ю. І., Гошко З. О., Костенко І. С., Пелех Я. М.</b> Дослідження пружно-пластичного стану циліндричної оболонки з пруж- ним заповнювачем та внутрішньою тріщиною .....	42
<b>Федорчук В. А.</b> Моделювання неоднорідних нелінійних просторово протяжних об'єктів з розподіленими параметрами на основі застосування оборотних комп'ютерних моделей .....	44

<b>Філоненко К. М., Фомін О. О., Рубан О. Д.</b> Використання згортальних нейронних мереж для виділення інформативних ознак, що впливають на якість дистанційного навчання .....	46
<b>Швець О. Ю., Сіренко В. О.</b> Симетричні сценарії переходу до детермінованого хаосу в системах з обмеженим збудженням .....	47
<b>Щестюк Н. Ю., Семенюк А.</b> Співіснування когерентності та некогерентності у «валютному кошику».....	48

## **Секція 2. Моделювання і оптимізація керованих процесів**

<b>Абрамчук В. С., Прищепа Д. О., Пугач О. С., Абрамчук І. В.</b> Формування базисів в задачах математичного моделювання.....	50
<b>Бейко І. В., Співак Ю. В.</b> До побудови методів глобальної максимізації гамільтоніанів .....	52
<b>Бейко І. В., Фуртель О. В.</b> Методи побудови узагальнених оптимальних траєкторій нелінійних керованих систем.....	53
<b>Гудима У. В., Гнатюк В. О.</b> Критерії узагальненого чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок лінійного нормованого простору відносно опуклої множини цього простору.....	54
<b>Ночвай В. І.</b> Оптимізація соціоекологічних систем відносно забезпечення стандартів якості довкілля .....	56
<b>Пичугина О. С.</b> Полиэдрально-сферические конфигурации: классификация, свойства и приложения .....	57
<b>Тимофієва Н. К.</b> Підкласи розв'язних задач в штучному інтелекті .....	59
<b>Фуртель О. В.</b> Моделювання захисних маневрів літальних апаратів .....	60
<b>Щирба В. С.</b> Пошук активних режимів алгоритмами внутрішньої точки .....	61

### Секція 3. Питання оптимізації обчислень

**Бартіш М. Я., Ковальчук О. В.**

Двокроковий метод спуску для розв'язування  
нелінійних алгебраїчних систем ..... 63

**Бартіш М. Я., Максимішин Р. О., Нанинець В. Я.**

Про деякі трикрокові квазіньютонівські методи мінімізації..... 64

**Задірака В. К.**

Оптимальне інтегрування швидкоосцилюючих функцій  
для інтерполяційних класів підінтегральних функцій..... 65

**Дудіна Н. В., Мельник Л. В.**

Використання обчислювальної техніки  
для аналізу математичних розрахунків..... 66

**Максимюк В. А.**

Про причини явища замикання в чисельних методах теорії оболонок... 68

**Семчишин Л. М.**

До застосування розріджених числових  
систем лінійних алгебраїчних рівнянь ..... 70

**Чевська К. С.**

Застосування паралельних алгоритмів розв'язування СЛАП  
на основі гіллястих ланцюгових дробів ..... 72

### Секція 4. Методи моделювання та прогнозування динамічних процесів

**Chornyy R. O., Kinash O. M.**

Definition of an Admissible Insurance Rate in Case of F-Model..... 74

**Ковальська І. Б.**

Оцінки відхилень сум рїсса від  $\bar{\psi}$ -інтегралів,  
які породжують цілі функції..... 74

**Кулик Г. М., Кулик В. Л.**

Обмежені розв'язки диференціальних рівнянь Рїккати ..... 76

**Сеньо П. С.**

Методи звуження двохсторонніх апроксимацій  
розв'язків задачі Коші та граничних задач ..... 80

**Сорич В. А., Сорич Н. М.**

Найкраще одночасне наближення суми  
згортки з ядрами Бернуллі та Пуассона ..... 82

<b>Степаненко Н. В.</b> Вплив параметрів на регулярність на осі лінійних систем диференціальних рівнянь .....	83
---	----

**Секція 5. Проблеми моделювання і прогнозування  
процесів із розподіленими параметрами**

<b>Bomba A., Malash K.</b> Modelling of Explosion Processes with Using the Quasiconformal Mappings Method where the Identification of the Boundary of Zone of Influence Takes Place.....	86
<b>Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Дегтяр С. В.</b> Моделювання багатошарової основи з початковими напруженнями в задачах про рухоме навантаження.....	87
<b>Багно О. М.</b> Математичне моделювання хвильового процесу у шарі стисливої ідеальної рідини, що взаємодіє з пружним півпростором .....	89
<b>Бак С. М.</b> Гетероклінічні біжучі хвилі в дискретному рівнянні синус-Гордон з нелінійною взаємодією на двовимірній ґратці.....	91
<b>Власюк А. П., Жуковська Н. А., Жуковський В. В., Федорчук В. Ю.</b> Математичне моделювання просторового напружено-деформованого стану багатошарового ґрунтового масиву з урахуванням тепломасоперенесення .....	92
<b>Вовк В. С., Самойленко В. Г., Сатко В. О.</b> Асимптотичні та чисельні розв'язки рівняння Кортвега-де Фріза.....	95
<b>Геселева К. Г.</b> Сумісність та побудова наближених розв'язків інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю та обмеженнями .....	96
<b>Громик А. П.</b> Математичне моделювання коливних процесів у необмежених кусково-однорідних клиновидних циліндрично-кругових середовищах.....	98
<b>Кожушко О. Д., Мартинюк П. М.</b> Про застосування FreeFem++ до задачі вологоперенесення у випадку розливу забруднюючої речовини на поверхні ґрунту.....	100
<b>Конет І. М., Пилипюк Т. М.</b> Еліптичні крайові задачі в необмежених кусково-однорідних циліндрично-кругових областях.....	102

<b>Мейш В. Ф., Мейш Ю. А.</b> Чисельне моделювання динамічних процесів в дискретно підкріплених еліпсоїдальних оболонках при нестационарних навантаженнях.....	103
<b>Міхалевська Г. І.</b> Моделювання коливних процесів методом гібридного диференціального оператора Ейлера-Лежандра- (Конторовича-Лебедева) на сегменті $[0, R_3]$ полярної осі .....	104
<b>Мусій Р. С., Дрогомирецька Х. Т., Веселовська О. В., Гошко Л. В.</b> Математичне моделювання термопружної поведінки електропровідного циліндра за нестационарної електромагнітної дії за врахування термопружного розсіювання енергії.....	106
<b>Омелян О. М.</b> Нелокальні анзаці та редукція системи рівнянь хемотаксису.....	108
<b>Петрик М. Р., Михалик Д. М., Петрик О. Ю., Бойко І. В.</b> Моделювання адсорбції і десорбції вуглеводнів у нанопористих каталізаторах нейтралізації викидів з використанням нелінійної ізотерми Ленгмюра .....	110
<b>Сторожук Є. А., Харенко С. Б.</b> Математичне моделювання непружного деформування кінчної оболонки з круговими отворами при дії комбінованого навантаження .....	111
<b>Хома Г. П., Хома-Могильська С. Г.</b> Математичне моделювання розв'язків гіперболічних рівнянь другого порядку.....	113
<b>Черний Д. И.</b> О преобразовании уравнения Навье-Стокса к обыкновенному дифференциальному уравнению .....	115

## Секція 6. Системний аналіз і прийняття рішень

<b>Karataieva T., Koshmanenko V.</b> The Winner's Strategy for a Loser in a Model of 3-Players Conflict Game .....	117
<b>Kovalenko O. E.</b> On Consolidation of Information in Systems of Situational Management .....	118
<b>Власова Т. М., Коваленко О. Є., Вишневський В. В., Соломонов В. В.</b> Організація інформаційних об'єктів сервісу підтримки проведення нарад в системах ситуаційного управління .....	120

<b>Коваленко О. Є., Коваленко Т. О.</b> Конвергенція та конфігурування інформаційних технологій в системах ситуаційного управління .....	122
<b>Литвин В. В., Угрин Д. І., Шевчук С. Ф.</b> Розвиток теорії ройового інтелекту в задачах адміністративно-територіального управління .....	124
<b>Махович О. І.</b> Редукція числової реалізації інтегрального оператора Вольтерри типу згортки .....	126

## **Секція 7. Інформаційні технології в освіті**

<b>Shramenko V. M.</b> Machine Learning and the Problem of Credit Scoring.....	128
<b>Андруховський А. Б.</b> Особливості використання сучасних інструментів електронного навчання вузькопрофільних фахівців у галузі ІТ та програмування .....	128
<b>Бейко І. В.</b> Сучасні інформаційні технології у підвищенні якості навчання .....	130
<b>Бобилєв Д. Є., Корольський В. В.</b> Комп'ютерна підтримка евристичних методів навчання функціонального аналізу .....	131
<b>Грищук В. А., Іванюк Т. М.</b> Особливості вибору інструментальних засобів комп'ютерного моделювання .....	133
<b>Кух А. М., Кух О. М.</b> Stem-освіта як стратегія реалізації компетентнісного навчання.....	135
<b>Кух О. М., Кух А. М.</b> Інформаційно-комунікаційні технології та медіакомпетентність .....	136
<b>Листопадава В. В., Ясеньчук В. В.</b> Нові технології в освіті.....	139
<b>Моцик Р. В.</b> Застосування кейс-технології при підготовці майбутніх учителів.....	142
<b>Мястковська М. О.</b> Удосконалення підготовки фахівців у сфері туризму на основі застосування інформаційних технологій .....	145

<b>Пилипюк Т. М.</b> Педагогічні програмні засоби як інформаційні технології навчання .....	147
<b>Розумовська О. Б.</b> Шляхи формування окремих складових професійної компетентності майбутніх фахівців сфери туризму засобами інформаційно-комунікаційних технологій .....	149
<b>Татауров В. П.</b> Формування інформаційно-комунікаційної компетентності майбутніх вчителів початкових класів з використанням хмарних сервісів .....	150

Міністерство освіти і науки України  
Національна академія наук України  
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка  
Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України  
Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України  
Національний технічний університет України  
Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського  
OKAN University (Istanbul, Turkey)  
Norwegian University of Science and Technology (Gjøvik, Norway)  
Lublin University of Technology (Lublin, Poland)  
Tashkent State Technical University  
named after Islam Karimov (Tashkent, Uzbekistan)

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

## СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ, ПРОГНОЗУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ

### ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

8-ї Міжнародної наукової конференції,  
присвяченої 100-річчю Національної академії наук України  
та 100-річчю Кам'янець-Подільського національного  
університету імені Івана Огієнка

---

Підписано до друку 12.04.2018 р. Гарнітура «Таймс».  
Папір офсетний. Друк різнографічний.  
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 9,3. Обл.-вид. арк. 9,9.  
Тираж 100. Зам. № 801.

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,  
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.  
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Надруковано в Кам'янець-Подільському національному  
університеті імені Івана Огієнка,  
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.