

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»
Інститут проблем моделювання в енергетиці імені Г. С. Пухова НАН України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
Інститут математики НАН України
OKAN UNIVERSITY (Istanbul, Turkish)
Ташкентський державний технічний університет (Узбекистан)
Державний університет Люблінська політехніка (Польща)
Університет Вітаутаса Великого (Литва)
Віденський університет (Австрія)



СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ, ПРОГНОЗУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ



**ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ VII МІЖНАРОДНОЇ
НАУКОВОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ**

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка
2016

Друкується згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, протокол № 3 від 31 березня 2016 року.

Редакційна колегія:

- І. М. Конет**, д. ф.-м. н., професор (голова);
В. С. Щирба, к. ф.-м. н., професор (заступник голови);
П. С. Атаманчук, д. пед. н., професор;
І. В. Бейко, д. т. н., професор;
А. Ф. Верлань, д. т. н., професор, член-кор. НАПН України;
В. В. Мендерецький, д. пед. н., професор;
Ю. В. Теплінський, д. ф.-м. н., професор;
В. А. Федорчук, д. т. н., професор.

Відповідальні секретарі:

- В. А. Іванюк**, к. т. н., доцент;
О. О. Макаревич, викладач.

С91 **Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації** : тези доповідей VII міжнародної наукової конференції / [редкол.: І. М. Конет (голова) та ін.]. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. — 264 с.

У збірнику друкуються нові результати досліджень з проблем математичного моделювання, прогнозування та оптимізації.

Для наукових та науково-педагогічних працівників, докторантів, здобувачів, аспірантів і студентів вищих навчальних закладів.

ББК 22.18+22.19

В. С. Абрамчук*, канд. фіз.- мат. наук,

І. В. Абрамчук**

* Вінницький державний педагогічний університет, м. Вінниця,

** Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

ПРОБЛЕМИ, МЕТОДИ, АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ $A\vec{x} = \vec{b}$ З ПОГАНО ЗУМОВЛЕНИМИ МАТРИЦЯМИ

1. Переваги ітераційних методів перед прямими при розв'язуванні систем $A\vec{x} = \vec{b}$ з погано зумовленими матрицями. Застосуємо обернений аналіз для обґрунтування даної гіпотези. Нехай в умовах наближених обчислень і перетворень системи допущені похибки у коефіцієнтах матриці і правої частини:

$$(A + \delta A_{ob} + \delta A_n)(\vec{x} + \delta \vec{x}) = \vec{b} + \delta \vec{b}_{ob} + \delta \vec{b}_n \Rightarrow B \vec{y} = \vec{c}$$

і система $B \vec{y} = \vec{c}$ розв'язується точно. З формул Крамера випливає, що розв'язок збуреної (зашумленої) системи є дробово-раціональною функцією відносно похибок, причому похибки, що допускаються в коефіцієнтах матриці, визначають полюси збуреного розв'язку. Отже ітераційні методи, які не вимагають перетворень матриці, можуть забезпечити більш високу точність розв'язку.

2. Принципи оптимальності вибору базису ітераційного процесу. В основу покладені ітераційні процедури, засновані на принципах оптимальності: 1) для довільного вектора наближення $\vec{x}^{(0)}$ існує оптимальний напрямний вектор $A^T \vec{c} = \vec{x}^{(0)} - \vec{x}^*$, $A \vec{x}^* = \vec{b}$, такий, що розв'язок досягається за один крок. Пошук такого вектора \vec{c} визначається з умови максимізації функції $\varphi = \cos^2 \left\{ A^T \vec{c}, \vec{x}^{(0)} - \vec{x}^* \right\}$. 2) Позначимо підпростір ортогональних напрямних векторів через H_s – це базис ітераційного процесу за s кроків (розмірність H_s вибирається невеликою). Обґрунтовано, що для максимізації функції φ необхідно сформулювати локальний базис підпростору Крилова $K_m = \text{span} \left\{ \vec{r}^{(k)}, \dots, (AA^T)^{m-1} \vec{r}^{(k)} \right\}$.

3. Метод похибок. Метод похибок складається з двох процедур: 1) формування локального базису K_m – на виході дістанемо вектор $\vec{c}^{(k)}$, що максимізує функцію φ ; 2) формування з векторів $\vec{c}^{(k)}$ ортогонального базису підпростору $H_s = \text{span} \left\{ A^T \vec{c}^{(k)} \right\}_{k=1}^s$.

Нехай $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i A^T \vec{u}_i^{(k)}$. Обґрунтуємо процедуру збіжності методу. Оскільки похибка $\vec{\varepsilon}^{(k+1)}$ є лінійною формою відносно вектора параметрів $\vec{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1})$, то квадрат норми вектора похибки є опуклою квадратичною формою, тому мінімум існує і єдиний. Задача пошуку мінімуму еквівалентна розв'язуванню системи рівнянь $B\vec{\gamma} = \vec{d}$ з симетричною додатно визначеною матрицею $B = \left(A^T \vec{u}_i^{(k)}, A^T \vec{u}_j^{(k)} \right)_{i,j=0}^{m-1}$, $\vec{d} = - \left(\vec{r}^{(k)}, \vec{u}_i^{(k)} \right)_{i=0}^{m-1}$. Система $B\vec{\gamma} = \vec{d}$ розв'язується методом Холецького.

4. Метод нев'язок. Нехай вектор $\vec{x}^{(0)}$ вибраний за початкове наближення до розв'язку системи $A\vec{x} = \vec{b}$. Обчислимо нев'язку $\vec{r}^{(0)} = A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}$. Уточнимо наближений розв'язок $\vec{x}^{(0)}$ введенням поправок (похибок) $\delta\vec{x}$ шляхом процедури $\vec{r}^{(1)} = \vec{r}^{(0)} + \sum_{i \in I_m} A^{(i)} \delta\vec{x}_i$, де I_m – підмножина $\{1, 2, \dots, n\}$.

Теорема. Метод похибок (нев'язок) збігається до розв'язку системи $A\vec{x} = \vec{b}$.

Висновок. Запропоновані методи налаштовані на розв'язування різницевих рівнянь великих порядків, оскільки підпростори K_m , H_s формуються з базисів малих розмірностей.

Список використаних джерел:

1. Райс. Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение / Дж. Райс ; пер. с англ. – М. : Мир, 1984. – 264 с.
2. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра / Дж. Деммель. – М. : Мир, 2001. – 429 с.
3. Абрамчук В.С. Комбінований метод розв'язування еліптичних рівнянь / В.С. Абрамчук, І.В. Абрамчук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фіз.-мат. науки : зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т, 2014. – Вип. 10. – С. 5-16.

УДК 372.853.53

Б. Р. Аліксійчук,

О. С. Коваленко, канд. тех. наук,

А. М. Кух, канд. пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПРОЕКТ СИСТЕМИ «ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ДІМ» НА ПЛАТФОРМІ ARDUINO

Актуальність даної теми полягає у тому, що сучасний світ рухається у напрямку повної автоматизації повсякденного життя. Система «Інтелектуальний дім» дозволяє організувати вдома «зону комфорту» в залежності від потреб кожного з споживачів.

Метою даної роботи є створення моделі «Інтелектуальний дім» на основі платформи Arduino. Основна **ідея дослідження** полягає в програмуванні системи сенсорів різного типу для обслуговування конкретних параметрів середовища та автоматизації їх контролю за задалегідь заданими чинниками. Проект маж задовольняти низці чинників

- вибір основних параметрів, які впливають на «зону комфорту» споживача;
- інформування про температуру повітря;
- інформування про вологість повітря;
- інформування про атмосферний тиск;
- інформування про освітленість приміщень;
- інформування про стан сенсора диму;
- керування доступом до приміщень (магнітні та механічні замки);
- вологість ґрунту у рослин.

У ході виконання роботи можливе збільшення кількості параметрів, що будуть керуватись системою.

Основою для реалізації проекту обрано апаратну платформу Arduino. Arduino – це платформа з відкритим вихідним кодом, створена для швидкої і легкої розробки різноманітних електронних пристроїв. може отримувати дані про навколишній світ завдяки сенсорам і реагувати, керуючи світлом, двигунами та і іншими приводами. Мікроконтролер на платі програмується за допомогою мови програмування C1 Arduino і середовища розробки Arduino. Для програмування не потрібно вибирати програму, програма контролера записується через порт USB. Для початку роботи знадобиться тільки сама плата Arduino і комп'ютер зі встановленою середовищем розробки Arduino.

Для реалізації моделі проекту потрібні наступні компоненти:

- 1) мікроконтролер Arduino (Arduino nano v3);
- 2) сенсор температури і вологості Dht22 (малі похибки);
- 3) барометр BMP085;
- 4) годинник реального часу DS3231;

- 5) сенсор диму MQ-2;
- 6) екран Nokia 5110;
- 7) блок для батарейок, для живлення всієї конструкції (для автономної роботи на випадок вимикання світла). Живлення від Usb;
- 8) перемикач, для того, щоб вмикати підсвітку екрану за необхідністю;
- 9) кусок фанери і ніжки;
- 10) роз'єм для підключення блоку живлення.

Розглянемо монтаж нашої моделі:

- 1) першим монтується екран:
pin 3 — Serial clock out (SCLK), pin 4 — Serial data out (DIN);
pin 5 — Data/Command select (D/C), pin 7 — LCD chip select (CS);
pin 6 — LCD reset (RST), Живлення 3.3V;
- 2) далі сенсор температури і вологості Dht22:
pin 10 — DAT, Живлення 5V;
- 3) третім підключаємо барометр:
pin 4 — SDA, pin 5 — SCL, Живлення 5V;
- 4) підключаємо годинник реального часу:
pin 4 — SDA, pin 5 — SCL, Живлення 5V;
- 5) Підключаємо сенсор задимленості MQ-2:
pin 11 — DAT, Живлення 5V;
- 6) перевіряємо живлення.

Вважаємо, що запропонована модель може бути взята за основу для розробки контролю стану середовища як у домі, так і на робочому місці

Список використаних джерел:

1. Arduino Pro Mini. – <http://arduino.ru/Hardware/ArduinoBoardProMini>
2. Download the Arduino Software. – <https://www.arduino.cc/en/Main/Software>

УДК 621.793

А. Ю. Андрейцев*, канд. фіз.-мат. наук,

Т. М. Семененко*,

І. В. Смирнов**, д-р. техн. наук

*Державний економіко-технологічний університет транспорту, м. Київ,

**Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО СТАНУ ПЛАКОВАНОЇ ЧАСТИНКИ В ПЛАЗМОВОМУ СТРУМЕНІ ПРИ НАПИЛЕННІ ПОКРИТТІВ

У сучасних методах інженерії поверхні особлива увага приділяється створенню порошкових покриттів шляхом газотермічного напилення. Для досягнення високої якості даних покриттів необхідно встановлювати такі режимні параметри напилення, при яких забезпечується повне розплавлення частинки порошку з мінімальними втратами від випаровування, що є особливо важливим при застосуванні плакованих порошків.

В [1] розглянуто процес напилення суміші металевих та керамічних частинок. В [2] наведено результати досліджень для визначення розподілу температур в плакованій частинці за умови сталої температури плазмового потоку. Аналітичне дослідження температурного стану частинок металів та оксидів з урахуванням зміни їх агрегатного стану проведене в [3]. Але досить мало робіт присвячено аналітичному визначенню температури плакованих частинок в плазмовому струмені змінної температури. Дослідження цієї проблеми започатковано в [4].

Нами розглянуто вплив металевої оболонки на температурний режим тугоплавких керамічних частинок при газотермічному напиленні композиційних покриттів. З цією метою сформульовано крайову задачу для рівняння теплопровідності у двошаровій сферичній області за умови ідеального теплового контакту на границі ядро-оболонка у зовнішньому середовищі змінної температури.

Для розв'язання даної задачі проведено узгодження температури плазми в залежності від часу перебування частинки у потоці та проведено її апроксимацію ермітовими кубічними сплайнами. У певних припущеннях, щодо радіального розподілу температури в оболонці отримано аналітичний розв'язок даної задачі до моменту досягнення металевою оболонкою температури плавлення.

Далі розглянуто такі етапи: плавлення оболонки, нагрів керамічного ядра до температури плавлення, плавлення ядра, нагрів та охолодження розплавленої частинки. На стадії плавлення оболонки та ядра, як і в [3], вважаємо потік тепла із плазми сталим, і для визначення часу плавлення використовуємо рівняння теплового балансу на границі плавлення.

При розрахунку температури частинки на етапі польоту в розплавленому стані враховано те, що температури в центрі та на поверхні керамічного ядра суттєво відрізняються. В цьому випадку початкова умова для відповідної крайової задачі змінюється. Якщо частинка досягає поверхні основи в нерозплавленому стані, то якість покриття суттєво погіршується. Тому етапи затвердіння оболонки та ядра не розглядаються.

За допомогою отриманих результатів знайдено оптимальну товщину оболонки, що сприяє максимальному розігріву ядра при мінімальній втраті матеріалу оболонки за рахунок випаровування.

В результаті уточнення режимних параметрів напилення, на основі отриманих аналітичних розв'язків, підвищено якісні властивості напилених покриттів, зокрема зменшено пористість, підвищено міцність зчеплення та коефіцієнт використання матеріалу.

Список використаних джерел:

1. Смирнов И.В. Моделирование процесса нагрева частиц порошка в плазменной струе при напылении композиционных покрытий / И.В. Смирнов, А.Ю. Андрейцев, А.В. Чорный, В.И. Копылов // Вестник ХНТУ. – Херсон, 2008. – № 2 (31). – С. 449-455.
2. Барвинок В.А. Математическое моделирование и физика процессов нанесения плазменных покрытий из композиционных плакированных порошков / В.А. Барвинок, В.И. Богданович, И.А. Докукина, А.Н. Плотников. – М. : Международнй центр научной и технической информации, 1998. – 96 с.

3. Андрейцев А.Ю. Нагрів та плавлення частинок порошку в плазмовому струмені / А.Ю. Андрейцев, І.В. Смирнов, А.В. Чорний // Математичне та комп'ютерне моделювання Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. Кам'янець-Подільський національний університет, Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова. – 2011. – Вип. 5. – С. 3-10.
4. Андрейцев А.Ю. Моделювання температурного режиму та розрахунок оптимальної товщини мідної оболонки при плазмовому напилюванні плакованого порошку Al_2O_3 / А.Ю. Андрейцев, І.В. Смирнов, М.А. Долгов // Зб. наук. праць ДЕГУТ. Серія «Транспортні системи і технології». – К., 2013. – Вип. 23. – С. 123-128.

УДК 519.6

М. В. Артюх,

О. М. Литвин, д-р. фіз.-мат. наук

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

ЗАСТОСУВАННЯ ДИВІДІРІАЛЬНОГО ТА МУЛЬТИГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕНЬ В ДОСЛІДЖЕННІ ЕКОНОМІКИ СІЛЬСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА УКРАЇНИ

У доповіді розглядається застосування дивідіріального та мультигрального числень в дослідженні економіки сільського господарства України. Оскільки на результат виробництва має вплив багато факторів, тому важливо проводити дослідження, яким чином якісно та кількісно ці фактори впливають на кінцевий результат, тобто рівень випуску. Для такого аналізу пропонується використовувати виробничу функцію Кобба-Дугласа [1]:

$$Y = AL^\alpha K^\beta. \quad (1)$$

У цій виробничій функції основними факторами, що впливають на випуск продукції Y вважаються K – основний капітал та L – робоча сила. Коефіцієнти α, β відображають вклад праці та капіталу у виготовлення продукту.

Основною особливістю виробничої функції Кобба-Дугласа є те, що вона має сталі коефіцієнти еластичності α, β . Але при більш детальному дослідженні [2] виявляється, що частинні коефіцієнти еластичності виробничої функції Кобба-Дугласа можуть бути функціями від обох факторів L та K , що дає більш точне наближення функції. Тоді в нагоді стає теорія дивідіріального та мультигрального числень, оскільки дивідіра 2-го роду – це еластичність [3].

Розглянемо виробничу функцію зі змінними коефіцієнтами еластичності, яка моделює виробничий процес в галузі сільського господарства України [4].

Математична модель 1. Нехай виробнича функція зображується в наступному вигляді:

$$Y(O, V, C_1, a, b) = e^{C_1} \cdot O^{f(O, V, a)} \cdot V^{g(O, V, b)}, \quad (2)$$

$$f(O, V, a) = \sum_{i=0}^M \sum_{m=0}^N a_{im} \varphi_i(O) \varphi_m(V); \quad (3)$$

$$g(O, V, b) = \sum_{i=0}^M \sum_{m=0}^N b_{im} \varphi_i(O) \varphi_m(V); \quad (4)$$

$$\varphi_i(O) = O^i; \quad \varphi_m(V) = V^m, \quad (5)$$

де Y – ВВП сільського господарства України, V – основні засоби сільського господарства, O – оборотні активи сільського господарства, C_1, a_{im}, b_{im} – невідомі параметри (коефіцієнти), M, N – параметри, покладаємо $M=1, N=1$.

При проведенні обчислювального експерименту отримали таку виробничу функцію:

$$Yz_1 = e^{27,11} \times O^{3,366+0,128 \cdot O+0,023V} \times V^{-9,197-0,166 \cdot O+0,026 \cdot V}. \quad (6)$$

Математична модель 2. Нехай виробнича функція зображується в наступному вигляді:

$$Y(L, K, C_1, a, b) = e^{C_1} \cdot L^{f(L, K, a)} \cdot K^{g(L, K, b)}, \quad (7)$$

$$f(L, K, a) = \sum_{i=0}^M \sum_{m=0}^N a_{im} \varphi_i(L) \varphi_m(K); \quad (8)$$

$$g(L, K, b) = \sum_{i=0}^M \sum_{m=0}^N b_{im} \varphi_i(L) \varphi_m(K); \quad (9)$$

$$\varphi_i(L) = L^i; \quad \varphi_m(K) = K^m, \quad (10)$$

де Y – ВВП сільського господарства України, K – основні засоби сільського господарства, L – кількість найманих працівників, C_1, a_{im}, b_{im} – невідомі параметри (коефіцієнти), M, N – параметри.

Проведено обчислювальний експеримент. Відповідно, виробнича функція:

$$Yz = e^{29,089} \times L^{-23,818-7,391 \cdot L+0,046K} \times K^{-12,302+5,69 \cdot L+0,014 \cdot K}. \quad (11)$$

Список використаних джерел:

1. Cobb C.W. A Theory of Production / C.W. Cobb, P.H. Douglas // American Economic Review. – 1928. – P. 139-165.
2. Артюх М.В. Виробнича функція зі змінними коефіцієнтами еластичності, побудована на основі даних Кобба-Дугласа / М.В. Артюх, О.М. Литвин // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2012. – №27. – С. 124-129.
3. Литвин О.М. Дивідірiальнi та мультигральнi числення : монографiя / О.М. Литвин. – К. : Наук. думка, 2006. – 144 с.
4. Статистичний щорiчник України (2008-2013 р.) – К. : Державний комiтет статистики України, 2009-2013 р.

П. С. Атаманчук, д-р пед. наук,
А. М. Кух, канд. пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

УТОЧНЕННЯ ЗМІСТУ КУРСУ «СУЧАСНІ ТЕОРІЇ ТЕСТІВ»

Одним із важливих етапів підготовки фахівця напряму підготовки «8.18010022 Освітні вимірювання» є освоєння і оволодіння теорією і методологією педагогічних вимірювань. Однією із ключових в розв'язанні цієї проблеми є навчальна дисципліна «Сучасні теорії тестів». Щодо змістового наповнення курсу існує багато трактувань, оскільки він орієнтований на кінцевий результат – кваліфікацію, здебільшого педагога-дослідника або психолога. На нашу думку такий підхід дещо обмежений і потребує змістової оптимізації і доповнення. Особливу увагу необхідно приділити питанням педагогічної оцінки і об'єктивізації контролю.

Головні акценти в курсі доцільно зробити на наступних питаннях.

Розвиток тестування в Україні. Початок розвитку тестування в рамках педології. Період ігнорування тестів. Використання тестів в 70-ті роки ХХ століття. Сучасні центри тестування.

Традиційні і нові теорії оцінки результатів навчання. Види контролю (вхідний, поточний і підсумковий). Форми і організація контролю. Вимоги до організації контролю.

Оцінка, її функції. Завдання оцінки. Способи оцінки: порівняльний, нормативний, особистісний. Найважливіші компоненти навченості: темп засвоєння знань, умінь; темпи просування в навчанні; темпи приросту результатів. Зв'язок оцінки та самооцінки.

Роль психологічної підготовки до тестування. Соціально-етичні аспекти тестування. Місце педагогічних і психологічних вимірювань в освіті. Таксономія освітніх цілей і результати освіти. Підходи до структурування навчальних досягнень. Педагогічне та психологічне тестування. Вивчення динаміки психічного і особистісного розвитку в освітньому процесі. Використання педагогічних і психологічних тестів у навчальному процесі.

Педагогічний контроль, предмет і об'єкт контролю. Принципи педагогічного контролю.

Поняття про якість освіти. Оцінка як елемент управління якістю. Показники якості освіти. Оцінка ефективності та якості освіти. Моніторинг якості освіти. Категоріально-понятійний апарат, що характеризує якість освіти. Вимоги до якості на міжнародному рівні. Сучасний менеджмент якості освіти. Структурна модель системи якості освітнього процесу. Методологічні підстави управління якістю освіти: системний, особистісно-діяльнісний, управлінсько-технологічний, ситуаційний і рефлексивний підходи. Провідні завдання і основні моделі управління якістю освіти. Оціночний метод.

ЗНО як один із засобів підвищення якості загальної та педагогічної освіти. Завдання ЗНО: розширення доступності вищої освіти, зниження психологічного навантаження на випускників загальноосвітніх установ,

об'єктивізація та уніфікація вимог до загальноосвітньої підготовки вступників до вузів. Переваги ЗНО перед іншими формами контролю – достовірність, об'єктивність, надійність отриманих результатів.

Організаційні основи ЗНО. Законодавчі, нормативно-правові та організаційно-педагогічні документи, що регламентують порядок проведення ЗНО. Вимоги до пунктів проведення. Отримання і використання екзаменаційних матеріалів. Процедура і правила проведення. Інструкція з проведення ЗНО. Інструкція для учнів. Порядок перевірки відповідей на завдання різних видів. Робота конфліктної комісії з розгляду апеляцій. Інформаційна безпека при організації та проведенні ЗНО. Структура тестів для ЗНО: завдання типу А, В, С.

Вважаємо, що пропонувані зміст дисципліни прийматиме більш високої якості підготовки фахівців в галузі освітніх вимірювань.

Список використаних джерел:

1. Педагогічне оцінювання і тестування. Правила. Стандарти. Відповідальність / Я.Я. Болюбаш, І.Є. Булах, М.Р. Мруга, І.В. Філончук. – К. : Майстер-клас, – 2007 – 272 с.
2. Чельшкова Н.Б. Теория и практика конструирования педагогических тестов : учебное пособие / Н.Б. Чельшкова. – М. : Логос, 2002. – 432 с.

УДК 517.97

С. М. Бак, канд. фіз.-мат. наук

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

БІЖУЧІ ХВИЛІ В МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНО ЗВ'ЯЗАНИХ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Розглядається модель, яка описує динаміку нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці. Передбачається, що кожний осцилятор нелінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = U'(q_{n+1,m} - q_{n,m}) - U'(q_{n,m} - q_{n-1,m}) + \\ + U'(q_{n,m+1} - q_{n,m}) - U'(q_{n,m} - q_{n,m-1}) - V'(q_{n,m}), (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \quad (1)$$

де $q_{n,m}(t)$ – узагальнена координата (n, m) -го осцилятора в момент часу t , потенціали $U, V \in C^1(\mathbb{R})$.

Серед розв'язків таких систем особливої уваги заслуговують біжучі хвилі. В статтях [2; 3] вивчалися періодичні біжучі хвилі для таких систем.

Значимо, що біжуча хвиля у цьому випадку має вигляд $q_{n,m}(t) = u(n \cos \varphi + m \sin \varphi - ct)$ і для її профілю $u(s)$, де $s = n \cos \varphi + m \sin \varphi - ct$, рівняння (1) набуде вигляду

$$c^2 u''(s) = U'(u(s + \cos \varphi) - u(s)) - U'(u(s) - u(s - \cos \varphi)) + \\ + U'(u(s + \sin \varphi) - u(s)) - U'(u(s) - u(s - \sin \varphi)) - V'(u(s)). \quad (2)$$

Вивчаються періодичні та відокремлені біжучі хвилі. Профіль періодичної хвилі задовольняє умову

$$u(s + 2k) = u(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad k > 0, \quad (3)$$

а відокремленої –

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \quad (4)$$

Розглядаються потенціали $U(r)$ і $V(r)$ вигляду:

$$(i) \quad U(r) = \frac{c_0^2}{2} r^2 + f(r), \quad V(r) = -\frac{a^2}{2} r^2 + g(r), \quad \text{де } c_0 \geq 0, \quad a > 0.$$

Крім того, припускається, що неквадратична частина кожного з цих потенціалів $h \in \{f; g\}$ задовольняє умови:

$$(ii) \quad h(0) = h'(0) = 0 \quad \text{і} \quad h'(r) = o(r) \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0;$$

$$(iii) \quad \text{існує } \mu > 2 \text{ таке, що } 0 \leq \mu h(r) \leq rh'(r).$$

$$(iii^+) \quad \text{існують } r_0 > 0 \quad \text{і} \quad \mu > 2 \text{ такі, що } h(r_0) > 0 \quad \text{і} \quad \text{для } r \geq 0$$

$$0 \leq \mu h(r) \leq rh'(r);$$

або

$$(iii^-) \quad \text{існують } r_0 > 0 \quad \text{і} \quad \mu > 2 \text{ такі, що } h(r_0) > 0 \quad \text{і} \quad \text{для } r \leq 0$$

$$0 \leq \mu h(r) \leq rh'(r);$$

Використовуючи варіаційний метод, одержано наступні результати:

Теорема 1 ([1]). Нехай виконуються умови (i), (ii), (iii⁺), (iii⁻).

Тоді для будь-яких $k \geq 1$ і $c \in (0; c_0]$ рівняння (2) має розв'язок, який задовольняє умову (3). Тим самим існують дві періодичні біжучі хвилі з профілем u і швидкостями $\pm c$.

Теорема 2 ([2]). Нехай виконуються умови (i)–(iii). Тоді для будь-яких $k \geq 1$ і $c > c_0$ рівняння (2) має розв'язок, який задовольняє умову (3). Тим самим існують дві періодичні біжучі хвилі з профілем u і швидкостями $\pm c$.

Теорема 3. Нехай виконуються умови (i)–(iii). Тоді для будь-якого $c > c_0$ рівняння (2) має розв'язок, який задовольняє умову (4). Таким чином, існують дві відокремлені біжучі хвилі з профілем u та швидкостями $\pm c$.

Список використаних джерел:

1. Бак С.М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С.М. Бак // Математичне

- та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський : КПНУ імені Івана Огієнка, 2014. – Вип. 10. – С. 17-23.
2. Бак С.М. Існування надзвучових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С.М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський : КПНУ імені Івана Огієнка, 2015. – Вип. 12. – С. 5-12.

УДК 519.6

М. Я. Баргіш, д-р. фіз.-мат. наук,

Н. П. Огородник, канд. фіз.-мат. наук

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ПРО ОДИН МЕТОД СПУСКУ

Розглянемо задачу оптимізації

$$f(x) \rightarrow \min_{R^n}, \text{ де } f: R^n \rightarrow R, f \in C^1(R^n). \quad (1)$$

Введемо позначення $I = \{1, 2, \dots, n\}$. З даної множини виділимо підмножини $I_k^j = \{i_{kj}^1, i_{kj}^2, \dots, i_{kj}^{s_j}\}$, де $i_{kj}^i \in I_k$, $s_j \leq n$, $j = \overline{1, p}$, $p \leq n$; $I_k^j \subseteq I$ і

$\bigcup_{j=1}^p I_k^j = I_k$; $I_k^j \neq I_k^i$, якщо $i \neq j$, $i = \overline{1, p}$. Введемо вектор $a_{kj} = (a_{kj}^1, \dots, a_{kj}^n)^T$, де $a_{kj}^i = f'_{x_i}(x_{kj})$, якщо $i \in I_k^j$ і $a_{kj}^i = 0$, якщо $i \notin I_k^j$.

Для розв'язування (1) запропоновано метод вигляду

$$x_{k,j+1} = x_{kj} - \alpha_{kj} a_{kj}, \quad (2)$$

$$f(x_{k,j+1}) - f(x_{kj}) \leq -\varepsilon \alpha_{kj} \|a_{kj}\|^2, \quad (3)$$

де $\varepsilon \in (0, 1)$, $j = 1, 2, \dots, p$, $k = 0, 1, \dots$, $x_{kp} = x_{(k+1)0}$, для якого справедливі наступні леми.

Лема 1. Нехай $a_k \neq 0$, тоді $a_k(\bar{x})$ є вектором спадання функції $f(x)$ у точці \bar{x} .

Лема 2. Нехай $f \in C^1(R^n)$ і $f'(x)$ задовольняє умову Ліпшиця. $\|f'(x) - f'(y)\| \leq L \|x - y\|$. Тоді для $\forall x_{kj} \in R^n$ умова (3) виконується при

$$0 < \alpha_{kj} \leq \frac{(1 - \varepsilon)}{L}.$$

Отже, метод (2)-(3) є методом спуску.

У випадку $p = 1$ метод (2)-(3) буде градієнтним методом, а у випадку $I_k^j = \{j\}$ – методом покоординатного градієнтного спуску.

УДК 004.94

І. В. Бейко, д-р. техн. наук

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ДО ІНТЕГРОВАНОГО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

Наукова діяльність пов'язана зазвичай із цілеспрямованим відшуканням поглиблених знань про досліджувані причинно-наслідкові залежності. Кожна людина чи громада щоденно шукають знання, які б допомагали приймати правильні рішення на тих роздоріжжях, де немає мудрого, як бувало у казці, напису: «Направо підеш – славу знайдеш, наліво – багатство та в муках помреш». Історія розвитку математики засвідчує, що потреби аналізу даних та побудови математичних моделей для відображення і дослідження причинно-наслідкових залежностей об'єктивної реальності були основними стимулами для:

- розвитку математики як уніфікованої *мови науки*,
- розвитку математичних методів досліджень як *загальнонаукових* методів,
- розвитку математичного моделювання як загальнонаукового *інструментарію* для відшукування нових знань,
- підвищення якості математичної освіти як важливого заходу для забезпечення зростання *інтелектуального потенціалу нації*.

Сучасний прискорений розвиток нової комп'ютеризованої математики стимулює зростаючі потреби у підвищенні якості математичної освіти. У багатьох країнах вивчення вищої математики вже стало загальнообов'язковим у середній школі. У доповіді дається огляд сучасних комп'ютерних засобів на допомогу опануванню складними поняттями вищої математики та складними математично-комп'ютерними методами розв'язування ускладнених математичних задач, орієнтованих на прикладні застосування.

УДК 004.94

І. В. Бейко, д-р. техн. наук,

Я. В. Підвальна

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

МЕТОДИ ПРИСКОРЕНОГО ОБЧИСЛЕННЯ ОПОРНИХ ТРАЄКТОРІЙ

Методи прискореного обчислення опорних траєкторій побудовані з використанням достартового обчислення та уточнення оптимізованих відрізків фазових траєкторій, які використовуються для початкового наближення фазової траєкторії після отримання координат цілі безпосередньо перед стартом. Реалізація такого методу здійснюється з використанням робочих моделей підсистем побудованої динамічної моделі ЛА. Прискорене обчислення

аеродинамічних сил і моментів здійснюється у зручній для цього швидкісній системі координат $OX_1Y_1Z_1$ із центром координат у точці ЦМ ЛА, віссю OX_1 направленою у напрямку (повітряної) швидкості ЛА, віссю OY_1 , перпендикулярною до вісі OX_1 під кутом $(\pi-\theta)$ до напрямку на центр Земної кулі, та віссю OZ_1 , яка доповнює систему координат до правої системи.

Прискорені методи побудови опорних траєкторій включають ряд процедур, які реалізують наступні обчислення:

- 1) запис усіх таблиць даних (одномірних і двомірних) про термодинамічні параметри атмосфери, про параметри ЛА та про залежності аеродинамічних коефіцієнтів ЛА від цих параметрів;
- 2) обчислення і запис у динамічну пам'ять значень параметрів динамічної моделі із використанням записаних таблиць неповних даних;
- 3) обчислення фазової траєкторії на основі побудованої математичної моделі ЛА;
- 4) обчислення оптимізованих післястартових маневрів;
- 5) обчислення термінальних маневрів;
- 6) оптимізація інших ділянок опорних траєкторій за допомогою обчислення розв'язків крайових задач для спарених π -систем Л.С. Понтрягіна що включають керовану систему і її спряжену систему;
- 7) ітеративна оптимізація глобальної опорної траєкторії з використанням асимптотично-розв'язуючих операторів;
- 8) реалізація допоміжних процедур, пов'язаних з розрахунками, перевіркою та аналізом вхідних та вихідних даних динамічної моделі ЛА.

УДК 519.7

І. В. Бейко*, д-р. техн. наук,

В. С. Щирба**, канд. фіз.-мат. наук,

О. В. Щирба**

*Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ,

**Кам'янець-Подільський національний університет

імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ФАЗОВИХ ТРАЄКТОРІЙ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ

Математична модель керованого ЛА включає залежність траєкторії ЛА від кутів атаки і ковзання, від швидкісних напорів, від сили тяги, що визначається, зокрема, швидкістю вигорання палива реактивного двигуна та термодинамічними параметрами атмосфери, які впливають на величину швидкісного напору, на величину тяги та аеродинамічних коефіцієнтів, що задаються табличними функціями. Основні труднощі у побудові оптимального керування пов'язані зазвичай із нелінійністю керованої системи, або великою її розмірністю чи наявністю складних фазових обмежень, неповних даних про параметри моделей та внутрішніх і зовнішніх збурень. Це змушує спрощувати постановку оптимізаційної задачі за допомогою апроксимації шуканих керувань у адекватно вибраних спро-

чених класах параметричних функцій. Для обчислення траєкторії керованого ЛА можуть одночасно використовуватися декілька систем координат. Для розрахунку траєкторії польоту ракет із великою дальністю польоту використовують геоцентричні системи координат. Для розрахунку руху ЛА на АДТ використовують зв'язані з Землею топоцентричні системи координат, початок яких знаходиться на поверхні Землі. Для обчислення аеродинамічних сил і моментів використовують зв'язану систему координат, яка жорстко зв'язана з характерними елементами конструкції ЛА і переміщується разом з ними. Початок зв'язаної системи координат збігається з центром мас ЛА, а осі спрямовані вздовж характерних елементів її конструкції. Швидкісна система координат належить до напівзв'язаних систем координат, являє собою прямокутну праву систему відліку, за допомогою якої визначають траєкторію польоту ЛА, при дії на нього аеродинамічних сил у цільних шарах атмосфери. На практиці вважають, що початок швидкісної системи координат збігається з ЦМ ЛА. Підвищення ефективності керування літальними апаратами в реальних умовах неповних даних здійснюється як у напрямку оптимізації математичної моделі ЛА і оптимізації стратегій керування на виконання окремих завдань так і у напрямку підвищення тактико-технічних характеристик ЛА.

УДК 519.7

І. В. Бейко*, д-р. техн. наук,

О. В. Щирба**

*Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ,

**Кам'янець-Подільський національний університет

імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

МЕТОДИ АСИМПТОТИЧНО-РОЗВ'ЯЗУЮЧИХ ОПЕРАТОРІВ ДЛЯ ПОБУДОВИ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ В УМОВАХ ФАЗОВИХ ОБМЕЖЕНЬ

Розвиток конструктивної теорії оптимального керування в останні роки завершився побудовою алгоритмів для розв'язання великомасштабних оптимізаційних проблем. На даний час особливо вагомим результатом досягнуто у розвитку двох напрямів конструктивної теорії оптимального керування, а саме, у побудові «прямих» та «непрямих» методів оптимального керування. Прямими називають методи, які ґрунтуються на відшукуванні оптимального керування у вибраному класі параметричних функцій із наступною оптимізацією параметрів за допомогою наявних методів лінійного та нелінійного програмування, а непрямими називають методи, ґрунтуються на відшукуванні оптимальних керувань серед тих керувань, які задовольняють умовам оптимальності. Прикладом ефективних непрямих методів є методи, ґрунтуються на використанні принципу максимуму Л.С. Понтрягіна (необхідних умов оптимальності), а також методи, ґрунтуються на використанні принципу оптималь-

ності Р. Белмана (достатніх умов оптимальності). Фундаментальні теоретичні результати у вигляді необхідних умов оптимальності вперше і незалежно були сформулювали Карушом, Куном і Такером для скінчено-вимірних задач нелінійного програмування. Пізніше були знайдені умови оптимальності для нескінченновимірних задач оптимального керування з фазовими обмеженнями і в даний час невпинно зростає кількість публікацій, присвячених поглибленим фундаментальним дослідженням у відшуванні умов оптимальності для все складніших задач оптимізації у функціональних просторах. У порівнянні з скінченно вимірними задачами оптимізації, для нескінченно вимірних задач суттєво ускладнюються умови існування множників Лагранжа, як це виявилось при дослідженні задач оптимального керування із фазовими обмеженнями.

Одночасно спостерігається зростання кількості публікацій у побудові гібридних методів, де на першому етапі використовуються прямі методи для наближеної оптимізації параметризованих керувань у спрощених параметричних класах, а на другому етапі використовуються непрямі методи для уточнення наближених розв'язків. Велику увагу науковців привертають теоретичні дослідження та практичне використання швидкозбіжних методів внутрішньої точки, орієнтованих на розв'язання оптимізаційних задач великої розмірності. Зокрема, використовуються скінченно вимірні алгоритми внутрішньої точки для послідовного розв'язання дискретних задач на все дрібніших сітках дискретизації нескінченно вимірних задач. Проте, розширення методів внутрішньої точки із скінченно вимірних на нескінченновимірні задачі вимагало розв'язання теоретичних проблем, пов'язаних із тим, що поняття логарифмічної бар'єрної функції втрачає сенс для нескінченновимірних задач. У цьому напрямку вдалося розширити поняття центрального шляху із паралельним перенесенням двоїстих методів скінченно вимірної оптимізації на нескінченновимірні задачі оптимального керування у функціональних просторах і на цій основі будуються алгоритми обчислення оптимального керування в умовах фазових обмежень.

УДК 517.9

І. В. Бецко

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРИ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Досліджується питання існування і побудови неперервних розв'язків систем рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Jx(t) + \tilde{B}x(qt) + F(t), \quad (1)$$

де $J = \text{diag}(J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m)), J_i, i = 1, \dots, m$ – квадратні $(n_i \times n_i)$ матриці вигляду

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

причому $\sum_{i=1}^m n_i = n, \varepsilon$ – як завгодно мала додатна стала, вектор-функція

$F(t)$, стала q і матриця \tilde{B} задовольняють умови:

- 1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = 1, \dots, k, j = k + 1, \dots, m, q > 0$;
- 2) $\theta = \max \left\{ \frac{\tilde{b}_1}{1 - (\lambda^* + \delta_1)}, \frac{\tilde{b}_2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_2)}{1 - (\lambda_{**}^{-1} + \delta_2)} \right\} < 1$, де $\delta_i = \delta_i(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$,
 $\tilde{b}_1 = |\tilde{B}_{11}| + |\tilde{B}_{12}|, \tilde{b}_2 = |\tilde{B}_{21}| + |\tilde{B}_{22}|$,
 $\lambda^* = \max \{ \lambda_i, i = 1, \dots, k \}, \lambda_{**} = \min \{ \lambda_j, j = k + 1, \dots, m \}$;
- 3) всі компоненти вектор-функції $F(t)$ є неперервними й обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$ функціями.

Зокрема доведена така теорема.

Теорема. Нехай виконуються умови 1-3. Тоді система рівнянь (1) має неперервний і обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $x(t) = (x^1(t), x^2(t))$.

УДК 519.6

Я. Й. Бігун, д-р. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВІДПОВІДІ ІМУННОЇ СИСТЕМИ ПРИ ІНФЕКЦІЙНИХ ЗАХВОРЮВАННЯХ ІЗ ВРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ ЕКОЛОГІЧНИХ ФАКТОРІВ

У новому звіті по джерелах забруднення навколишнього середовища за 2015 рік, опублікований спільно організацією по захисту навколишнього середовища «Швейцарський Зелений Хрест» і розташованої в Нью-Йорку організацією «PureEarth», ідентифіковано шість найнебезпечніших у світі джерел забруднення навколишнього середовища [1]. Ці найнебезпечніші у світі джерела забруднення довкілля являють собою небезпеку для 95 мільйонів людей і можуть негативно впливати на перебіг інфекційних захворювань, зокрема при ураженні дихальної системи та гепатитів [2].

Для дослідження основних якісних і кількісних закономірностей перебігу інфекційних процесів Г.І. Марчук запропонував базову математичну модель [3], основною задачею якої був перехід до опису хвороби

як фізіологічного процесу взаємодії клітин і молекул імунної системи, органу-мішені та патогена. Узагальнення цієї моделі здійснено у праці [4] та ін. У даній роботі пропонується врахувати вплив усередненого фактору забруднення $E(t) = \alpha_1 E_1(t) + \dots + \alpha_n E_n(t)$, де $E_i(t)$ – показник забруднення повітря, води тощо, $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$. Відновлення екологічної рівноваги до середнього значення E^* відбувається за час $\Delta > 0$. Вважається, що функція $E(t)$ є розв'язком рівняння Хатчінсона

$$\frac{dE(t)}{dt} = r \left(1 - \frac{E(t-\Delta)}{E^*}\right) E(t), \quad t > 0. \quad (1)$$

Імунна відповідь організму ґрунтується на моделі Г.І. Марчука

$$\frac{dV}{dt} = \beta \left(1 - \delta \left(\frac{V}{K}\right)^n\right) V - \gamma F V, \quad (2)$$

$$\frac{dC}{dt} = \xi(m) \alpha F_\tau V_\tau - \mu_c (C - C^*) - \mu_1 (E - E^*), \quad (3)$$

$$\frac{dF}{dt} = \rho C - \eta \gamma F V - \mu_f F, \quad (4)$$

$$\frac{dm}{dt} = \sigma V - \mu_f F + \mu_2 (E - E^*), \quad (5)$$

де V , C і F – концентрація антигенів, плазмоклітин і антитіл відповідно, m – відносна характеристика ураження органу-мішені, $0 \leq m(t) \leq 1$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Коефіцієнти моделі – невід'ємні числа, запізнення $0 < \tau$ – час формування каскаду плазмоклітин, $F_\tau(t) = F(t - \tau)$, $V_\tau(t) = V(t - \tau)$, C^* – постійний рівень плазмоклітин і організмі.

Рівняння (2) описує узагальнену логістичну зміну концентрації антигену. При $n \geq 1$ така ситуація може виникнути під впливом ліків, які депресивним чином впливають на динаміку антигену.

Досліджено стаціонарні розв'язки моделі (1)-(5), дано їх інтерпретацію та досліджено стійкість. Зокрема, стаціонарний розв'язок

$$E_1 = E^*, \quad V_1 = m_1 = 0, \quad C_1 = C^*, \quad F_1 = \rho C^* / \mu_f,$$

який відповідає нормальному стану довкілля і здоровому організму. Якщо $2r\Delta < \pi$ і $\beta\mu_f < \gamma\rho C^*$, то такий розв'язок локально асимптотично стійкий.

Хронічній формі захворювання відповідають розв'язки

$$F_2 = \frac{\beta}{\gamma} \left(1 - \delta \left(\frac{V_2}{K}\right)^n\right), \quad m_2 = \frac{\sigma V_2}{\mu_m},$$

де V_2 і C_2 задовольняють систему лінійних рівнянь

$$\mu_c C_2 - \frac{\alpha\beta}{\gamma} \left(1 - \delta \left(\frac{V_2}{K}\right)^n\right) = \mu_c C^*, \quad \gamma\rho C_2 - \beta \left(1 - \delta \left(\frac{V_2}{K}\right)^n\right) (\gamma\eta V_2 + \beta\mu_f) = 0.$$

Детально розглянуто випадки $n = 1$ і 2 . Здійснено числове моделювання імунної відповіді в системі Mathematica.

Список використаних джерел:

1. The foundation Green Cross Switzerland [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.greencross.ch>.
2. Voorn G.A.K. van Smoking epidemic eradication in a eco-epidemiological dynamical model / G.A.K. van Voorn, B.W. Kooi // Ecological Complexity. – 2013. – P. 180-189.
3. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии: вычислительные методы и эксперименты / Г.И. Марчук. – М. : Наука, 1991. – 276 с.
4. Foryś U. Marchuk's model of immune system dynamics with application to tumour growth / U. Foryś // J. Theor. Med. – 2001. – P. 85-93.

УДК 519.21

А. Я. Білинський,

О. М. Кінаш, канд. фіз.-мат. наук

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ПРО ОЦІНКУ ЙМОВІРНОСТІ БАНКРУТСТВА У ВИПАДКУ ВЕЛИКИХ ВИПЛАТ

Класична нерівність Лундберга, яку можна знайти в усіх базових підручниках з теорії ризику (див. зокрема [1, с.187]), дає експоненційні оцінки для ймовірності банкрутства у випадку, коли індивідуальні розміри виплат мають розподіли, «хвосту» яких спадають з експоненційною швидкістю. Ця умова означає, що великі страхові позови і, відповідно, великі страхові виплати відбуваються рідко (з експоненційно малими ймовірностями). Таку схему називають «моделлю з малими виплатами». Але у багатьох реальних ситуаціях слід врахувати екстремальні події, тому розміри виплат будуть більш адекватно описуватися випадковими величинами, які мають розподіли з так званими «важкими хвостами», до числа яких, зокрема, належать розподіли типу Парето. У цьому випадку сумарні виплати по суті будуть визначатися максимальним індивідуальним позовом. Даний ефект став особливо помітним на початку 2000 р., коли страхові фірми змушені були відшкодувати значні суми за страховими позовами, викликаними катастрофами: землетрусами, пожежами, повеннями, терактами.

Субекспоненційні розподіли відносяться до розподілів з «важкими хвостами».

Припустимо, що функція розподілу $F(x)$, $x \in R_+ = [0, \infty)$ задовольняє умову $F(x) < 1 \quad \forall x \in R_+$.

Означення. Функцію розподілу F назвемо субекспоненційною, якщо для всіх $n \geq 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{n^*}}(x)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{n^*}(x)}{1 - F(x)} = n.$$

Клас субекспоненційних функцій розподілу позначатимемо через S [1, с.189].

Зауважимо, що субекспоненційні розподіли були запропоновані Чистяковим [2] у контексті теорії гілястих процесів. До цього типу розподілів відносяться: Лог-нормальний розподіл, розподіл Парето, розподіл Барра, лог-гамма розподіл, зрізаний стійкий розподіл, розподіл Вейбулла, розподіли Бектандера типу I та типу II.

Для подальшої практичної реалізації підрахунку імовірності банкрутства використаємо наступну теорему (див. зокрема [1, с.197]).

Теорема. Розглянемо модель Крамера-Лундберга за умов $\rho > 0$ та $F_I(x) \in \mathcal{S}$.

Тоді

$$\varphi(u) \sim \rho^{-1} \overline{F_I}(u), \quad u \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Згідно з даною теоремою, у випадку виплат, які мають розподіли із субекспоненційними проінтегрованими «хвостами», імовірність банкрутства допускає просту апроксимацію, що задається формулою (1).

Для перелічених вище розподілів знайдені оцінки ймовірності банкрутства. Так, зокрема для розподілу Бенкандера типу II:

$$1 - F(x) = \exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) x^{-(1-\beta)} \exp\left\{-\frac{\alpha x^\beta}{\beta}\right\}, \quad \alpha, \beta > 0, x > 1,$$

асимптотика ймовірності банкрутства задається наступним співвідношенням:

$$\varphi(u) \sim \rho^{-1} \overline{F_I}(u) \sim \frac{\lambda}{(\alpha c - \lambda(1 + \alpha))} \exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{\alpha u^\beta}{\beta}\right), \quad u \rightarrow \infty.$$

Список використаних джерел:

1. Зінченко Н.М. Математичні методи в теорії ризику : навчальний посібник / Н.М. Зінченко. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2008. – 224 с.
2. Chistyakov V.P. A theorem on sums of irv and its applications to branching processes / V.P. Chistyakov // *Theor. Probability Appl.* – 1969. – №9. – P. 640-648.

УДК 517.95: 519.63

В. О. Богомолов, д-р техн. наук,

В. М. Колодяжний, д-р фіз.-мат. наук

Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків

МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНОЇ СТРУКТУРИ МАТЕРІАЛІВ З ЛІНІЙНИМИ В'ЯЗКО-ПРУЖНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ ПРИ ОПИСУВАННІ ПОВЕДІНКИ РЕАЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

Відомо, що лінійну в'язку-пружність зручно трактувати на основі механічних моделей, які наглядно відтворюють поведінку різних в'язко-пружних матеріалів [1-2]. Модель Максвелла в'язко-пружного тіла явля-

ється комбінацією пружини та в'язкого елемента (демпфера), які з'єднані послідовно [3]. Модель Кельвіна представляється у вигляді паралельного з'єднання таких же елементів. На основі моделей Максвелла та Кельвіна створюються більш складні (багатопараметричні) моделі. Застосовує уваги питання про еквівалентність моделей Максвелла та Кельвіна у одновимірному та тривимірному випадках. Було з'ясовано, що деякі одновимірні моделі за рахунок підбору характеристик елементів являються еквівалентними, тобто співвідношення між напруженням та деформацією, що породжуються цими моделями, однакові. В роботі [2] була запропонована гіпотеза про еквівалентність багатоелементних моделей Максвелла та Кельвіна, а в роботі [1] приведено доведення цього твердження для одновимірних моделей і виписані достатні умови, при яких ця гіпотеза має місце в тривимірному випадку. Приведені формули переходу від моделі одного типу до іншої, тобто за значеннями параметрів однієї моделі знаходити значення параметрів еквівалентної моделі.

Список використаних джерел:

1. Bogomolov V. On equivalence of Kelvin and Maxwell multielement models // V. Bogomolov I. Raznitsyn // Автомобильный транспорт : сб. науч. тр. – 2015. – Вып. 37. – С. 175-181.
2. Богомолов В.А. Об эквивалентности некоторых моделей теории линейной вязко-упругости / В.А. Богомолов, И.Л. Разницын, М.В. Сидоров // Вестник ХНАДУ : сб. науч. тр. – 2013. – Вып. 60. – С. 100-104.
3. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз. – М. : Мир, 1974. – 318 с.

УДК 519.63:532.5

А. Я. Бомба, д-р техн. наук,

А. П. Сафоник

Національний університет водного господарства

та природокористування, м. Рівне

ПРО КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ АЕРОБНОГО ОЧИЩЕННЯ СТИЧНИХ ВОД

Промисловість – один з напрямів індустрії, який інтенсивно розвивається протягом багатьох останніх десятиліть, проте з збільшенням чисельності харчових, мікробіологічних, фармацевтичних та багатьох інших виробництв щоденно зростають обсяги стічних вод, забруднених органічними речовинами, які несуть негативний вплив на екосистеми.

Побутові стічні води містять забруднення мінерального і органічного походження, в той час, як промислові відрізняються, як по складу, так і по концентрації залежно від галузі. Незалежно від типу всі стічні води потребують обов'язкового очищення, оскільки в них містяться забруднюючі речовини, які значно перевищують допустимі концентрації [1].

Для запобігання згубному впливу домішок на довкілля використовують системи магнітних, механічних, біологічних та ін. фільтрів, які забезпечують допустимі показники концентрацій забруднення. Різноманітні ступені забруднення стічних вод і природа їх походження при проектуванні визначають, використовуючи результати вітчизняного та закордонного досвіду [2], необхідний ступінь та тип системи очищення забрудненої води. Одним з найчастіше застосовуваних методів є біологічне очищення [3]. Розрізняють процеси аеробної, в якому додатково вводять кисень і анаеробної очистки.

Розглядався процес аеробної очистки, в якому для стимулювання активності бактерій використовують додаткове введення кисню та підтримання оптимальної температури середовища. При такій очистці стічних вод мікроорганізми розмножуються в активному мулі, поглинаючи забруднення та кисень. Проте з віком поглинаюча здатність бактерій падає і вони осідають у вигляді твердого субстрату, який необхідно вилучати. Підтримуючи сукупність цих параметрів на відповідному рівні можна забезпечити оптимальні умови для ефективної очистки стічних вод [4].

Взаємодію активного мулу та домішок враховує математична модель запропонована в [3], що є досить загальною моделлю, оскільки система взаємодіючих параметрів, яка детально описує технологічний об'єкт управління (рис. 1.) запропонована в [4].

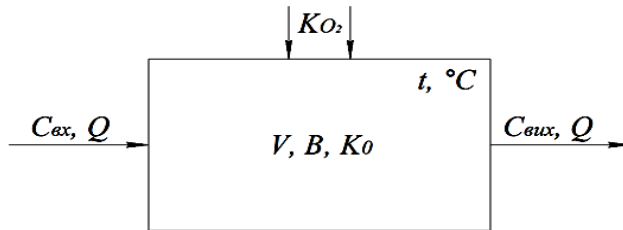


Рис. 1. Структурна схема процесу біологічного очищення
 $(C_{ex}$ – концентрація домішок в стічній воді, яка надходить, мг/л;
 $C_{вых}$ – концентрація забруднення на виході з системи, мг/л;
 V – об'єм реактора m^3 ; Q – витрата води, яка надходить, $m^3/год$;
 B – концентрація активного мулу в реакторі, г/л)

У роботі побудовано математичну модель процесу аеробного очищення стічних вод, що враховує взаємодію бактерій, органічної і біологічно неокиснюваної речовин. Розроблено алгоритм розв'язання відповідної модельної задачі, на основі якого був проведений комп'ютерний експеримент засобами пакету MatLab. Розглянуто вплив основних параметрів на ефективність біологічної очистки. Показано вплив концентрації кисню та активного мулу на якість процесу очищення.

Список використаних джерел:

1. Яковлев С.В. Водоотведение и очистка сточных вод : учеб. для вузов / С.В. Яковлев, Ю.В. Воронов ; под общ. ред. Ю.В. Воронова. – 4-е изд., доп. и перераб. – М. : Изд-во АСВ, 2006. – 702 с.

2. Святенко А.І. Розрахунок процесу біологічного очищення міських стічних вод за допомогою математичних моделей з урахуванням структури потоків / А.І. Святенко, Л.М. Корнійко // Екологічна безпека. – 2009. – №3(7). – С. 77-80.
3. Бомба А.Я. Нелінійні задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін за умов неповних даних : монографія / А.Я. Бомба, В.І. Гаврилюк, А.П. Сафоник, О.А. Фурсачик. – Рівне : НУВГП, 2011. – 276 с.
4. Bomba A. Mathematical modeling of aerobic wastewater treatment in porous medium / A. Bomba, A. Safonyk // Zeszyty Naukowe WSInf. – 2013. – Vol. 12. – №1. – P. 21-29.

УДК 519.63:532.5

А. Я. Бомба, д-р техн. наук,

С. В. Ярошак,

В. І. Бойцов

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕІЗОТЕРМІЧНОЇ БАГАТОФАЗНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ В СИСТЕМІ ПАРАЛЕЛЬНИХ СВЕРДЛОВИН ЗА ТЕХНОЛОГІЄЮ ТЕРМОГРАВІТАЦІЙНОГО ДРЕНАЖУ

Тепловий вплив на пласт змінює основні фільтраційні параметри процесу: в'язкість флюїду, капілярні сили, реологічні властивості агентів, і т.п. [2]. Найбільш ефективними є технології нагнітання в пласт різних робочих агентів – теплоносіїв, з метою підтримки пластового тиску. При цьому за рахунок переносу течією тепла здійснюється розігрів зон пласта між свердловинами в зв'язку з чим знижується в'язкість нафти в цих зонах і, тим самим, покращується гідродинамічний зв'язок між ними [2].

Однією із таких технологій є термогравітаційний дренаж, при застосуванні якої на висоті 4–6 метрів, одна над одною, буриться пара паралельних горизонтальних свердловин – нагнітальна та експлуатаційна. Проте в більшості випадків продуктивний пласт має неоднорідну будову, в результаті чого буріння лише однієї пари свердловин призводить до неконтрольованого виходу теплоносія за межі ділянки, що призводить до збільшення його витрат. Тому доцільним є буріння групи горизонтальних свердловин.

У роботі розвинуто методи [1] комплексного аналізу математичного моделювання ізотермічної багатофазної фільтрації на випадок витіснення нафти теплоносієм з використанням групи паралельних свердловин за технологією термогравітаційного дренажу. На основі методів квазіконформних відображень та поглибленої фіксації характеристик середовища і процесу розроблено числовий алгоритм розв'язування відповідних крайових задач.

Список використаних джерел:

1. Бомба А.Я. Методи комплексного аналізу / А.Я. Бомба, С.С. Каштан, Д.О. Пригорницький, С.В. Ярошак. – Рівне : НУВГП, 2013. – 415 с.
2. Ярошак С.В. Математичне моделювання процесу розробки родовищ нафти з використанням термогравітаційного дренажу / С.В. Ярошак // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Рівне : РДГУ, 2014. – Вип. 11 (20). – С. 115-127.

ДОСЛІДЖЕННЯ АСИМПТОТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ ПІД ДІЄЮ МАЛИХ ВИПАДКОВИХ НЕЛІНІЙНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ЗБУРЕНЬ

У роботі ми розглядаємо поведінку, при $\varepsilon \rightarrow 0$, неавтономної коливної системи третього порядку під дією багатовимірного «білого» шуму, центрованого і нецентрованого Пуассонівських шумів, яка описується стохастичним диференціальним рівнянням виду

$$\begin{aligned} x'''(t) + ax''(t) + b^2 x'(t) + ab^2 x(t) = \\ = \varepsilon^{k_0} f_0(\mu_0 t, x(t), x'(t), x''(t)) + f_\varepsilon(t, x(t), x'(t), x''(t)) \end{aligned}$$

з не випадковими початковими умовами $x(0) = 0$, $x'(0) = x'_0$, $x''(0) = x''_0$, де $\varepsilon > 0$ – це малий параметр, $f_\varepsilon(t, x, x', x'')$ – це випадкова функція, така що

$$\begin{aligned} \int_0^t f_\varepsilon(s, x(s), x'(s), x''(s)) ds = \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i} \int_0^t f_i(\mu_i s, x(s), x'(s), x''(s)) d w_i(s) + \\ + \varepsilon^{k_{m+1}} \int_0^t \int_R f_{m+1}(\mu_{m+1} s, x(s), x'(s), x''(s), z) \tilde{v}_1(ds, dz) + \\ + \varepsilon^{k_{m+2}} \int_0^t \int_R f_{m+2}(\mu_{m+2} s, x(s), x'(s), x''(s), z) v_2(ds, dz), \quad k_i > 0, i = \overline{0, m+2}, \end{aligned}$$

f_i – це не випадкові функції, періодичні по $\mu_i t$, $i = \overline{0, m+2}$ з періодом 2π ; $w_i(t)$, $i = \overline{1, m}$ – це незалежні одновимірні вінерові процеси; $\tilde{v}_1(dt, dz) = v_1(dt, dz) - P_1(dz)dt$, $v_1(dt, dz)$ і $v_2(dt, dz)$ – це незалежні міри Пуассона незалежні від $w_i(t)$, $i = \overline{1, m}$; $Ev_i(dt, dz) = P_i(dz)dt$, $i = 1, 2$, $P_i(A)$, $i = 1, 2$ – це скінченні міри на борелівських множинах $A \in R$; $a > 0, b > 0$. Вивчається нерезонансний випадок $\mu_i \neq \frac{P_i}{q_i}$, $i = \overline{0, m+2}$.

Розглянемо таке представлення процесів:

$$\begin{aligned} x(t) &= C(t)e^{-at} + A_1(t)\cos bt + A_2(t)\sin bt, \\ x'(t) &= -aC(t)e^{-at} - bA_1(t)\sin bt + bA_2(t)\cos bt, \\ x''(t) &= a^2C(t)e^{-at} - b^2A_1(t)\cos bt - b^2A_2(t)\sin bt, \end{aligned}$$

$$N(t) = C(t)e^{-at}.$$

Теорема. Нехай $P_i(R) < \infty$, $i = 1, 2$, $t \in [0, t_0]$, $k = \min(k_0, 2k_1, \dots, 2k_{m+1}, 2k_{m+2})$.

Припустимо, що функції f_i , $i = \overline{0, m+2}$ обмежені і задовольняють умову Ліпшиця відносно x, x', x'' . Якщо задана нижче матриця $\bar{\sigma}^2(A_1, A_2)$ є невід'ємно визначеною, тоді:

1. При $k_0 = 2k_i = k_{m+2}$, $i = \overline{1, m+1}$ випадковий процес $\xi_\varepsilon(t) = \left(N\left(\frac{t}{\varepsilon^k}\right), A_1\left(\frac{t}{\varepsilon^k}\right), A_2\left(\frac{t}{\varepsilon^k}\right) \right)$ слабо збігається, при $\varepsilon \rightarrow 0$, до випадкового процесу $\bar{\xi}(t) = (0, \bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$, де $\bar{A}(t) = (\bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$ – це розв'язок стохастичного диференціального рівняння дифузійного типу

$$d\bar{A}(t) = \bar{a}(\bar{A}(t))dt + \bar{\sigma}(\bar{A}(t))d\bar{w}(t), \bar{A}(0) = (A_1(0), A_2(0)), \quad (1)$$

де $\bar{a}(A_1, A_2) = (\bar{a}^{(1)}(A_1, A_2), \bar{a}^{(2)}(A_1, A_2))$,

$$\bar{a}^{(1)}(A_1, A_2) = -\frac{1}{4\pi^2 b(a^2 + b^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_{(1)}(\psi, A_1, A_2, t)(a \sin \psi + b \cos \psi) d\psi dt,$$

$$\bar{a}^{(2)}(A_1, A_2) = -\frac{1}{4\pi^2 b(a^2 + b^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_{(1)}(\psi, A_1, A_2, t)(a \cos \psi - b \sin \psi) d\psi dt,$$

$$\bar{\sigma}^2(A_1, A_2) = -\frac{1}{4\pi^2 b(a^2 + b^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_{(2)}(\psi, A_1, A_2, t) B(\psi) d\psi dt,$$

$$B(\psi) = (B_{ij}(\psi), i, j = 1, 2), B_{11}(\psi) = (a \sin \psi + b \cos \psi)^2,$$

$$B_{12}(\psi) = B_{21}(\psi) = -(a \sin \psi + b \cos \psi)(a \cos \psi - b \sin \psi),$$

$$B_{22}(\psi) = (a \cos \psi - b \sin \psi)^2,$$

$$\hat{f}_{(1)}(\psi, A_1, A_2, t) = \tilde{f}_0(\psi, 0, A_1, A_2, t) + \int_R \tilde{f}_{m+2}(\psi, 0, A_1, A_2, t, z) P_2(dz)$$

$$\hat{f}_{(2)}(\psi, A_1, A_2, t) = \sum_{i=1}^m \tilde{f}_i^2(\psi, 0, A_1, A_2, t) + \int_R \tilde{f}_{m+1}^2(\psi, 0, A_1, A_2, t, z) P_1(dz)$$

$\bar{w}(t) = (\bar{w}_1(t), \bar{w}_2(t))$, $\bar{w}_i(t)$, $i = 1, 2$ – це незалежні одновимірні вінерові процеси;

$$\tilde{f}_i(\psi, N, A_1, A_2, t) = f_i(\psi, N + A_1 \cos \psi \cos bt + A_2 \sin \psi \sin bt, -aN - bA_1 \sin \psi \sin bt + bA_2 \cos \psi \cos bt, a^2 N - b^2 A_1 \cos \psi \cos bt - b^2 A_2 \sin \psi \sin bt), i = \overline{0, m};$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(\psi, N, A_1, A_2, t, z) = f_i(\psi, N + A_1 \cos \cos bt + A_2 \sin \sin bt, -aN - \\ bA_1 \sin \sin bt + bA_2 \cos \cos bt, a^2N - b^2A_1 \cos \cos bt - b^2A_2 \sin \sin bt, z), \\ i = m + 1, m + 2. \end{aligned}$$

2. Якщо $k < k_0$, тоді в усередненому рівнянні (1) потрібно покласти $\tilde{f}_0 \equiv 0$; якщо $k < 2k_j$ для деякого $1 \leq j \leq m$, тоді в усередненому рівнянні (1) потрібно покласти $\tilde{f}_j \equiv 0$ для всіх таких j ; якщо $k < 2k_{m+1}$, тоді в усередненому рівнянні (1) потрібно покласти $\tilde{f}_{m+1} \equiv 0$; якщо $k < k_{m+2}$, тоді в усередненому рівнянні (1) потрібно покласти $\tilde{f}_{m+2} \equiv 0$

УДК 66.048.3

М. І. Вакулов

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ОПТИМІЗАЦІЯ ОДНОКОЛОННИХ РЕКТИФІКАЦІЙНИХ АПАРАТІВ ДЛЯ ХІМІЧНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Основним завданням автоматичного керування процесом ректифікації є забезпечення заданих показників якості продуктів при мінімальних енергетичних витратах. Застосування ефективних і надійних систем керування дозволяє помітно підвищити якість і збільшити вихід продуктів на діючих установках без збільшення виробничої потужності.

У роботі [1, с.256-262] приведено основні принципи оптимізації об'єкту керування на прикладі розділення металамінів, ряду фтороорганічних продуктів, оцистки фурфуролу, отримання метилового, етилового, пропилових спиртів, розділення продуктів нафтохімії. Все це призводить до підвищення ефективності колони та технологічних режимів, що в свою чергу приводить до росту екстремумів концентрацій. Видалення домішків із зони екстремумів у вигляді бокових отворів відборів збільшує чистоту як кубових продуктів, так і дистилатів.

Інший підхід в оптимізації заключається в використанні пакетів пружних регулярних насадок (РН). При проведенні досліджень у роботі [2 с.179-185] було виявлено, що збільшення кількості точок зрошення з 200..300 на 1 м² зменшує ступінь нерівномірності розподілу рідини на 1 м висоти насадки з 30 до 5 % та збільшує ефективність РН на 10..15%.

Задача на подальші дослідження полягає в синтезі регулятора, що задовольнить заданий показник якості.

Список використаних джерел:

1. Леонтьев В.С. Оптимизация одноколонных ректификационных аппаратов для химических технологий и процессов нефтепереработки / В.С. Леонтьев // Нефтегазовое дело. – 2012. – №2. – С. 255-264.

2. Леонтьев В.С. Инновации в области разработки высокоинтенсивных массообменных устройств для модернизации ректификационных комплексов / В.С. Леонтьев // Нефтегазовое дело. – 2012. – №1. – С. 178-186.

УДК 517.9

Т. І. Вдовенко

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

МОДЕЛЬ СИНГУЛЯРНОГО ЗБУРЕННЯ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ (УПЕРЕДЖЕННЯМ)

Багато публікацій були присвячені конструктивному опису і дослідженню спектральних властивостей формального виразу

$$-\Delta + \alpha\delta(x - x_0), \quad (1)$$

де $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ – оператор Лапласа збурений $\delta(x - x_0)$ -потенціалом, зосередженим у точці $x_0 \in \mathbb{R}$ і $\alpha \in \mathbb{R}$ – константа зв'язку.

Формальний вираз (1) має більш точне визначення сингулярного самоспряженого збурення у вигляді

$$-\tilde{\Delta} := -\Delta + \alpha(\cdot, \delta(x - x_0))\delta(x - x_0), \quad (2)$$

де $\alpha \in \mathbb{R} \cup \infty$, $\delta(x - x_0) \in \mathcal{H}_2 := W_2^{-2}(\mathbb{R}^1)$ – негативний соболівський простір відповідний $W_2^2(\mathbb{R}^1)$ і (\cdot, \cdot) – дуальний для $W_2^2(\mathbb{R}^1)$ і $W_2^{-2}(\mathbb{R}^1)$ скалярний добуток. Визначений в (2) оператор $-\tilde{\Delta}$ діє наступним чином:

$$-\tilde{\Delta}f = -f'' + \alpha f(x_0)\delta(x - x_0) \quad (3)$$

на векторах

$$f \in \mathcal{D}(\tilde{\Delta}) = \{f \in W_2^1(\mathbb{R}) \cap W_2^2(\mathbb{R} \setminus \{x_0\}) \mid f'(x_0 +) - f'(x_0 -) = \alpha f(x_0)\}$$

Розглядається узагальнення (2), (3) вигляду:

$$-\tilde{\Delta}f = -\Delta f + \alpha f(x_1)\delta(x - x_2), x_1 \neq x_2, \alpha \in \mathbb{C},$$

$$\mathcal{D}(\tilde{\Delta}) = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}^1 \setminus \{x_1\}) \mid f(x_1 +) = f(x_1 -), f'(x_1 +) - f'(x_2 -) = \alpha f(x_1)\}. \quad (4)$$

Модель (4) описує взаємодію із запізненням (або упередженням)[1; 2].

Список використаних джерел:

1. Вдовенко Т.І. Сингулярні рангу один несиметричні збурення самоспряженого оператора / Т.І. Вдовенко, М.Є. Дудкін // Зб. пр. Ін-ту матем. НАН України. – 2015. – Т. 12, № 1. – С. 57-73.
2. Vdovenko T. On non symmetric rank one singular perturbations of self ad joint operators / T. Vdovenko, M. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology (to appear).

**І. В. Веригіна,
О. М. Бузинний**

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ПЕРЕРЕЗПОДІЛ РЕСУРСНОГО ПРОСТОРУ МІЖ ПАРОЮ ОПОНЕНТІВ

Постановка задачі. Нехай простір конфлікту $\Omega = [0,1]$ двох проти-діючих сторін, назвемо їх опонентами А та В, є подрібненим на регіони ітераційним способом: $\Omega = \bigcup_{i_1, \dots, i_k=1}^n \Omega_{i_1, \dots, i_k}$, $k=1, 2, \dots$ (k – крок подрібнення). На кроці подрібнення $k=1$ простір поділений на n регіонів, міри Лебега яких q_1, q_2, \dots, q_n , де $q_i > 0$, $\sum_{i=1}^n q_i = 1$. При подальшому подрібненні міра Лебега регіону Ω_{i_1, \dots, i_k} визначається за формулою $|\Omega_{i_1, \dots, i_k}| = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_n^{m_n}$, $m_i \in \{0, 1, \dots, k\}$, $\sum_{i=1}^n m_i = k$, де m_i – кількість індексів в Ω_{i_1, \dots, i_k} рівних i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Стратегія кожного з опонентів А та В фіксується числами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ та $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, де $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i = 1$, $0 < \alpha_i, \beta_i < 1$, $i=1, \dots, n$. На k -тому кроці подрібнення розподіл присутності опонентів А та В на Ω_{i_1, \dots, i_k} задається формулами:

$$p_{i_1, \dots, i_k} = \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n}, \quad r_{i_1, \dots, i_k} = \beta_1^{m_1} \beta_2^{m_2} \dots \beta_n^{m_n}, \quad \text{відповідно.}$$

Якщо $p_{i_1, \dots, i_k} > r_{i_1, \dots, i_k}$, «перемагає» опонент А, позначаємо такий регіон $\Omega_{i_1, \dots, i_k}^A$. Якщо $p_{i_1, \dots, i_k} < r_{i_1, \dots, i_k}$, позначаємо $\Omega_{i_1, \dots, i_k}^B$. Якщо ж $p_{i_1, \dots, i_k} = r_{i_1, \dots, i_k}$, то $\Omega_{i_1, \dots, i_k}^{A=B}$. На кроці подрібнення k міри всіх таких регіонів: $T_k^A = \sum |\Omega_{i_1, \dots, i_k}^A|$, $T_k^B = \sum |\Omega_{i_1, \dots, i_k}^B|$, $T_k^{A=B} = \sum |\Omega_{i_1, \dots, i_k}^{A=B}|$.

Основні теоретичні результати. Розглянемо випадкову величину $\theta_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{k} \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i}$. Її математичне сподівання: $M\{\theta_k\} := \Theta = \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i}$.

Теорема 1 (Про міру Лебега захопленої території як імовірність). $T_k^A = P\{\theta_k > 0\}$, $T_k^B = P\{\theta_k < 0\}$, $T_k^{A=B} = P\{\theta_k = 0\}$.

Теорема 2 (Про граничні значення мір Лебега захоплених територій). Якщо $\Theta > 0$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^A = T^A = 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^B = T^B = 0$. Якщо $\Theta < 0$,

то $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^A = T^A = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^B = T^B = 1$. Якщо $\Theta = 0$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^A = T^A = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k^B = T^B = 1/2$. $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^{A=B} = T^{A=B} = 0$.

Комп'ютерне моделювання задачі. Було створено дві моделі: *явну* та *стохастичну*. У *явній* моделі для $k=1, \dots, 24$ було виконано описане вище подрібнення відрізка $\Omega = [0,1]$. Для кожного регіону $\Omega_{i_1 \dots i_k}$ було знайдено значення мір присутності опонентів та безпосередньо пораховано значення T_k^A , T_k^B та $T_k^{A=B}$.

Стохастичну модель створено, базуючись на твердженні Теорема 1. Для фіксованого значення $k=1, \dots, 400$ моделюємо випадкову послідовність індексів довжиною k : $\{i_1, \dots, i_k\}$. На кожному місці поява індексу i відбувається з імовірністю q_i . Підраховуємо m_i - число появи індексу i та значення величини θ_k . При великій кількості повторів (у моделі до 10^6) знаходимо статистичну ймовірність того, що величина θ_k більше або менше, або дорівнює 0: $P\{\theta_k > 0\} = T_k^A$, $P\{\theta_k < 0\} = T_k^B$, $P\{\theta_k = 0\} = T_k^{A=B}$. Результати роботи описаних моделей можна подати у вигляді таблиць та графіків.

Список використаних джерел:

1. Кошманенко В.Д. Спектральна теорія динамічних систем конфлікту / В.Д. Кошманенко. – К. : Наук. думка, 2016. – 287 с.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения : в 2-х т. / В. Феллер. – М. : Мир, 1984. – Т. 1 – 527 с.

УДК 004.94

А. Ф. Верлань, д-р техн. наук

Інститут проблем моделювання в енергетиці
імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ

ВИТОКИ І СУЧАСНІ РИСИ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Високі темпи розвитку техніки і наукових досліджень нерозривно пов'язані з ефективним застосуванням математичних методів і комп'ютерних засобів. При вирішенні дослідницьких задач необхідно вивчати нові об'єкти і явища з будь-якої природничо-наукової області, встановлювати нові закономірності, описувати раніше невідомі ефекти. При створенні та вдосконаленні технічних виробів, зразків нової техніки необхідно, в більшості випадків, мати у своєму розпорядженні математичні описи технічних елементів, вузлів і блоків з метою подальшого проектування, виготовлення та ефективної експлуатації технічних систем.

Застосування математичних моделей і програмних засобів, що їх реалізують, найбільш ефективно при розробці та функціонуванні автоматизованих і автоматичних систем управління технологічними процесами, багатьма видами виробничих об'єктів, електронними системами, рухомими об'єктами. Сучасні методи і засоби управління в багатьох випадках створюються на основі використання математичних моделей об'єктів управління. Створенню нових виробництв і промислових технологій передує об'ємний цикл досліджень, побудова програмних систем моделювання та проектування. При цьому велике значення мають комп'ютерні засоби, що використовуються в сучасних системах вимірювання, контролю, спостереження та діагностики.

Для більшості зазначених задач головним методом дослідження і отримання результатів є комп'ютерна реалізація математичних моделей. Методи комп'ютерного дослідження включають в себе процедури пошуку структур математичних моделей, оцінки та визначення їх параметрів; забезпечення необхідної точності обчислень, узгодженої з точністю вихідних даних; прийняття рішень при реалізації обчислювальних алгоритмів.

Ускладнення задач динаміки систем і розширення класу досліджуваних динамічних об'єктів обумовлює необхідність подальшого розвитку та удосконалення методів математичного моделювання в задачах динаміки, розробки нових ефективних методів і засобів комп'ютерної реалізації математичних моделей реальних фізичних об'єктів і процесів. При цьому потрібно розв'язання таких проблем як підвищення адекватності математичних моделей і точності їх чисельної реалізації, зменшення розмірності обчислювальних задач, розширення класу алгоритмів моделювання.

Інтенсивний розвиток комп'ютерних і комп'ютеризованих засобів обробки інформації в сучасних технічних системах характеризується постійно зростаючою складністю їх структур і режимів, підвищенням вимог до якості функціонування (швидкодія, точність, надійність, економічність тощо). Ці чинники викликають нові вимоги до методів і засобів математичного моделювання динамічних процесів у вказаних системах, в тому числі необхідність суттєвого врахування розподіленості параметрів елементів, вузлів, блоків та систем в цілому.

У задачах моделювання процесів оперативної обробки інформації в технічних системах, зокрема обробки вимірювальних даних чи сигналів керування, присутні суттєві особливості, такі як функціонування систем в реальному часі, складність процедур відображення змін в об'єкті моделювання, наявність зворотних зв'язків, необхідність розробки або вибору спеціалізованих обчислювальних алгоритмів для створення вбудованих програмних засобів, накопичення похибок процесів обробки сигналів тощо.

Verlan Andriy, Associate Professor,

Sterten Jo, Assistant Professor

Norwegian University of Science and Technology, Norwegian

ALGORITHM FOR MODELLING A DYNAMIC OBJECT BY MEANS OF THE CONVOLUTION OPERATION

Input $x(t)$ and output $y(t)$ signals of a homogeneous dynamic object are related by the convolution operation:

$$y(t) = \int_0^t v(t-s)x(s)ds, \quad (1)$$

where $v(t)$ – is the object's impulsive transition function.

Efficiency of the model (1) application is determined by the method of its numerical realization. Let us consider a possibility of constructing a fast algorithm for convolution calculation.

In connection with an object in the form of inertial component with applying the Laplace transformation to the (1), we obtain:

$$Y(p) = V_L(p)X(p), V_L(p) = \frac{1}{Tp+1},$$

where T – is a time constant.

The following expression corresponds to the kernel in the originals:

$$V(t) = \left(\frac{1}{T}\right)\exp\left(-\frac{t}{T}\right).$$

Let us then discretize time t with step h and turn into the discrete convolution [1]:

$$y(nh) = \sum_{k=0}^n v((n-k)h)x(kh)h.$$

Please note, that the value ds in the continues operator corresponds to the step h in the discrete operator. Thus, $v(nh) = \left(\frac{h}{T}\right)\exp\left(-\left(\frac{nh}{T}\right)\right)$.

As a result of discrete Laplace transformation (z -transformation) we come up the following expression in the form of z -images:

$$Y(z) = V(z)x(z), V(z) = \frac{\left(\frac{h}{T}\right)z}{z-g}, g = \exp\left(-\frac{h}{T}\right).$$

Let us proceed to the discrete originals by means of the shift theorem:

$$Y(z)(z-g) = \left(\frac{h}{T}\right)zx(z),$$

$$Y(z)(1-gz^{-1}) = \left(\frac{h}{T}\right)x(z),$$

$$Y(z) = gz^{-1}Y(z) + \left(\frac{h}{T}\right)x(z),$$

$$y_n = gy_{n1} + \left(\frac{h}{T}\right)x_n, y_n = y(nh), x_n = x(nh).$$

As a result, we obtain a working formula for numerical simulation of the inertial component:

$$y_n = gy_{n1} + (1 - g)x_n.$$

The next value of the discrete output signal is calculated based on the current value of the input signal and one previous value of the output signal. Another words, we have obtained an algorithm for fast and sufficiently precise calculation of the convolution results.

Thereby, we can make a conclusion that instead of using usual operations of integration or differentiation for constructing dynamic models of continuous objects, it is expedient to apply more complex operations in the form of convolutions with exponential-power kernels, which in turn provides increasing accuracy of continues objects' numerical simulation.

List of sources used:

1. Verlan A.F. Constructing recursive digital filter for restoring continues signals / A.F. Verlan, N.A. Maksimovich // USiM. – 1999. – №1. – P. 18-25.

УДК 519.64

Д. А. Верлань

ДП «ЕРУ Трейдінг», м. Київ

АЛГОРИТМИ ОПЕРАТИВНОЇ ОЦІНКИ ТОЧНОСТІ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Алгоритми розв'язання інтегральних рівнянь ґрунтуються на використанні квадратурного методу, тобто на використанні квадратурних формул для виконання операції інтегрування. Важливим питанням при цьому є можливість оцінювання точності отриманих результатів. Причому найбільшу цінність має таке оцінювання, яке дозволяє аналізувати показники точності одночасно з робочим обчислювальним процесом отримання розв'язку. Можливість побудови відповідних алгоритмів аналізу точності обчислювальних процесів розв'язування інтегральних рівнянь розглядається в даній роботі.

Для отримання спрощених способів обчислення похибки розв'язування інтегральних рівнянь методом квадратур розглянемо рівняння Фредгольма II роду

$$y(x) - \int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x), \quad (1)$$

або в операторній формі

$$y - Ay = f, \quad (2)$$

де $y, f \in C[a, b]$, $A: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$. Введемо на $[a, b]$ систему вузлів $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b$ і розглянемо проєкційний оператор

$$P\varphi = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)), \quad (3)$$

де $\varphi(x_i)$ – дискретні значення правої частини.

Використання квадратурної формули еквівалентно застосуванню в \mathfrak{R}^n оператора, що описується матрицею

$$K_\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 K(x_1, x_1) & \mu_1 K(x_1, x_2) & \dots & \mu_1 K(x_1, x_n) \\ \mu_1 K(x_2, x_1) & \mu_1 K(x_2, x_2) & \dots & \mu_1 K(x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1 K(x_n, x_1) & \mu_1 K(x_n, x_2) & \dots & \mu_1 K(x_n, x_n) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

де μ_i – коефіцієнти квадратурних формул.

Розв'язування рівняння (3) методом квадратур зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\bar{y} - K_\mu \bar{y} = Pf \quad (5)$$

щодо наближених значень $\bar{y} \in \mathfrak{R}^n$.

Застосуємо до (2) оператор P . Отримаємо

$$Py - PAy = Pf. \quad (6)$$

Відніmemo з (6) рівняння (5), позначивши при цьому похибку $\Delta y := Py - \bar{y}$:

$$\Delta y - PAy + K_\mu \bar{y} = 0$$

або

$$\Delta y - K_\mu \Delta y = PAy - K_\mu Py. \quad (7)$$

Права частина (7) – це похибка квадратурної формули.

У подальшому будемо припускати, що оператор $I-A$ має обмежений зворотний

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq M \quad (8)$$

і квадратурна формула обрана так, що:

$$\|(I - K_\mu)^{-1}\| \leq \widetilde{M} = M + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (9)$$

Для знаходження наближеного значення похибки розв'язку підставимо в (7) замість істинної похибки квадратурної формули, що дорівнює $PAy - K_\mu Py$, деяку наближену похибку, залежну тільки від дискретних значень функції y . Запишемо її наступним чином: $FPy - K_\mu Py$ і замість

Py підставимо наближене значення \bar{y} , F – деяка матриця перетворень. Отримаємо наближене рівняння для похибки:

$$\tilde{\Delta}y - K_{\mu}\Delta y = F\bar{y} - K_{\mu}\bar{y}. \quad (10)$$

На основі даного підходу отримані алгоритми оперативного обчислення похибки, які забезпечують розробку відповідних програмних засобів.

Список використаних джерел:

1. Верлань Д.А. Оцінка похибок розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерри II-го роду засобами інтегральних нерівностей / Д.А. Верлань, К.С. Чевська // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2013. – Вип. 9. – С. 23-33.

УДК 627.324.2/3:532.546:532.72

А. П. Власюк*, д-р техн наук,

Н. А. Жуковська**,

В. Ю. Федорчук**,

Б. А. Ілляшик**

*Міжнародний економіко-гуманітарний університет
ім. акад. Степана Дем'янчука, м. Рівне,

**Національний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ТЕПЛО-МАСОПЕРЕНОСЕННЯ НА НАПРУЖЕНО- ДЕФОРМОВАНІЙ СТАН ҐРУНТОВОГО МАСИВУ В НЕСТАЦІОНАРНОМУ ВИПАДКУ

Досліджено процес впливу тепло-масоперенесення на напружено-деформований стан ґрунтового масиву товщиною l в нестационарному випадку. Ґрунтовий масив вважається пружно-деформівним в межах лінійної теорії пружності з коефіцієнтами Ламе $\lambda(c, T)$, $\mu(c, T)$. На ґрунт діють сила тяжіння, архімедова та фільтраційна сили.

Математичну модель даної задачі в одновимірному випадку в загальноприйнятих позначеннях можна описати наступною крайовою задачею [1]:

$$(\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial(\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} - \left(\frac{\partial(\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))}{\partial x} T + \right. \\ \left. + (\lambda(c, T) + 2\mu(c, T)) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \alpha_T + X = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \sigma = (\lambda(c, T) + \mu(c, T)) (\varepsilon - \alpha_T \bar{T}), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D(c, T) \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \nu \frac{\partial c}{\partial x} - \gamma(c - C_m) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) = n_p \frac{\partial c}{\partial t}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho c_\rho v \frac{\partial T}{\partial x} = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (4)$$

$$v = -k(c, T) \frac{\partial h}{\partial x} + v_c(c) \frac{\partial c}{\partial x} + v_T \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \operatorname{div} v + \frac{\partial n_p}{\partial t} = 0, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (5)$$

$$l_1 u(0, t) = 0, \quad l_2 u(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (6)$$

$$l_3 c(0, t) = \tilde{C}_1(t), \quad l_4 c(l, t) = \tilde{C}_2(t), \quad t > 0, \quad (7)$$

$$l_5 T(0, t) = \tilde{T}_1(t), \quad l_6 T_2(l, t) = \tilde{T}_2(t), \quad t > 0, \quad (8)$$

$$l_7 h(0, t) = \tilde{H}_1, \quad l_8 h(l, t) = \tilde{H}_2, \quad t > 0, \quad (9)$$

$$U(x, 0) = \tilde{U}_0^{(1)}, \quad \frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = \tilde{U}_0^{(2)}, \quad x \in (0, l), \quad (10)$$

$$c(x, 0) = \tilde{C}_0(x), \quad T(x, 0) = \tilde{T}_0(x), \quad h(x, 0) = \tilde{H}_0(x), \quad x \in (0, l), \quad (11)$$

де $x \in [0; l]$, x – вертикальна координата; $t > 0$, t – час; $U(x, t)$ – зміщення в ґрунті вздовж осі Ox ; $\lambda(c, T)$, $\mu(c, T)$ – коефіцієнти Ламе; $c(x, t)$ – концентрація сольового розчину в ґрунтовому масиві; $T(x, t)$ – температура; X – масова сила; $h(x, t)$ – п'єзومتричний напір; L_i , $i = \overline{1, 6}$ – диференціальні оператори, що задають граничні умови відповідно при $x = 0$ та $x = l$ для зміщень, концентрації солевих розчинів та температури; \tilde{H}_1 , \tilde{H}_2 – напори відповідно на нижній та верхній межах ґрунту; $\tilde{C}_1(t)$, $\tilde{C}_2(t)$, $\tilde{T}_1(t)$, $\tilde{T}_2(t)$, $\tilde{U}_0^{(1)}$, $\tilde{U}_0^{(2)}$, $\tilde{C}_0(x)$, $\tilde{T}_0(x)$, $\tilde{H}_0(x)$ – задані функції.

Отримано чисельний розв'язок крайової задачі (1)-(11). Проаналізовано вплив тепло-масоперенесення на розподіл зміщень, деформацій та напружень.

Список використаних джерел:

1. Власюк А.П. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния основания грунтовой плотины со свободной поверхностью под влиянием тепло- и массопереноса в двумерном случае / А.П. Власюк, Н.А. Жуковская // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, №2. – С. 324-335.

К. П. Газдюк*,
Н. І. Матійчук**,
О. М. Нікітіна***, канд. фіз.-мат. наук

*Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича, м. Чернівці,

**Чернівецька гімназія № 2, м. Чернівці,

***Чернівецький факультет Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці

ВЕБІНАР ЯК ПРОГРЕСУЮЧА ТЕХНОЛОГІЯ ВПРОВАДЖЕННЯ ІНТЕРАКТИВНИХ МЕТОДІВ НАВЧАННЯ В ОСВІТНІЙ ПРОЦЕС

Новою та прогресуючою технологією впровадження інтерактивних методів навчання у сучасний дистанційний освітній процес є вебінари, які реалізуються за допомогою комплексу апаратних засобів, що складається з комп'ютера, пристроїв зв'язку (Веб-камера, система передачі даних, адаптер тощо) та спеціально створених мережевих платформ.

Вебінар є однією з технологій групової взаємодії суб'єктів навчального процесу, яка об'єднує всіх учасників в єдине інформаційне середовище. Використання вебінарів дає позитивний педагогічний ефект за умови ґрунтовних досліджень щодо методик їх застосування у навчальному процесі.

Науково-теоретичні основи та методичні особливості застосування вебінарів у вищій школі досліджували Н. Морзе, О. Ігнатенко, які вважають, що ця технологія є сумісною з багатьма організаційними формами та методами навчання [3]. Математичну модель повнофункціонального вебінару запропонував І. Брунець [1], тоді як М. Морозов [4] розглядав особливості використання мережевих віртуальних середовищ. Різні аспекти використання середовищ проведення вебінарів (віртуальних класів) у навчанні висвітлюються у роботах закордонних авторів (Д. Кеган, С. Швенке, Х. Фрітч, Р. Гріфін та інших) [5; 6].

Вебінар є технологією, яка передбачає проведення інтерактивних занять у віртуальній аудиторії, що надає необхідний функціонал для дистанційного колаборативного навчання [2].

При цьому віртуальна аудиторія (virtual audience software) – це програмне забезпечення, яке моделює середовище реальної навчальної кімнати в мережі Інтернет. Кожен учасник вебінару виконує свою роль, яка визначає інтерфейс віртуального класу і право на використання функцій, що може передаватися іншим учасникам.

Залежно від конкретної програмної платформи вебінар може мати різні можливості та функціональні особливості.

Використання технології вебінарів – новий метод навчання, який спрямований на істотне підвищення якості освіти та одночасно на розвиток інформаційної культури суб'єктів навчального процесу.

Досвід упровадження вебінарів показав, що ця веб-технологія ефективна, має реальні перспективи при застосуванні в навчальному процесі

інтерактивних методів навчання та при підготовці професійних кадрів за широкого застосування спеціально розроблених веб-моделей у навчальному процесі. Вони можуть бути використані для співпраці як з іншими навчальними закладами країни, так і міжнародної співпраці.

Список використаних джерел:

1. Брунець І. Основні критерії вибору мультимедійних колаборативних середовищ з напівжорсткою організацією / І. Брунець // Вісник національного університету «Львівська політехніка»: Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів : Львівська політехніка, 2010. – №663. – С. 150-157.
2. Динцис Д. Методические особенности проведения вебинаров на краткосрочных курсах по методике «in-class» [Електронний ресурс] / Д. Динцис. – Режим доступу: <http://www.trainings.ru/library/articles/?id=13183>.
3. Морзе Н.В. Методичні особливості вебінарів, як інноваційної технології навчання / Н.В. Морзе, О.В. Ігнатенко // Інформаційні технології в освіті : зб. наук. пр. – Херсон : ХДУ, 2010. – Вип. 5. – С. 31-39.
4. Морозов М.Н. Системы совместной учебной деятельности на основе компьютерных сетей [Електронний ресурс] / М.Н. Морозов, А.В. Герасимов, М.Н. Курдюмова // Образовательные технологии и общество. – 2009. – Т. 12, №1. – Режим доступу: <http://ifets.ieee.org/russian/periodical/journal.html>.
5. Hrastinski S. Participating in Synchronous Online Education : PhD dissertation / S. Hrastinski. – Lund University, 2007.
6. Virtual classrooms in educational provision: synchronous elearning systems for european institutions / D. Keegan, E. Schwenke, H. Fritsch and others // Zentrales Institut für Fernstudienforschung. – 2005. – 150 s.

УДК 338.516.54:004.383

Л. Ю. Гальчинський, канд. техн. наук,

А. В. Свиденко

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ПОБУДОВА СИСТЕМИ ПРОГНОЗУВАННЯ ЦІН НА НАФТОПРОДУКТИ НА ОСНОВІ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ З ЗАСТОСУВАННЯМ ПАРАЛЕЛЬНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

Прогнозування цін на ринку нафтопродуктів завжди було і залишається актуальною задачею. Багатьма дослідженнями встановлено, що поведінка цін на ринку нафтопродуктів описується нестационарним часовим рядом, залежним від набору факторів. в першу чергу від ціни сирової нафти на світових біржах та величини обмінного курсу. Разом з тим доведено, що ціна має стаціонарну залежність від певної комбінації вхідних факторів в трактовці Енгла-Грейнджера [1]. Це дає можливість будувати короткострокові прогнози на основі різними методами, зокрема застосовуючи нейронні мережі. Нами запропоновано наступні підходи до вибору вхідних даних та структури мережі:

- використання замість абсолютних значень цін їх прирости;

- використання лінійної функції активації в першому шарі мережі, що дозволяє виділити признаки, необхідних для прийняття рішень, через лінійні комбінації вхідних даних;
- використання мінімум 2-х шарів з гіперболічним тангенсом в якості функцією активації (мінімальна кількість для побудови нелінійного класифікатора, використання гіперболічного тангенсу – для прискорення навчання);
- використання лінійної функції активації в вихідних шарах – для формування відповідного значення зміни.

Було встановлено, що найкращий вигляд нейронної мережі для вирішення поставленої задачі дає є багат шаровий перцептрон з 4-ма прихованими шарами та нейронами з різною функцією активації. Використання різних функцій активації обумовлене природою вхідних та вихідних даних.

Через наявність декількох конкурентів формування необхідних при знаків для корекції цін базується перш за все на лінійних комбінаціях поведінки цін конкурентів з поведінкою власної ціни та роздрібною надбавки. Використання лінійної функції активації в першому шарі дозволяє мережі сформувані відповідні лінійні комбінації вхідних параметрів. Шари 2, 3 представляють собою 2-шаровий перцептрон з гіперболічним тангенсом в як функція активації. В сукупності в цих шарах відбувається виділення ознак та формування відповіді в вигляді набору активних нейронів 3-го шару. На виході цього формується набір реакцій, значення яких закладені в синапси 4-го шару, лінійна функція активації якого агрегує реакції.

Через значну розрідженість даних (зміни цін відбуваються не кожного дня) для попередження перенавчання використовувалась техніка Dropout, яка полягає в частковому обнуленні вагів синапсів при навчанні. Такий підхід призводить до більш рівномірного розподілу знань по всій мережі та покращує її здатність до узагальнення.

Оскільки функції активації всіх нейронів диференційовані, навчання проводилось за допомогою пакетного алгоритму зворотнього поширення помилки. Побудова мережі та її навчання проводилось на власному програмному забезпеченні, написаному на мові C++. Основою для функціонування нейронної мережі складала бібліотека FANN. Основний код бібліотеки працює в одно поточному режимі, тому для прискорення навчання мережі було використане багатопоточне ядро бібліотеки з адаптацією на OpenCL.

Через значний розмір мережі, вхідних даних та необхідності побудови мережі для кожного учасника ринку використовувалась багатопоточна реалізація пакетного алгоритму зворотнього розповсюдження помилки. Звичайно, що це суттєво збільшує кількість обчислень. Тому треба було знайти засоби для прискорення навчання мережі. Таким засобом стало використання паралельних обчислень з використанням графічних прискорювачів. В порівнянні з однопоточною реалізацією процедура навчання однієї мережі на графічному прискорювачу зайняла в 6-10 раз менше часу.

У результаті застосувань таких підходів вдалося побудувати систему прогнозування поведінки роздрібних цін, яка враховує динаміку ціноутворення кожного учасника ринку. В порівнянні зі статистичними ме-

тодами вдалося значно знизити похибку прогнозу. В період нестабільної економічної ситуації похибка прогнозу не перевищує рівня похибки існуючих систем прогнозування.

Список використаних джерел:

1. Galczynski L. Krotkoterminowe prognozy cen na rynku produktow przemyslu naftowego Ukrainy / L. Galczynski // Zeszyty naukowe Uniwersytet Ekonomiczny Poznan. – 2013. – №242. – S. 44-56

UDC 530.182;539.2

V. S. Gerasimchuk*, Doctor of Phys. and Math. Sciences,

I. V. Gerasimchuk**, Cand. of Phys. and Math. Sciences,

A. V. Balykina*

*National Technical University of Ukraine «KPI», Kyiv,

**Institute of Magnetism, Nat. Acad. Sci.

of Ukraine and Min. Edu. Sci. of Ukraine, Kyiv

NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION IN THE SYSTEM WITH TWO INTERFACES. EXACT SOLUTIONS AND NUMERICAL ANALYSIS

The study of the structure and dynamic properties of modulated or layered systems are of great interest now. The simultaneous influence of the layered structure of the medium and the nonlinearity give rise to new physical effects such as spatial localization of nonlinear waves in modulated structures, dependence of the transparency of a medium on the power of the wave, etc.

We study analytically the localized states of nonlinear waves propagated along two coupled identical interfaces in an anharmonic medium. In this study we use a delta-potential approximation for the interfaces. It is shown that the nonlinear states are localized near interfaces but the densities of two fluxes are equal only for small density of the total one. For the total energy of the fluxes bigger than some threshold value, the wave propagates mainly along one of interfaces. All the possible solutions in such a system are found and studied analytically. We demonstrated that the exact solutions are governed by two scaling variables which describe the ratio between the interface distance and the soliton state localization length.

The total number of quasiparticles and the energy of the system are calculated analytically. We obtain a non-monotonous behaviour of these parameters as a function of the distance between the interfaces. The dependences of the main characteristics are obtained numerically. Also, the forces acting between the interfaces are found analytically and the numerical dependence of the force on the distance between the interfaces is presented.

Using the exact solution for the nonlinear Schrödinger equation on intervals of constant potentials opens the possibility to treat various problems of localization using the appropriate boundary conditions. The analysis of the special functions relevant for the actual problem is worked out very well and both analytical and numerical solutions can be obtained.

V.S. Gerasimchuk*, Doctor of Phys. and Math. Sciences,
I. V. Gerasimchuk**, Cand. of Phys. and Math. Sciences,
A. V. Balykina*,
T. L. Rebenchuk*

*National Technical University of Ukraine «KPI», Kyiv,

**Institute of Magnetism, Nat. Acad. Sci.
of Ukraine and Min. Edu. Sci. of Ukraine, Kyiv

STABILITY ANALYSIS OF LOCALIZED SOLUTIONS IN AN ANHARMONIC SYSTEM WITH A NONLINEAR DEFECT

In the framework of the nonlinear Schrödinger equation with δ -functional perturbation containing both linear and nonlinear parts, we study all possible states localized near a nonlinear defect (interface), for different signs of nonlinearity of the medium and for different characters of the interaction of elementary excitations of the system with defect. The quasi-classical interpretation of these nonlinear localized modes in terms of bound states of a large number of elementary excitations is proposed. The regions of existence are determined and the properties of such localized states depending on the character of interaction of elementary excitations with one another and with the defect are studied.

Both analytical and numerical investigations of the stability of all found localized solutions relative to small perturbations of amplitude and phase according to the scheme proposed by Vakhitov and Kolokolov are performed. It is shown that the presence of an attracting defect is a factor stabilizing the localized state. In this case, a localized state exists and is stable both for attraction between quasiparticles, and for their mutual repulsion. In the first case (attraction), the oscillation mode of the soliton gravity center relative to a defect is present in the spectrum of small excitations of the localized state, and the frequency of small oscillations of the state localized on the defect is found. In the second case (mutual repulsion), such a mode does not exist, and we have only the continuous excitation spectrum. In this case, oscillations of the localized flow relatively to a defect layer are absent, although its localization holds. In the case of a repulsive defect layer (in attractive medium) the localized state is unstable: defect deforms and repels it. Also we performed the stability analysis for the cases of the opposite signs of linear and nonlinear parts of the defect.

Thus, we made a complete analysis of stability of a solution localized at a nonlinear defect layer, containing both linear and nonlinear parts, for an arbitrary type of interaction of quasiparticles with one another and with the defect.

В. А. Герус,**Т. В. Кутя,****П. М. Мартинюк,** д-р. техн. наук

Національний університет водного господарства

та природокористування, м. Рівне

ПРО УЗАГАЛЬНЕННЯ РІВНЯННЯ ФІЛЬТРАЦІЇ

Запропоновано методологію виведення рівнянь фільтрації в гетерогенних пористих середовищах з урахуванням довільної скінченної кількості факторів впливу. Методологія полягає в записі рівнянь нерозривності для фаз пористого середовища через повні похідні в часі. Її (методології) елементи висвітлено в роботах [1, 2] на прикладі рівняння фільтраційної консолидації.

Рівняння фільтрації виводиться на основі рівняння нерозривності рідкої фази ґрунту

$$\frac{d(\rho_p \sigma)}{dt} + \nabla \cdot (\rho_p u) = 0, \quad (1)$$

де $\sigma(X, t)$ – пористість пористого середовища; ρ_p – густина порової рідини, яка залежить від концентрації $c(X, t)$ порового розчину та температури $T(X, t)$; u – швидкість фільтрації; $X = (x, y, z)$; t – час. Тоді маємо

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho_p \sigma)}{dt} = \sigma \frac{d\rho_p}{dt} + \rho_p \frac{d\sigma}{dt} = & \left(\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) \sigma + \\ & + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} \right) \rho_p. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут: $N(X, t)$ – концентрація водорозчинних порід в твердій фазі; $s(X, t)$ – концентрація рухомих твердих водонерозчинних частинок.

Враховуючи закон Дарсі на випадок впливу техногенних факторів

$$u = -K_h(c, T, s, \sigma) \nabla h + F_{osm},$$

з (1) та (2) отримуємо

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_p(c, T) K_h(c, T, s, \sigma) \nabla h) = \sigma \left(\frac{\partial \rho_p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \\ - \frac{\rho_p}{\rho_N} \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\rho_p}{\rho_s} \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_p(c, T) F_{osm}), \end{aligned} \quad (3)$$

де $F_{osm} = K_c \nabla c + K_T \nabla T$ – вектор-функція осмотичних впливів; $K_h(c, T, s, \sigma)$, K_c , K_T – коефіцієнти (тензори) фільтрації, хімічного та термічного осмосу відповідно.

Використовуючи аналогічні судження, отримуємо рівняння масоперенесення в рідкій фазі

$$\sigma \left(1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D_c \nabla c) - u \left(1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \nabla c + \frac{c}{\rho_p} \left(\sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \nabla T \right) - \frac{\partial N}{\partial t}, \quad (4)$$

де D_c – коефіцієнт (тензор) коефіцієнтів конвективної дифузії. Рівняння теплоперенесення набуває вигляду

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho_p c_p u \nabla T - \left(\rho_s c_s \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_N c_N \frac{\partial N}{\partial t} \right) T, \quad (5)$$

де λ – коефіцієнт (тензор) коефіцієнтів теплопровідності пористого середовища; c_p , c_s , c_N , c_m – питомі теплоємності відповідних матеріалів (порової рідини, суфозійних частинок, твердих водорозчинних частинок, матеріалу скелету пористого середовища); об'ємна теплоємність $c_T = \rho_p c_p \sigma + \rho_s c_s s + \rho_N c_N N + \rho_m c_m (1 - \sigma_0)$.

Рівняння (3)-(5) і формують основу математичної моделі фільтрації в гетерогенних пористих середовищах з урахуванням впливу фізико-хімічних факторів.

Список використаних джерел:

1. Герус В.А. Узагальнення рівняння консолідації ґрунтів з урахуванням впливу фізико-хімічних факторів / В.А. Герус, П.М. Мартинюк // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2015. – Вип. 27. – С. 41-52.
2. Герус В. Загальна кінематична гранична умова в теорії фільтраційної консолідації ґрунтів / В. Герус, П. Мартинюк, О. Мічута // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2015. – Вип. 22. – С. 23-30.

УДК 519.63.001.57

О. М. Гладка, канд. техн. наук

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

СИНТЕЗ МЕТОДІВ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ТА СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У LEF-ПЛАСТАХ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ

Геологічний пласт є дуже складним об'єктом, який не можна дослідити точно [1]. В той же час, результати, що отримані за допомогою моделей підземної гідрогазодинаміки мають використовуватися в процесі прийняття конкретних технологічних рішень. У зв'язку з недостатністю інформації про поклади з неоднорідною будовою продуктивних пластів при створенні

відповідних математичних моделей родовище (поклад) ділять на ділянки (зони), в межах яких продуктивний пласт можна вважати однорідним з достатнім ступенем точності чи таким, що його основні характеристики є певним чином заданими. Проте ці зони криволінійні, із складною геометрією, що не повністю визначена. Моделювання їх шаруватими структурами не завжди виправдано, оскільки може призводити до значних відхилень розрахованих результатів від реальних даних [2]. Враховуючи сучасні дослідження з підземної гідродинаміки, зокрема, механізми руху флюїдів та техногенно-зумовлені процеси навколосвердловинних деформацій породи, для моделювання зонально-неоднорідних пластів нами введені такі модельні об'єкти як LEF-пласти [3], що визначають нелінійно-шаруваті структури, в яких параметри, котрі характеризують основні фільтраційні властивості середовища (наприклад, коефіцієнт проникності пласта), є кусково-сталіми функціями, залежними від квазіпотенціалу і функції течії, а невідома геометрія зон визначається відповідними еквіпотенціальними лініями і лініями течії, що розраховуються в процесі розв'язання задачі. Такий підхід дозволяє також враховувати зворотній вплив параметрів процесу на вихідні характеристики середовища.

У цій роботі розроблену методику [4-6] моделювання квазіідеальних полів на основі синтезу числових методів комплексного аналізу та сумарних зображень поширено на розв'язання крайових задач для розрахунку фільтраційного режиму у криволінійних LEF-областях з вільною межею – невідомою ділянкою межі, що є кривою депресії.

Розв'язування задачі зводиться до обернення конформного відображення даної фізичної області на відповідну область комплексного потенціалу з невідомим параметром [7]. При цьому, вузли динамічної сітки розраховуються за методом сумарних зображень [8]. В результаті розв'язування задачі автоматично вирішується проблема розрахунку вузлів та побудови динамічної сітки, знаходження невідомої ділянки границі області і координат точки перетину її із заданою ділянкою та значення потенціалу (напору) у цій точці, обчислення повної фільтраційної витрати.

Список використаних джерел:

1. Азиз Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. – М. ; Ижевск : Ин-т комп. исследований, 2004. – 416 с.
2. Ahamadi M. Modeling and Simulation of Compressible Three-Phase Flows in an Oil Reservoir: Case Study of Tsimiroro Madagascar / M. Ahamadi, H.T. Rakotontramiarana // American Journal of Fluid Dynamics. – 2014. – №4(4). – P. 181-193.
3. Бомба А.Я. Обчислювальні технології на основі методів комплексного аналізу та сумарних зображень : [монографія] / А.Я. Бомба, О.М. Гладка, А.П. Кузьменко. – Рівне : ТзОВ «Ассоль», 2016. – 283 с.
4. Бомба А.Я. Методы комплексного анализа идентификации параметров квазиидеальных процессов в нелинейно дwoякocлоистых пористых пластах / А.Я. Бомба, Е.Н. Гладкая // Проблемы управления и информатики. – 2014. – №6. – С. 17-28.
5. Бомба А.Я. Численно-аналитические методы комплексного анализа и расщеплений моделирования одного класса нелинейных квазиидеальных полей / А.Я. Бомба, Е.Н. Гладкая // Компьютерная математика. – 2014. – № 2. – С. 3-13.

6. Бомба А.Я. Задачи ідентифікації параметрів квазіідеальних процесів у нелінійно-шаруватих пористих середовищах / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2014. – Вип. 57, №4. – С. 45-133.
7. Бомба А.Я. Методи комплексного аналізу: Монографія / А.Я. Бомба, С.С. Каштан, Д.О. Пригорницький, С.В. Ярошак – Рівне : НУВГП, 2013. – 415 с.
8. Ляшко И.И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / И.И. Ляшко, И.М. Великоиваненко. – К. : Наукова думка. – 1973. – 264 с.

УДК 371.013

В. Ю. Голобродський,

А. М. Лучко,

В. С. Щирба, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПРОБЛЕМИ ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНО-СТАТИСТИЧНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В ОСВІТНІХ ВИМІРЮВАННЯХ

При проведенні будь-якого психолого-педагогічного дослідження об'єктивність результатів залежить від точності виміру явищ, їх аналізу і методів обробки. Математично-статистичні методи дозволяють систематизувати, науково опрацювати і подати матеріали дослідження, перевірити їх наукову достовірність.

Основними задачами математично-статистичних методів є статистична перевірка гіпотез, оцінка розподілу статистичних ймовірностей та його параметрів, вивчення статистичної залежності, визначення основних числових характеристик випадкових вибірок, якими є: вибіркове середнє, вибіркові дисперсії, стандартне відхилення. Прикладом перевірки таких гіпотез в педагогіці є з'ясування питання про те, наскільки результати педагогічної діяльності відповідають поставленим задачам освітнього процесу. Для вивчення статистичної залежності можуть використовуватися і більш складні методи, зокрема, методи теорії кореляції.

Для успішного та ретельного аналізу наявної інформації про існуючий навчально-виховний процес, а також про перспективи його розвитку виникає потреба в комп'ютерному статистичному аналізі.

На сьогоднішній день нараховується тисячі пакетів, що вирішують завдання статистичного аналізу даних у середовищі операційних систем Windows, DOS, OS/2 і попит на них продовжує зростати. Із зарубіжних пакетів це STATGRAPHICS, SPSS, SYSTAT, BMDP, SAS, CSS, STATISTICA, S-plus, і т.п. З вітчизняних можна назвати такі пакети, як STADIA, ЕВРІСТА, МІЗОЗАВР, ОЛІМП: Стат-Експерт, Статистик-Консультант, САНИ, КЛАС-МАЙСТЕР і т.д. Чимало експериментів цілком успішно можна обробити математично-статистичними засобами електронних таблиць.

Така багатогранність зумовлює досліджувати методологію вибору інструменту дослідження. Сьогодні виникла нагальна необхідність роз-

робки методики застосування математичних і кібернетичних методів у психолого-педагогічних дослідженнях.

На жаль, незважаючи на актуальність, малорозробленим напрямом і сьогодні залишається застосування методів математичної статистики в педагогічних дослідженнях. Слід відзначити, що не зважаючи на зростання актуальності та практичної значущості, недослідженим залишаються, зокрема, особливості та проблеми застосування методів математичної статистики під час проведення соціально-педагогічних досліджень. Особливості процесу виховання вивчити і розкрити нелегко.

На даному етапі розвитку освіти загострюється проблема більш широкого запровадження в педагогічній сфері технологій, які передбачають використання методів математичної статистики для обробки інформації, отриманої в результаті освітньої діяльності.

Як бачимо, сьогодні виникла нагальна необхідність розробки методики застосування математичних і кібернетичних методів у психолого-педагогічних дослідженнях.

Сучасні методи математичної статистики, покликані з максимальною точністю і достовірністю опрацювати результати педагогічних досліджень, передбачають використання як параметричних, так і непараметричних методів, орієнтованих на експериментальні дані освітніх вимірювань.

Список використаних джерел:

1. Ковальчук Ю.О. Теорія освітніх вимірювань / Ю.О. Ковальчук. – Ніжин : Видавець ПП Лисенко М.М., 2012. – 200 с.

УДК 519.63

К. О. Гомон,

І. І. Дияк, канд. фіз.-мат. наук

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

РОЗПАРАЛЕЛЕННЯ ОБЧИСЛЕНЬ У МЕТОДІ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ

Використання математичного моделювання та сучасних інформаційних технологій для оцінки міцності конструкцій з локальними неоднорідностями зумовлює появу розрахункових нелінійних задач великої та надвеликої розмірності. Розв'язування таких задач з використанням програмних комплексів, які реалізують послідовну модель обчислень, вимагає багатогодинних розрахунків. Тому актуальним є застосування паралельних обчислень і сучасних кластерних комплексів. Однак, створення орієнтованих на паралельні обчислення нових програмних комплексів вимагає значних людських і часових затрат. Альтернативним вирішенням цієї проблеми є адаптація до паралельних обчислювальних систем вже існуючого програмного забезпечення з послідовною організацією обчислень [1, 2].

У даній роботі розроблено підхід, який дозволяє провести розпаралелення обчислень, починаючи від задання вхідної інформації для кожної підобласті, побудови сітки методу скінченних або граничних елементів, формування локальних матриць у кожній з підобластей, розв'язування системи лінійних рівнянь на кожній ітерації лінеаризації нелінійної задачі. Основна ідея такого підходу ґрунтується на представленні матриць і векторів для всієї області через локальні матриці та вектори для підобластей з використанням булевих матриць зв'язності, які відображають співвідношення між локальними степенями вільності та незалежними невідомими для всієї області. Таке представлення інформації дозволяє провести локалізацію інформації аж до рівня одного скінченного елемента. Локальні матриці і вектори для підобластей зберігаються на окремих обчислювальних вузлах, а обмін між вузлами здійснюється з використанням інформації про сусідні підобласті. Вся необхідна інформація для організації паралельних обчислень формується аналогічно як у послідовному алгоритмі, оскільки для розв'язування задачі на одному процесорі локально розподілені дані також об'єднуються в глобальну систему рівнянь.

Відомо, що найзатратнішим (як за часом обчислень так і за використовуваною пам'яттю) елементом комп'ютерного моделювання задач міцності конструкцій є розв'язування системи лінійних рівнянь (СЛАР), порядок яких у двомірному випадкові становить $O(10^6)$ з півшириною до $O(10^4)$. Тому ефективність алгоритму розв'язування задачі в цілому визначається розробкою високопродуктивного методу паралельного розв'язування СЛАР. Саме вирішенню цієї проблеми присвячена значна кількість досліджень, в яких здійснюється та чи інша модифікація прямих чи ітераційних методів паралельного розв'язування СЛАР. У даній роботі розроблено алгоритм розв'язування СЛАР на основі паралельного методу спряжених градієнтів (МСГ). Цей алгоритм дозволяє на кожному обчислювальному вузлі зберігати локальні матриці і вектори для кожної підобласті, а також локальні вектори в глобально розподіленому форматі, тобто з вкладом із сусідніх областей. Використовуючи введені матриці зв'язності, глобальну матрицю системи можна виразити через локально розподілені матриці, а глобальні вектори – через глобально розподілені або локально розподілені вектори. Таке представлення інформації дає можливість економно виконувати матрично-векторні операції, необхідні для реалізації МСГ, зокрема множення матриці на вектор виконується локально на кожному вузлі і не вимагає обмінів між процесами, обчислення скалярного добутку векторів здійснюється на кожному вузлі з подальшим сумуванням і розсилкою на всі вузли, аналогічно до скалярного добутку обчислюється норма вектора. Єдиний суттєвий обмін між вузлами виконується при формуванні локальних векторів у глобально розподіленому форматі. Ефективність цієї операції визначається способом розбиття області на підобласті, а також скінченно-елементною сіткою.

Апробація запропонованого підходу до розпаралелення обчислень у методі декомпозиції області проводилась на кластері Львівського націо-

нального університету імені Івана Франка, який складається з 14 обчислювальних вузлів та сервера. Обчислювальні вузли – AMD® Athlon II 2x із частотою 2,9 ГГц, 8 Гб ОЗП, 500 Гб HDD. GPU – Nvidia GTS450 (CUDA 2.1). Операційна система: Scientific Linux 6.2 (ядро 3.6.6). Усі обчислювальні вузли для обміну даними між паралельними процесами користувачських задач об'єднані мережею Ethernet 1 Гбіт/с. Дослідження проводились на одному (послідовний алгоритм), двох і чотирьох вузлах. У залежності від розміру задачі і структури сітки покращення часу обчислень становило від 2-3 до 10-14 разів.

Список використаних джерел:

1. Дияк І. Комп'ютерне моделювання локально нелінійних задач на основі методу декомпозиції області / І. Дияк, І. Макар // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2009. – Вип. 9. – С. 55-66.
2. Хіміч О.М. Технологія грид-обчислень для математичного моделювання процесів в'язкого руйнування / О.М. Хіміч, В.В. Полянко, О.В. Попов, В.А. Сидорук, О.В. Чистяков // Штучний інтелект. – 2014. – №4. – С. 101-110.

УДК 656.2

М. В. Грисенко*, канд. фіз.-мат. наук,
Т. В. Крижановська**, канд. фіз.-мат. наук

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ,

**Державний економіко-технологічний університет транспорту, м. Київ

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ

Багато моделей в фізиці, хімії, соціології, економіці, управлінні та в інших галузях описуються диференціальними рівняннями. Більшість з них не має аналітичного розв'язку, але важливі риси поведінки систем можуть бути досліджені на якісному рівні, без допомоги обчислювальної техніки. Математична модель – це наближене описання якого-небудь класу явищ зовнішнього світу, виражене за допомогою математичної символіки. Зазвичай розрізняють наступні типи математичних моделей. Пряма задача, коли за заданими локальними законами (фізичними, хімічними, біологічними, економічними і т.п.), які діють всередині системи, яку досліджують, потрібно відповісти на питання, як буде вести себе система в цілому. В цьому випадку всі параметри системи відомі і вивчається поведінка моделі в різних умовах. Обернена задача – визначення параметрів моделі шляхом співставлення спостережувальних даних та результатів моделювання. Дуже часто реальні процеси, які відбуваються в об'єкті, який досліджують, невідомі, але є непрямі спостереження. За результатами спостережень намагаються визначити, які процеси керують поведінкою об'єкту, та знаходять параметри, які визначають модель. В оберненій задачі потрібно визначити значення параметрів моделі по ві-

домій поведінці системи як єдиного цілого. Існує зовсім особлива область моделювання, яка має справу з автоматизованими інформаційними системами управління, тобто проектування систем, які знаходяться під управлінням. Математичне моделювання в сучасних наукових дослідженнях є важливою частиною наукової діяльності.

Розглянемо систему двох диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

Обмежимося розглядом тільки стаціонарних (автономних) розв'язків систем, тобто систем, в яких $P(x, y)$ і $Q(x, y)$.

У найпростішому випадку це лінійні функції

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases} \quad (2)$$

Особливими точками системи (1) називають точки, в яких $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ перетворюються одночасно в нуль.

Очевидно, що система (2) має єдину особливу точку $(0, 0)$. Розв'язки системи шукають у вигляді $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$. Підставивши в систему (2) та скоротивши на спільний множник, отримаємо

$$\begin{cases} (a - \lambda)a + bB = 0, \\ cA + (d - \lambda)B = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) має нетривіальний розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулю, тобто отримаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0. \quad (4)$$

Розв'язками рівняння (4) будуть

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a + d}{2}\right)^2 + bc - ad} = \frac{\text{tr}M}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{tr}M}{2}\right)^2 - \det M}.$$

Тут матриця M – матриця коефіцієнтів системи (2). Якщо корені характеристичного рівняння не дорівнюють нулю, то розв'язок системи має вид

$$\begin{cases} x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y = C_1 \chi_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \chi_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \quad (5)$$

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,

В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет

імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЗАДАЧА НАЙКРАЩОГО У РОЗУМІННІ СІМ'Ї ОПУКЛИХ ФУНКЦІЙ РІВНОМІРНОГО ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ, ЗАДАНОЇ НЕТОЧНО ЗА ДОПОМОГОЮ БАГАТОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ

Нехай S – компакт, X – лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел нормований простір, $C(S, X)$ – лінійний над полем дійсних чисел простір однозначних відображень g компакта S в X , неперервних на S , з нормою $\|g\| = \max_{s \in S} \|g(s)\|$, $O(X)$ – сукупність опуклих обмежених замкнених множин простору X , $C(S, O(X))$ – множина багатозначних відображень a компакта S в X таких, що для кожного $s \in S$ $a(s) = O_s \in O(X)$ і які є неперервними на S відносно метрики Хаусдорфа на $O(X)$, $a \in C(S, O(X))$, $V \subset C(S, X)$, $\{p_s\}_{s \in S}$ – сім'я неперервних на X опуклих функцій таких, що відображення $(s, x) \rightarrow S \times X \rightarrow p_s(x)$ півнеперервне зверху на $S \times X$.

Поставимо задачу відшукування величини

$$\alpha_a^*(\{p_s\}_{s \in S}, V) = \inf_{g \in V} \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} p_s(y - g(s)), \quad (1)$$

яку будемо називати задачею найкращого у розумінні сім'ї $\{p_s\}_{s \in S}$ рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно за допомогою неперервного багатозначного відображення a , елементами множини V .

Якщо існує елемент $g^* \in V$ такий, що

$$\alpha_a^*(\{p_s\}_{s \in S}, V) = \inf_{g \in V} \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} p_s(y - g(s)) = \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} p_s(y - g^*(s)),$$

то його будемо називати оптимальним методом найкращого у розумінні сім'ї $\{p_s\}_{s \in S}$ рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно за допомогою неперервного багатозначного відображення a , елементами множини V неперервних однозначних відображень g компакта S в X , або просто екстремальним елементом для величини (1).

Теорема. Нехай $g^* \in V$, $V \in G^*$ – множиною відносно g^* (зірковою відносно g^* , опуклою множиною). Для того, щоб елемент g^* був екстре-

мальним елементом для величини (1) (оптимальним методом відновлення), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $g \in V$ існували елементи

$s_g \in S$, $f_g \in X^*$, $Re f_g \in \text{domp}_{s_g}^*$, для яких виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} & \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} p_s(g^*(s) - y) = \inf_{y \in a(s_g)} p_{s_g}(g^*(s_g) - y) = \\ & = \inf_{y \in a(s_g)} \max_{\substack{f \in X^*, \\ Re f \in \text{domp}_{s_g}^*}} \left(Re f(g^*(s_g)) - Re f(y) - p_{s_g}^*(Re f) \right) = \\ & = \max_{\substack{f \in X^*, \\ Re f \in \text{domp}_{s_g}^*}} \left(Re f(g^*(s_g)) - \sup_{y \in a(s_g)} Re f(y) - p_{s_g}^*(Re f) \right) = \\ & = Re f_g(g^*(s_g)) - \sup_{y \in a(s_g)} Re f_g(y) - p_{s_g}^*(Re f_g), \\ & Re f_g(g(s_g) - g^*(s_g)) \geq 0. \end{aligned}$$

УДК 517.9:004.94

В. А. Гришук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ У ВИГЛЯДІ ІНТЕГРАЛЬНИХ РЯДІВ ВОЛЬТЕРРИ

Основні труднощі при вирішенні задачі ідентифікації нелінійних динамічних систем обумовлені складністю структури самої системи і неповнотою математичного опису про її складові. Наявність ефективних методів та засобів ідентифікації для інтегральних моделей, які є непараметричними, визначає перспективність використання рядів Вольтерри для математичного опису складних нелінійних фізико-технічних систем та об'єктів.

Функціональні ряди Вольтерри досить давно використовуються для математичного моделювання нелінійних динамічних систем. Як і будь-який універсальний апарат, апарат рядів Вольтерри, поряд з очевидними перевагами має і недоліки. Він дає змогу отримати вихідний сигнал $y(t)$ системи, яка трактується як «чорний ящик», на зовнішні впливи $x(t)$ у вигляді інтегро-степеневого ряду:

$$y(t) = \sum_{m=1}^n f_m(t), \quad (1)$$

$$f_m = \int_0^t \dots \int_0^t K_m(s_1, \dots, s_m) \prod_{i=1}^m x(t - s_i) ds_i, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

де $x(t)$, $y(t)$ – відповідно вхідний і вихідний сигнали об’єкта, n – деяке натуральне число, T – час перехідного процесу[1].

Наявність ефективних алгоритмів та засобів ідентифікації ядер Вольтерри визначає перспективність використання (1)-(2) для математичного моделювання складних фізико-технічних систем і об’єктів.

Побудова ядра суттєво відрізняється залежно від обраного методу ідентифікації. Крім того, на метод побудови ядра впливає також порядок ядра Вольтерри та вид тестового сигналу.

На рис. 1. представлена загальна структурна схема, яка використовується при ідентифікації ядра Вольтерри третього порядку на основі параметричного сімейства тестових сигналів для нелінійного динамічного об’єкта [2]. Схема для реалізації алгоритму побудови ядра згідно методу ідентифікації на основі однорідного оператора n -го степеня [3] зображена на рис. 2.

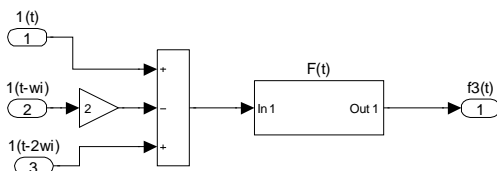


Рис. 1. Структурна схема ідентифікації ядра Вольтерри 3-го порядку

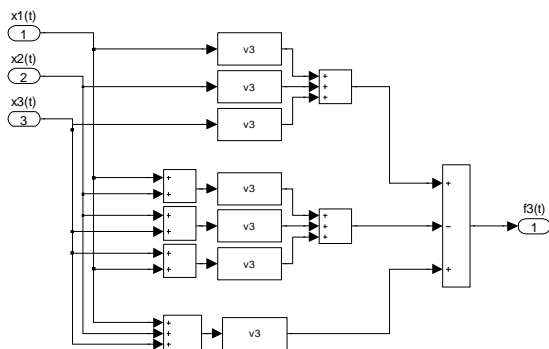


Рис. 2. Структурна схема комп’ютерної реалізації однорідного регулярного оператора 3-го степеня

На основі проведення ряду обчислювальних експериментів виявлено, що метод ідентифікації, що ґрунтується на використанні однорідного оператора n -го степеня є більш точним, ніж метод ідентифікації на основі параметричного сімейства тестових сигналів та при його реалізації зменшуються часові та обчислювальні ресурси.

Список використаних джерел:

1. Сидоров Д.Н. Моделирование нелинейных нестационарных динамических систем рядами Вольтерры: идентификация и приложения / Д.Н. Сидоров // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2000. – Т. 3. – №1(5). – С. 182-194.

2. Гроп Д. Методы идентификации систем / Д. Гроп. – М. : Изд-во «Мир», 1979. – 302 с.
3. Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения / А.В. Манжиров, А.Д. Полянин. – М. : Изд-во «Факториал Пресс», 2000. – 384 с.

УДК 004.55

О. О. Гуцол

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ ВЕРСТКИ СКЛАДНИХ НАУКОВО-ТЕХНІЧНИХ ВИДАНЬ

Сучасні інформаційні системи характеризуються стрімким збільшенням та ускладненням інформаційного забезпечення, і для підтримки таких властивостей інформації, як адекватність, повнота, доступність та ін., потрібно використовувати сучасні інформаційні технології. Впровадження в процес навчання нових методик та ознайомлення студентів з сучасним програмним забезпеченням як частиною інформаційних технологій неодмінно сприятиме їх успішній подальшій професійній діяльності.

Важливою особливістю науково-технічних видань є велика кількість складних нетекстових об'єктів – формул, таблиць, графіків тощо. Підготовка таких видань передбачає повне та коректне відображення всіх складових документа як у друкованому, так і в електронному вигляді. Навчальна дисципліна «Програмні продукти верстки складних науково-технічних видань» складається з лекційних занять та комп'ютерного практикуму, які забезпечені відповідними апаратними та програмними засобами. Використання сучасних комп'ютерних засобів за відповідною методикою сприяє ефективному засвоєнню знань.

В дисципліні передбачені три логічних модулі:

- 1) особливості підготовки складних науково-технічних видань (ознайомлення з програмними продуктами та Державними стандартами, що використовуються при підготовці до друку науково-технічних видань, об'єктами таких видань; розбіжностями між американськими та вітчизняними стандартами підготовки наукових видань);
- 2) візуальні методи підготовки науково-технічних видань (основні елементи наукового видання (статті) засобами Word: використання редактора формул Math Type, оформлення графіків (використання MS Excel), розташування зображень, використання засобів автоматизації – створення стилю, автоматичний збір змісту тощо);
- 3) логічні методи підготовки науково-технічних видань (використання редакційно-видавничої системи Latex для підготовки складних видань: структура вхідного документа; класи, пакети, класові опції; команди і процедури; стиль оформлення сторінки; особливості набору формул та таблиці спецзнаків і математичні шрифти; матриці і таблиці; особливості набору тексту, спеціальні типографські та діакритичні знаки; керування шрифтами, підтримка багатомовності; створення

нових команд і макровизначення; ілюстрації та правила їх оформлення, плаваючі ілюстрації; команди побудови геометричних об'єктів; титул і список літератури; науково-технічний документ в електронному вигляді та зв'язок із Web-сторінкою).

Підготовка документа в системі Latex потребує логічного абстрактного мислення, здатності побудувати алгоритм для відтворення деякого елемента та обрати потрібні засоби для реалізації такого алгоритму. Наприклад, набір формули може виглядати так:

$$D = \frac{C_5^4}{C_{15}^4} = \frac{1}{273}$$

$$d = D[f(x)] = M[f^2(x)] - M^2[f(x)]$$

У документі будуть відтворені формули:

$$(D) = \frac{C_5^4}{C_{15}^4} = \frac{1}{273},$$

$$d = D[f(\xi)] = M[f^2(\xi)] - M^2[f(\xi)].$$

Великою перевагою є те, що і вигляд, і розташування формул при цьому буде саме таким усюди і назавжди.

Виконання відповідних завдань комп'ютерного практикуму і порівняльний аналіз результатів дають можливість студенту оцінити потужність досить поширеної в англomовному світі редакційно-видавничої системи Latex – спеціалізованого програмного продукту для верстки складних видань, із складними символними та графічними об'єктами. Збереження зверстаного документа у форматі PDF дозволяє створити посилання на нього з Web-сторінки і отримати коректне відображення всіх елементів документа, що дозволяє вирішити наявну і актуальну проблему сайтів з науковою тематикою.

Надбані знання і практичні навички відповідають сучасним потребам у підготовці фахівців, здатних професійно оцінити складність тексту наукового видання і обрати програмний засіб верстки для друку або для відображення у електронному вигляді.

УДК 691.327

Я. Г. Двойнос*, канд. техн. наук,

В. Ф. Олексівець*,

В. М. Сасць**

*Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ,

** ТОВ «Перший трубний завод», м. Київ

ТЕХНОЛОГІЯ ФОРМУВАННЯ ТРУБ ВЕЛИКОГО ДІАМЕТРУ З ПОЛІЕТИЛЕНУ

Трубні головки з гвинтовим розподіленням розплаву найбільш поширені при виробництві багат шарових труб, труб великого діаметру, рис. 1. Недоліком конструкції є значний гідравлічний опір.

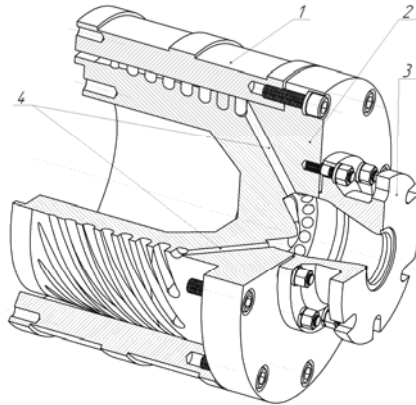


Рис. 1. Конструкція трубної головки з гвинтовим розподілом розплаву.
 1 – корпус головки; 2 – дорнотримач з гвинтовим розташуванням каналів течії розплаву; 3 – адаптер під'єднання головки до екструдера; 4 – радіальні канали живлення гвинтових канавок дорнотримача

Виробництво труб великого діаметру з поліетилену HDPE має наступні технологічні особливості:

1. Розплав рухається повільно, напруження на стінках каналів незначні, проковзування мінімальне, – поверхня стінок каналів має бути гладкою, без різких розширень/звужень.
2. У пристінному шарі розплав поліетилену перебуває тривалий час, при цьому в результаті термічної деструкції виникають вільні радикали, що може привести до утворення "нагару" на стінках, – бажано забезпечити температуру розплаву після екструдера не більше 220°C.
3. При наявності у поліетилені слідів вологи на стінках швидко утворюється шар зшитого поліетилену, – ретельне сушіння поліетилену стає необхідністю.

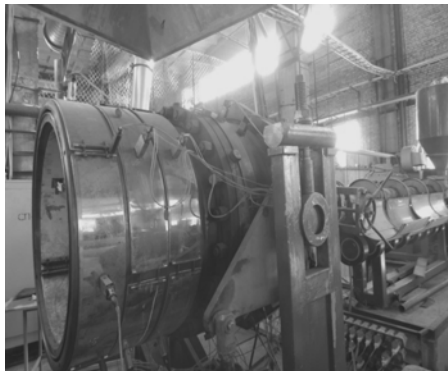


Рис. 2. Технологічні випробування нової марки поліетилену при виробництві труб великого діаметру з SDR>30

За результатами роботи визначені основні технологічні параметри роботи лінії, запропоновані конструктивні рішення. Літературний огляд визначив підходи до моделювання течії розплаву у гвинтових каналах [1].

Висновок: формуюча головка для виробництва труб великих діаметрів є нестандартним обладнанням, конструювання трубної головки вимагає створення нової методики розрахунку з врахуванням технологічних особливостей виробництва.

Список використаних джерел:

1. Fisher P. Troisdorf «Werkzeuggef Mehrschichtrone» KU Kunststoffe plast europe / P. Fisher. – 2001. – Vol. 91.

УДК 517.9:95

М. В. Дідович

Інститут математики НАН України, м. Київ

СИМЕТРІЇ ЛІ ТА ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ ТИПУ КЕЛЛЕР-ЗЕГЕЛЯ

Нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними (ДРЧП) описують низку процесів у фізиці, хімії, біології тощо. Добре відомий принцип лінійних суперпозицій не може бути застосований для побудови точних розв'язків нелінійних ДРЧП, отже класичні методи розв'язання лінійних ДРЧП не можуть бути використані для нелінійних. Це означає, що знаходження точних розв'язків більшості нелінійних ДРЧП вимагає нової методології. Найбільш універсальним методом для побудови точних розв'язків для нелінійних ДРЧП є метод Лі.

Доповідь присвячено дослідженню (1+2)-вимірної спрощеної моделі Келлер-Зегеля. Ця нелінійна модель була запропонована в 1970 році Е. Келлер та Л. Зегелем і використовується для опису низки процесів в біології, екології, медицині тощо.

У роботі знайдено максимальні алгебри симетрій Лі для деяких крайових та початкових задач, які базуються на моделі Келлер-Зегеля. Доведено, що задача Коші у (1+1)-вимірному випадку може бути лінеаризована та точно розв'язана у явному вигляді. Аналогічні результати отриманні для (1+1)-вимірної задачі Ноймана.

Доповідь ґрунтується на роботах [1, 2] та деяких неопублікованих результатах.

Список використаних джерел:

1. Cherniha R.M. Exact solutions of the simplified Keller-Segel model / R.M. Cherniha, M.V. Didovych // Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulations. – 2013. – №18. – S. 2960-2971.
2. Didovych, M.V. A (1+2)-Dimensional Simplified Keller-Segel Model: Lie Symmetry and Exact Solutions / M.V. Didovych // Symmetry. – 2015. – №7(3). – S. 1463-1474.

Є. М. Дінділевич,
А. М. Кух, канд. пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПРОЕКТ ІНФОРМАЦІЙНО-ОСВІТНЬОГО СЕРЕДОВИЩА «СПЕКТР»

Інформаційне освітнє середовище (ІОС) – це інтегроване середовище інформаційно-освітніх ресурсів (електронні бібліотеки, навчальні системи і програми) програмно-технічних і телекомунікаційних засобів, правил їхньої підтримки, адміністрування і використання, що забезпечують єдині технологічні засоби інформації, інформаційну підтримку і організацію навчального процесу, наукових досліджень, професійне консультування [1, с.91].

Для проектування ІОС навчального закладу необхідно розв'язати такі завдання:

- визначити систему завдань, що будуть розв'язуватись в умовах ІОС;
- визначити коло учасників, які будуть працювати в ІОС;
- підібрати програмне забезпечення, яке відповідає педагогічним завданням;
- вибрати найбільш оптимальний технічний зв'язок для створення інфраструктури ІОС;
- продумати форму підготовки та перепідготовки фахівців з роботи у ІОС;
- визначити порядок проведення робіт із створення ІОС, а також всі необхідні фінансово-господарські питання.

Компонентами інформаційно-освітнього середовища є:

1. Інформація загального характеру призначена для всіх користувачів:
 - програми навчання і доступні в їх рамках навчальні матеріали;
 - відомості про цільову аудиторію, тих кого навчають;
 - інформація про організаторів та викладачів;
 - інформація про студентів та випускників освітніх програм (може бути представлена за їх бажанням);
 - новини.
2. Інформація, пов'язана з навчанням студентів:
 - загальні рекомендації до навчання (опис курсу, вимоги до студентів, технічні характеристики обладнання);
 - календарний план та строк навчання;
 - лекційні, допоміжні, довідкові презентаційні та інші освітні матеріали;
 - результати колективного спілкування між студентами й викладачами;
 - довідка про успішність навчання студентів, зауваження викладачів до курсу, що вивчається;
 - інформаційні повідомлення організаторів навчання;

- контактна інформація про викладачів, організаторів навчання та студентів;
 - онлайн-система оцінки знань.
3. Інформація призначена для викладачів і організаторів:
- календарний план занять;
 - статистика відвідин занять студентами;
 - довідка про успішність навчання студентів;
 - інформаційні повідомлення організаторів навчання.

Досвід використання інформаційно-освітнього середовища «ШАНС» для підтримки навчального процесу засвідчив її високу ефективність і трансформувався в проєкт «СПЕКТР» основними розділами якого є медіабібліотека, що включає в себе 18 відеоканалів; бібліотека фахової літератури, тематичні фотоальбоми, схеми, таблиці; інтерактивні моделі; віртуальний практикум; система тестового контролю; збірка навчальних презентацій, сторінка новин.

Вважаємо, що сукупність запропонованих технологічних і методичних рішень дозволяє створити інформаційно-освітнє середовище. А це, у свою чергу, дасть можливість у майбутньому ефективно працювати як інформаційно-освітньому центру дистанційного навчання університету.

Список використаних джерел:

1. Дистанционное обучение для библиотечных и информационных работников. – Режим доступа: <http://www.shpl.ru/inform/projects/DLC/index.shtml>.
2. Merlin Learning Environment. – Режим доступа: <http://www.hull.ac.uk/merlin/>

УДК 004.89

Л. М. Добровська, канд. пед. наук,

І. А. Добровська

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

КЛАСИФІКАТОРИ ЗОБРАЖЕНЬ НА ОСНОВІ ART1-МЕРЕЖІ

Розглянуто модифікований тип конкуруючого навчання, який називають теорією адаптивних резонансів (ART), що був розроблений для вирішення проблеми надання стабільності процесу навчання. Алгоритм навчання ART1-мережі здійснює простий підхід для реалізації асоціативної пам'яті [1]. Г. Карпентер і Ст. Гроссберг показали, що ART1-алгоритм завжди формує стабільні кластери для будь-яких множин вхідних образів [2, стор. 16-2].

Метою роботи є дослідити ART1-мережу як автоасоціативну пам'ять (АП).

Постановка задачі (класифікація зображень у вигляді векторів з елементами «1», «0» за наявності не більше як 40 % шуму). Нехай на основі

множини навчання у вигляді Q пар даних вхід-ціль $\{p_1, t_1\}, \dots, \{p_Q, t_Q\}$ мережа навчається таким чином, що якщо на вхід мережі подається вектор $p = p_q$, то вихід становитиме $y = t_q$ для $q = 1, \dots, Q$. Для збереження множини образів використаємо автоасоціативну пам'ять, для якої виконується така умова: цільовий вектор дорівнює вхідному $t_q = p_q$. Якщо на вхід мережі подаються змінені не більше ніж на 40% образи, то автоасоціативна пам'ять має їх відтворити.

Сформульовану задачу розв'язуємо експериментально в середовищі системи MATLAB.

Висновки. I. Параметр пильності керує грубістю кластеризації: 1) чим ближче значення параметру пильності до одиниці, тим більше формується необхідних кластерів зображень; 2) якщо значення пильності близьке до нуля, то, зазвичай, різні вектори-прототипи з множини навчання, входять до складу однієї групи зображень. II. Під час класифікації зображення за наявності не більше як 40% шуму АРТ1-мережа обирає вектор-прототип, який найбільше корелює із ним. III. АП на основі АРТ1-мережі за ефективністю еквівалентна АП у вигляді одношарового лінійного асоціатора на основі псевдооберненого правила. Вона не здатна виконувати функції інваріантного класифікатора (інваріантні зображення можна фіксувати в АП тільки як відповідні вектори-прототипи).

Планується дослідити ефективність інших класифікаторів зображень на основі НМ.

Список використаних джерел:

1. Добровська Л.М. Теорія та практика нейронних мереж : навч. посіб. / Л.М. Добровська, І.А. Добровська. – К. : Вид-во «Політехніка», 20015. – 396 с.
2. Hagan Martin T. Neural Network Design / T. Martin Hagan, B. Howard Demuth, Mark Beale – USA : Colorado University Bookstore, 2002. – 734 p.

УДК 004.89

Л. М. Добровська, канд. пед. наук,

В. О. Яструб

Національний технічний університет України «КПІ»

БІНАРНИЙ ЛІНІЙНИЙ АВТОАСОЦІАТОР МЕДИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Бінарні асоціативні запам'ятовуючі пристрої – це клас НМ, здатних виконувати асоціативні відображення в просторі бінарних векторів. Алгоритм навчання Хебба та його модифікації здійснюють простий підхід до реалізації асоціативної пам'яті [1].

Метою роботи є розробка ефективного бінарного лінійного автоасоціатора медичних зображень.

Постановка задачі (класифікація зображень у вигляді бінарних векторів з елементами «1», «0» за наявності не більше як 40 % шуму). Не-

хай на основі множини навчання у вигляді Q пар даних вхід-ціль $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{t}_1\}, \dots, \{\mathbf{p}_Q, \mathbf{t}_Q\}$ мережа навчається таким чином, що якщо на вхід мережі подається вектор $\mathbf{p} = \mathbf{p}_q$, то вихід становитиме $\mathbf{y} = \mathbf{t}_q$ для $q = 1, \dots, Q$. Для збереження множини образів використаємо автоасоціативну пам'ять, для якої виконується така умова: цільовий вектор дорівнює вхідному $\mathbf{t}_q = \mathbf{p}_q$. Якщо на вхід мережі подаються змінені не більше ніж на 40% образи, то автоасоціативна пам'ять (АП) має їх відтворити.

Сформульовану задачу розв'язуємо експериментально в середовищі системи MATLAB.

Зазвичай вагу налаштовують таким чином, щоб мінімізувати суму квадратів похибок $F(\mathbf{W})$. Відомо, що вагову матрицю, яка мінімізує функціонал $F(\mathbf{W})$, можна отримати, використовуючи псевдообернене правило $\mathbf{W} = \mathbf{T}\mathbf{P}^+$, де $\mathbf{P}^+ = (\mathbf{P}^T\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}^T$, яке обчислює вагу за один крок, якщо всі пари вхід-ціль відомі і вектори $\mathbf{p}_q, q=1, \dots, Q$ не є ортогональними. Для визначення оберненої матриці, якщо $n > Q$, можна використати *метод обрамлення* [2]. Правило Хебба та його модифікації: $\mathbf{W}^{new} = \mathbf{W}^{old} + \alpha(\mathbf{t}_q - \mathbf{y}_q)\mathbf{p}_q^T$; $\mathbf{W}^{new} = (1 - \alpha)\mathbf{W}^{old} + \alpha\mathbf{t}_q\mathbf{p}_q^T$; $\mathbf{W}^{new} = \mathbf{W}^{old} + (\mathbf{t}_q\mathbf{p}_q^T - \mathbf{I})$, де \mathbf{I} – одинична матриця, використовують для побудови АП, яка гарантує відновлення введеної інформації, якщо вектори $\mathbf{p}_q = [p_1^q \dots p_n^q]^T$ зафіксованих образів є ортогональними.

Висновок. Для бінарного лінійного автоасоціатора, якщо множина вхідних даних, які зображують вектори-прототипи образів, не є ортогональною, правило Хебба та його модифікації можуть породжувати похибки. Тільки псевдообернене правило (з використанням, наприклад, методу обрамлення матриць) дозволяє правильно класифікувати всі зафіксовані в лінійному автоасоціаторі зображення (навіть, якщо на вхід мережі подаються змінені не більше ніж на 40% образи).

Планується дослідити ефективність інших класифікаторів зображень на основі НМ.

Список використаних джерел:

1. Добровська Л.М. Теорія та практика нейронних мереж : навч. посіб. / Л.М. Добровська, І.А. Добровська. – К. : Вид-во «Політехніка», 2015. – 396 с.
2. Фадеев Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры : учебник / Д.К. Фадеев, В.Н. Фадеева. – 1-е изд., стер. – Ленинград : Наука, 1975. – С. 187-192.

Г. О. Доленко*, канд. фіз.-мат. наук,
 Д. О. Мановицька**,
 Ю. І. Галиця*

* Київський національний університет імені Т. Шевченка, м. Київ,

** Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, м. Київ

БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИЙ ПІДХІД ДО ВИБОРУ ПРИРОСТУ ПОТУЖНОСТЕЙ АЛЬТЕРНАТИВНИХ ДЖЕРЕЛ ЕНЕРГІЇ

Перспективним напрямом розвитку енергетики є широке використання альтернативних джерел енергії, серед яких, в першу чергу, розглядають виробництво енергії біомаси, вітру та сонця.

У роботі запропонований багатокритеріальний підхід до вибору структури та приросту потужностей «зеленої енергетики». Розглядаються критерії: мінімізації обсягів інвестицій, витрат на одиницю виробленої енергії, терміну окупності, загальної вартості обслуговування, ризиків, кількості викидів вуглекислого газу, максимізації надійності системи, термічного коефіцієнта корисної дії, виробництва енергії, утилізації [2].

Позначимо: $M_w(t)$, $M_s(t)$ та $M_b(t)$ – потенціал (максимально можлива накопичена встановлена потужність) вітрової, сонячної та енергії біомаси відповідно у t -тому році (МВт); $N_w(t)$, $N_s(t)$ та $N_b(t)$ – сукупна встановлена потужність вітрової, сонячної та енергії біомаси, відповідно, у t -тому році (МВт); $C_w(t)$, $C_s(t)$ та $C_b(t)$ – собівартість одиниці продукції вітрової, сонячної та енергії біомаси, відповідно, у t -тому році (у. о./МВт); $G(t)$ – ВВП країни у t -тому році; $I(t)$ – сумарна встановлена потужність у t -тому році (надається з прогнозів міжнародного енергетичного агентства); $C_{w,\min}$, $C_{s,\min}$ та $C_{b,\min}$ – мінімальні собівартості одиниці продукції вітрової, сонячної та енергії біомаси, відповідно, у t -тому році (у. о./МВт); γ – максимальна частка ВВП, що може бути використана для інвестицій у альтернативні джерела енергії; μ – максимальна частка енергії, виробленої з відновлюваних джерел; $\varphi_w(t)$, $\varphi_s(t)$ та $\varphi_b(t)$ – коефіцієнт еластичності сукупної встановленої потужності вітрової, сонячної та енергії біомаси, відповідно, за собівартістю (отримується з моделі кривої досвіду [1]); $A_w(t)$, $A_s(t)$ та $A_b(t)$ – додана потужність вітрової, сонячної та енергії біомаси, відповідно, у t -тому році (МВт).

Для побудови області допустимих розв'язків задачі використаємо обмеження з моделі – Renewable Power Optimization Model [1]:

$$C_w(t)A_w(t) + C_s(t)A_s(t) + C_b(t)A_b(t) \leq \gamma G(t)$$

$$N_w(t) + N_s(t) + N_b(t) \leq \mu I(t)$$

$$N_w(t) = N_w(t-1) + A_w(t) \leq M_w(t)$$

$$\begin{aligned}
N_s(t) &= N_s(t-1) + A_s(t) \leq M_s(t) \\
N_b(t) &= N_b(t-1) + A_b(t) \leq M_b(t) \\
C_w(t) &= C_{w,\min} + C_w(t_0)N_w(t-t_0)^{\theta_w} \\
C_s(t) &= C_{s,\min} + C_s(t_0)N_s(t-t_0)^{\theta_s} \\
C_b(t) &= C_{b,\min} + C_b(t_0)N_b(t-t_0)^{\theta_b} \\
A_w(t) &\geq 0, A_s(t) \geq 0, A_b(t) \geq 0, t = t_0, \dots, T.
\end{aligned}$$

Для розв'язання сформульованої задачі багатокритеріальної оптимізації пропонується використовувати метод обмежень [2].

Список використаних джерел:

1. Cong R.-G. How to Develop Renewable Power in China? A Cost-Effective Perspective / R.-G. Cong, S. Shen // The Scientific World Journal. – 2014.
2. Доленко Г.О. Системна оптимізація. Прикладні задачі : навч.-метод. посіб. / Г.О. Доленко. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2014. – 67 с.

УДК 517.9;519.21

Н. П. Донець,

В. К. Ясинський, д-р фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

На ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} \equiv \{\mathcal{F}_t, t \geq -\tau, \tau > 0\}, \mathbb{P})$ розглянемо задачу Коші для лінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння з частинними похідними [1] (ЛСДРР ЧП)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \left[Q \left(A(\xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \right] = Q \left(B_1(\xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) + \\
&+ Q \left(B_2(\xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t - \tau, x, \omega) + \frac{\partial}{\partial t} Q \left(C_1(\xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \times (1) \\
&\times \frac{dw_1(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} Q \left(C_2(\xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t - \tau, x, \omega) \frac{dw_2(t)}{dt}, \tau > 0,
\end{aligned}$$

за початковими умовами

$$Q \left(A(\xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \Big|_{-\tau \leq t \leq 0} = [Qu]_{[-\tau, 0]}. \quad (2)$$

Тут $Q(A(\xi(t)), q, p) := \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{kj}(\xi(t)) q^k p^j$ (оператор Q діє на матриці $B_i(\xi(t)), C_i(\xi(t)), i=1,2$, аналогічно [1]); $A(\xi(t)), B_i(\xi(t)), C_i(\xi(t)), i=1,2$, – матриці розмірності $n \times m$, елементи яких є берівськими функціями, які залежать від марковського процесу $\xi(t) := \xi(t, \omega) \in \mathbb{Y}$, $t \geq -\tau$, $\omega \in \Omega$, з неперервними справа реалізаціями на компактному фазовому просторі \mathbb{Y} .

Нехай $T > 0$, $w_j(t) := w_j(t, \omega) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \{1, 2\}$, – стандартні вінерові процеси, які незалежні між собою, а $\frac{dw_j(t)}{dt}$ – «білий шум».

Перейдемо від загального ЛСДРП ЧП (1), (2) до стохастичного диференціально-різницевого рівняння (СДРР) гіперболічного типу.

Нехай оператор $Q(A(\xi(t)), q, p) := \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m a_{kj}(\xi(t)) q^k p^j$.

Зауважимо, що розмірність матриці тепер буде $(n+1) \times (m+1)$, а індекси змінюються від 0 до n та m відповідно.

Розглядаючи частинні випадки оператора Q при різних значеннях індексів n та m отримуємо таке СДРР:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(a_{00} u^2(t, x, \omega) + a_{01} \frac{\partial u(t, x, \omega)}{\partial x} u(t, x, \omega) \right) = \\ & = b_{00}^{(1)} u^2(t, x, \omega) + b_{01}^{(1)} u(t, x, \omega) \frac{\partial u(t, x, \omega)}{\partial x} + \\ & + b_{00}^{(2)} u^2(t - \tau, x, \omega) + b_{01}^{(2)} u(t - \tau, x, \omega) \frac{\partial u(t - \tau, x, \omega)}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left(c_{00}^{(1)} u^2(t, x, \omega) + c_{01}^{(1)} u(t, x, \omega) \frac{\partial u(t, x, \omega)}{\partial x} \right) \frac{dw_1(t)}{dt} + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left(c_{00}^{(2)} u^2(t - \tau, x, \omega) + c_{01}^{(2)} u(t - \tau, x, \omega) \frac{\partial u(t - \tau, x, \omega)}{\partial x} \right) \frac{dw_2(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (3)$$

Якщо $a_{01}, c_{01}^{(1)}, c_{01}^{(2)} \neq 0$, то $D > 0$ – матимемо гіперболічне рівняння.

Розглядаємо задачу про існування сильного розв'язку в середньому квадратичному стохастичній задачі Коші (3), (2). Застосувавши перетворення Фур'є за змінною $x \in \mathbb{R}$ до лівої і правої частини задачі (3), (2), отримуємо задачу для лінійного СДРР, яке вже не містить похідних за x для випадкової функції $v(t, \sigma)$. Отриману задачу досліджуємо на асимптотичну стійкість.

Список використаних джерел:

1. Бодрик Н.П. Дослідження властивостей сильного розв'язку задачі Коші лінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння з частинними похідними і марковськими параметрами / Н.П. Бодрик, В.К. Ясинський // Науковий вісник Чернівецького університету : зб. наук. праць. – Чернівці : Рута, 2011. – Т.1, №1-2. Математика. – С. 158-167

УДК 517.929

А. Б. Дорош,

І. М. Черевко, д-р. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ ДО ПОБУДОВИ НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ІНТЕГРО- ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Метод сплайн-колокацій для диференціальних рівнянь із запізненням розглядався в роботах [1-3]. Застосування апарату сплайн-функцій дозволяє побудувати алгоритми, які прості для реалізації і в той же час придатні для розв'язування широкого класу крайових задач. У даній роботі побудовано і обґрунтовано наближений метод розв'язання крайової задачі для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу.

Розглядається крайова задача

$$y''(x) = f(x, [y(x)]) + \int_a^b g(x, t, [g(t)]) dt, t \in [a; b], \quad (1)$$

$$y^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(x), p = 0, 1, 2, x \in [a^*; a], y(b) = \gamma, \quad (2)$$

де

$$[y(x)] = (y(x), y(x - \tau_0(x)), y'(x), y'(x - \tau_1(x)), y''(x - \tau_2(x))),$$

$$a^* = \min \left\{ \min_{x \in [a; b]} (x - \tau_0(x)), \min_{x \in [a; b]} (x - \tau_1(x)), \min_{x \in [a; b]} (x - \tau_2(x)) \right\},$$

$\tau_0(x), \tau_1(x), \tau_2(x) \geq 0$ – скалярні неперервні функції на $[a; b]$,

$$\varphi(x) \in C^2[a^*; a], \gamma \in R.$$

Нехай запізнення $\tau_1(x), \tau_2(x)$ – такі функції, що скінченними є множини точок

$$E_1 = \{x_i \in [a; b]: x_i - \tau_1(x_i) = a, i = 1, 2, \dots\},$$

$$E_2 = \{x_0 = a, x_{j+1} - \tau_2(x_{j+1}) = x_j, j = 1, 2, \dots\}.$$

Занумеруємо точки множин E_1 та E_2 за їхнім зростанням і введемо позначення

$$\delta_1 = [a; x_1], \delta_2 = [x_1; x_2], \dots, \delta_{l+1} = [x_l; b],$$

$$B\left([a^*; b]\right) = \left\{ y(x) : y \in C[a^*; b] \cap C^1[a; b] \cap C^2[a^*; a] \cap \left(\bigcup_{j=1}^{l+1} C^2(\delta_j) \right) \right\}.$$

Розв'язком задачі (1)-(2) будемо вважати таку функцію $y(x) \in B\left([a^*; b]\right)$, яка задовольняє рівняння (1) на $[a; b]$ (за винятком точок множин E_1, E_2 і крайові умови (2)).

У роботі одержано коефіцієнтні достатні умови, при виконанні яких існує єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(2) із класу функцій $B\left([a^*; b]\right)$.

Задамо на $[a; b]$ сітку $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ так, щоб $E_1, E_2 \subset \Delta$. Наближений розв'язок задачі (1)-(2) будемо у вигляді ітераційної послідовності інтерполяційних кубічних сплайнів $S_k(y, x)$ дефекту 2 на сітці Δ [1], що належить $B\left([a^*; b]\right)$.

Встановлено достатні умови збіжності послідовності сплайнів $S_k(y, x)$ до розв'язку задачі (1)-(2). Числові експерименти для модельних тестових прикладів підтверджують ефективність запропонованої схеми наближення розв'язку крайової задачі (1)-(2).

Список використаних джерел:

1. Nikolova T.S. Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary problems for a class of functional-differential equations / T.S. Nikolova, D.D. Vainov // Yokohama Math. J. – 1981. – №1. – P. 108-122.
2. Черевко І.М. Чисельний метод розв'язання крайових задач для інтегродиференціальних рівнянь із аргументом, що відхиляється / І.М. Черевко, І.В. Якімов // Укр. мат. журн. – 1989. – №6. – С. 854-860.
3. Дорош А.Б. Застосування сплайн-функцій для апроксимації розв'язків лінійних крайових задач із запізненням / А.Б. Дорош, І.М. Черевко // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. – 2014. – №10. – С. 80-88.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ЗМІНИ ВАЛОВИХ ІНВЕСТИЦІЙ НА БАЗІ ЛОГІСТИЧНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ ДЕТЕРМІНОВАНОГО ХАОСУ

Останнім часом відбулись суттєві зміни в парадигмі математичного моделювання фінансово-економічних систем. Вони пов'язані з відмовою від так званої «лінійної парадигми» і переходу до нелінійних моделей. Більше того, спостерігається велика зацікавленість у дослідженнях, пов'язаних з застосуванням у фінансово-математичному моделюванні теорії детермінованого хаосу [2, 4, 5].

Одним із прикладів використання послідовностей детермінованого хаосу в економіці є моделювання процесу надходження інвестицій.

Детермінована модель, що описує процес зміни валових інвестицій I_t записується у наступному вигляді [1]:

$$I_t = \lambda_t (K_t^* - K_t) + \delta K_{t-1}, \quad (1)$$

де чисті основні фонди станом на кінець часового періоду $t - 1$ дорівнюють K_{t-1} , K_t^* – бажаний (очікуваний) обсяг основних фондів на кінець поточного часового періоду, амортизаційні відрахування дорівнюють δK_{t-1} , λ_t – швидкість настройки K_{t-1} на K_t^* . Якщо λ_t дорівнює нулю, то K буде фіксованою величиною і тоді не буде чистих інвестицій, які скорочують розрив між K^* і K ; в той же час, якщо λ_t буде дорівнює одиниці, то цей розрив буде повністю подоланий протягом одного періоду часу, тобто настройка буде здійснена негайно.

В економічній літературі [1] для того, щоб оцінити параметри економетричної моделі типу (1), в його праву частину вводять випадковий член збурення і специфікують природу (тип) його розподілу. На жаль, порівняно мала увага приділялася джерелам цих збурень. Звичайно, можна стверджувати, що інвестиції випадкові за своєю природою, оскільки засновані на очікуваннях окремих людей, а ці очікування в свою чергу можуть бути гетерогенними і випадковими.

Деякі аналітики вважають, що випадковий член – це збурення, яке є наслідком помилки у вимірюваннях. Зауважте, що якщо залежна змінна в рівнянні (1) (тобто валові інвестиції I_t) виміряна з випадковою помилкою, то тоді те ж саме можна сказати і про лагові значення основних фондів K_{t-1} , так як воно являє собою зважену суму попередніх валових інвестиційних витрат. Звідси випливає, що якщо джерело випадкового члена збурення в правій частині рівняння (1) специфіковане саме таким чином (тобто з допомогою помилок у вимірі I_t), то для того, щоб отримати оцінки параметрів цього рівняння, слід застосовувати методи, відмінні від звичайного МНК, а саме: методи, що враховують наявність помилок у вимірах регресорів. Результат

сукупного впливу цих параметрів на загальний обсяг інвестицій може бути описаний випадковою величиною, що підкоряється нормальному розподілу з середнім значенням a й дисперсією σ^2 (що реалізується додаванням в праву частину рівняння (1) нормального розподіленого випадкового залишку із середнім значенням нуль і дисперсією σ^2 , тобто «білого шуму»).

Більше того, оскільки рішення з приводу інвестиційних витрат є складним, комплексним, то досить ймовірно, що важливі змінні в простих рівняннях типу (1) можуть бути помилково опущені, і не включені в правій частині. Якщо ці опущені змінні не корелюють з включеними в рівняння регресорами, але володіють деякою систематичною поведінкою в часі, то їх вплив може бути частково врахований введенням в праву частину випадкового збурення («залишку») з авторегресійними властивостями.

Зазвичай при проведенні емпіричного аналізу сукупних інвестицій в рівняння (1) додається випадкове збурення, що описується у формі авторегресії першого порядку:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad t = 2, \dots, T, \quad (2)$$

де $|\rho| < 1$ і передбачається, що випадкові залишки ε_t ($t = 2, \dots, T$) незалежні і однаково нормально розподілені із середнім 0 і дисперсією σ^2 . У деяких випадках, залежно від періодичності надходження даних (щорічно, щоквартально, щомісячно і т.д.), замість авторегресії першого порядку може використовуватися авторегресія більш високого порядку.

Отже, за класичним підходом основним «будівним блоком» при моделюванні економетричних моделей є так званий «білий шум», тобто випадкова послідовність (процес) e_n з нульовим математичним сподіванням та одиничною дисперсією, члени якого є некорельованими.

Ми пропонуємо джерело збурення подати у вигляді одного із загальновідомих представників хаотичних функцій, а саме логістичного відображення, яке задається наступним чином [2-4]:

$$\begin{cases} \varepsilon_{n+1} = \alpha \varepsilon_n (1 - \varepsilon_n), \alpha \geq 4, n \geq 0, \\ \varepsilon_0 \in (0, 1). \end{cases}$$

Тоді наша модель процесу зміни валових інвестицій I_t матиме вигляд:

$$\begin{cases} I_t = \lambda_t (K_t^* - K_t) + \delta K_{t-1} + u_t, \\ u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_{t+1} = \alpha \varepsilon_t (1 - \varepsilon_t), \alpha \geq 4, n \geq 0, \\ \varepsilon_0 \in (0, 1). \end{cases}$$

У статті обґрунтовується доцільність моделювання збурень у вигляді логістичної послідовності, досліджується адекватність такої моделі та можливість і якість прогнозування.

Список використаних джерел:

1. Берндт Т. Практика економетрики: классика и современность / Т. Берндт ; пер. с англ. под ред. проф. С.А. Айвазяна. – М. : ЮНИТИ-ДДНА, 2005. – 863 с.

2. Ширяев А.Н. Основы финансовой математики / А.Н. Ширяев. – М., 2001. – Т. 1. – 655 с.
3. Дмитрук С.В. Побудова моделей часових рядів на базі хаотичних функцій / С.В. Дмитрук, Н.Ю. Шестюк, Д.А. Шабалін // Моделювання та інформаційні системи в економіці : зб. наук. праць. – К. : КНЕУ, 2013. – Вип. 88. – С. 11-21.
4. Brock W.A. Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability / W.A. Brock. D. Hsieh // MIT Press. – 1991.
5. LeBaron B. A Fast Algorithm for the BDS Statistic / B. LeBaron // Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics. – 1997. – Vol. 2. – №2. – P. 53-59.

УДК 519.2

**В. В. Дроздова,
В. С. Сандей**

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ВИКОРИСТАННЯ КВАТЕРНІОНІВ ДЛЯ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ КЕРОВАНИХ ЛА ТА ОЦІНЮВАННЯ ЗБУРЕНЬ АЕРОДИНАМІЧНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Досліджуються різні способи перетворення координатних систем, у яких зручно описуються диференціальні рівняння просторового руху ЛА – із використанням матриць напрямних косинусів, кутів Ейлера, перетворення кутових швидкостей та кватерніонів. Будується математична модель динаміки ЛА із використанням кватерніона, що дозволило уникнути проблеми виродженості керованої системи, що виникає на вертикальному польоті при використанні кутів Ейлера. Кватерніони виявилися зручним засобом для обчислення кутової орієнтації ЛА у трьохмірному просторі. Кінематичні параметри Родрига-Гамільтона не вироджуються при будь-якій кутовій орієнтації ЛА і тому дають можливість ефективно обчислювати кутові повороти ЛА. Використання кватерніонів дозволило відображати в єдиній векторній формі нескінченно малі обертання, що визначають вектор кутової швидкості, та довільні перетворення, які є кінцевими поворотами. Кватерніони дають зручний апарат для дослідження кінематики ЛА. Це пояснюється дуалізмом кватерніонних одиниць, які являються, з одного боку, ортами реального тривимірного простору, а з іншого – операторами перетворення. Основна перевага використання кватерніонів полягає в тому, що необхідно лише чотири диференціальні рівняння, щоб знайти нову матрицю перетворення. У порівнянні із використанням кутів Ейлера, алгебра кватерніонів значно спростила перетворення систем координат.

Досліджуються збурення аеродинамічних сил, що залежить, зокрема, від густини, від тиску та температури атмосфери. У тропосфері із зростанням висоти температура падає до мінус 5-6°C. У стратосфері вітри можуть досягати швидкостей понад 500 км/год, а у мезосфері температура зростає і різко зменшується густина повітря. Досліджується вплив атмосферних збурень на траєкторію польоту ЛА.

ДОЦІЛЬНІСТЬ ВПРОВАДЖЕННЯ ДИСТАНЦІЙНОЇ ОСВІТИ В УКРАЇНСЬКІ ВИЩІ НАВЧАЛЬНІ ЗАКЛАДИ

Дистанційна освіта та масові онлайн-курси (Massive Open Online Courses) вже впроваджені в багатьох закордонних освітніх закладах і користуються широкою популярністю [1]. Як новий етап у підсиленні навчального процесу і підвищення його якості, змішана форма освіти необхідна й українським вищим навчальним закладам. Визначимо необхідність у впровадженні дистанційної освіти у навчальний процес навчальних закладів України.

Дистанційне навчання в освітніх закладах різних країнах світу – явище звичне. Ще у 1969 році в Англії був відкритий перший в світі університет дистанційної освіти. У 1974 і 1984 роках відповідно були введені такі програми в університетах Німеччини та США [2]. Системи дистанційного навчання поділяються на наступні категорії: повноцінний курс навчання за програмою бакалавра або магістра; масові онлайн-курси, зібрані на одній платформі від різних викладачів університетів світу [3].

Існує ряд вищих навчальних закладів (ВНЗ) таких як Національний Університет Каліфорнії, університет ім. Гульєльмо Маркони Італії, Оксфордський університет, Бостонський університет та багато інших, які надають можливість студентам з будь-якого куточка світу отримати диплом про вищу освіту онлайн. Такі програми підготовки тривають 2-4 роки в залежності від обраного ступеня [4].

Організація дистанційного навчання передбачає комунікацію викладачів та студентів у режимі онлайн. Основні компоненти такого навчання – це лекції, презентації та тести. Лекції та практичні заняття до навчальних дисциплін можуть проводитися як у аудиторному режимі, так і у режимі онлайн. Таким чином, усі навчально-методичні матеріали знаходяться у вільному доступі для студентів.

Також існують платформи з дистанційними курсами. Багато викладачів створюють та розміщують матеріали й відео-лекції свого курсу на сайтах для того, щоб він був доступний для вивчення великої кількості студентів. Такі курси є безкоштовними, а тому широко доступними. Після закінчення навчання випускники зазвичай отримують сертифікати. Прикладами таких онлайн-курсів є Coursera, EdX, Khan Academy та інші.

У США результатом інтеграції дистанційної освіти у навчальні програми слало покращення результатів навчання на 35% [5]. Вчені проаналізували результати тестів, які здали студенти до і після проходження одного з курсів EdX, і аналогічні данні по ефективності звичайних програм. В середньому студенти показали поліпшення рівня знань на 0,31 бал за нормалізованою шкалою, що на 0,8 більше за бал, отриманий при традиційному навчанні (0,23) [6].

Поява дистанційного навчання в Україні є необхідною умовою розвитку освітньої програми. Багато студентів починаючи з 2-3 курсу вже намагаються працювати. Тож компанія і університет повинні скласти гарний тандем у підготовці ІТ-фахівців. Для того, щоб студент міг об'єднати і роботу, і навчання без шкоди останньому, необхідно ввести змішану форми освіти. Онлайн-курси та класичне навчання доповнять одне одного. Навчальні заклади можуть додати до своїх навчальних програм онлайн-курси задля підсилення навчального процесу і покращення його якості. Дистанційне навчання підходить для організованих та зібраних людей, які можуть розпланувати свій час, а це ті якості, які цінуються роботодавцями.

На сьогодні в багатьох навчальних закладах України впроваджено елементи дистанційної освіти. Прикладом є Київський політехнічний інститут, який використовує віртуальне навчальне середовище – Moodle [7]. Ця система надає можливість викладачам завантажувати матеріали лекцій і контролювати виконання практичних робіт студентів у зазначені терміни, які в свою чергу можуть користуватися наданим матеріалом та завантажувати виконані завдання. Однак виникає проблема саме про розміщення відео-занять, оскільки навчальні заклади України не забезпечують необхідними умовами для запису таких занять. Одним з небагатьох університетів України, що надає можливість створення таких занять – Києво-Могилянська академія [8].

Групою викладачів провідних ВНЗ України була створена платформа українських онлайн-курсів – Prometheus. Співпраця таких курсів з університетами повинна перерости в інтеграцію курсів у навчальний процес.

Отже, впровадження дистанційного навчання у ВНЗ України є важливим кроком у розвитку освітньої системи. Адже це надасть змогу викладачам та студентам з користю використовувати свій час, а останнім отримувати якісну освіту.

Список використаних джерел:

1. ВНЗ з дистанційною освітою [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://www.hotcourses.ru/study-abroad-info/choosing-a-university/best-universities-for-distance-learning/>
2. Дистанційне навчання [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://ru.wikipedia.org/wiki/Дистанционное_обучение
3. Вибір ВНЗ для дистанційного навчання [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://www.aif.ru/dontknows/answer/1013731>
4. Університет ім. Гульєльмо Марконі – Італія, Рим [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://mcdvo.com.ua/vuzu-partnery/10-universitet-im-gulelmo-markoni.html>
5. Онлайн навчання [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://www.facenews.ua/articles/2014/254549/>
6. МООС більш ефективні ніж традиційне навчання [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://newtonew.com/analytics/dokazano-mooc-bolee-effektivny-chem-tradicionnoe-obuchenie>
7. Дистанційна освіта в НТУУ «КПІ» [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://moodle.kpi.ua/>
8. Київська Могилянська Академія, дистанційне навчання [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://distedu.ukma.edu.ua/>

НЕПЕРЕРВНІ ПРИ $t \in \mathfrak{R}$ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглядається система нелінійних функціональних рівнянь вигляду

$$x(qt) = F\left(t, x(t), x\left(t + f_1(t, x(t))\right), \dots, x\left(t + f_k(t, x(t))\right)\right), \varepsilon \quad (1)$$

де $t \in \mathfrak{R}$, $q = \text{const} \neq 0, 1$, $\varepsilon \ll 1$, окремі класи яких вивчалися багатьма математиками, і в даний час ряд важливих проблем їх теорії досить добре досліджені (див. [1-3] і приведену в них бібліографію). Вивчається питання існування та єдиності неперервних розв'язків таких систем у випадку, коли виконуються такі умови:

1) вектор-функція $F\left(t, x^1, \dots, x^k, \varepsilon\right)$ і функції $f_i(t, x)$, $i = 1, 2, \dots, k$, є неперервними при всіх $t \in \mathfrak{R}$, $x^i \in \mathfrak{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, k$, $x \in \mathfrak{R}^n$ і має місце співвідношення $\sup_{t \in \mathfrak{R}} |F(t, 0, \dots, 0, \varepsilon)| = M < +\infty$;

2) вектор-функція $F\left(t, x^1, \dots, x^k, \varepsilon\right)$ і функції $f_i(t, x)$, $i = 1, 2, \dots, k$, задовольняють умови

$$\left| F\left(\bar{t}, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^k, \varepsilon\right) - F\left(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}^1, \dots, \bar{\bar{x}}^k, \varepsilon\right) \right| \leq L_0 \left| \bar{t} - \bar{\bar{t}} \right| + L \sum_{i=1}^k \left| \bar{x}^i - \bar{\bar{x}}^i \right|,$$

$$\left| f_i\left(\bar{t}, \bar{x}\right) - f_i\left(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}\right) \right| \leq l'_i \left| \bar{t} - \bar{\bar{t}} \right| + l''_i \left| \bar{x} - \bar{\bar{x}} \right|, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

де L_0, L, l'_i, l''_i , $i = 1, 2, \dots, k$, – деякі додатні сталі,

$$\left(\bar{t}, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^k, \varepsilon \right), \left(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}^1, \dots, \bar{\bar{x}}^k, \varepsilon \right) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^{kn}$$

3) при достатньо малих L_0, L, l'_i, l''_i , $i = 1, 2, \dots, k$, виконуються співвідношення

$$\frac{L_0}{ql} + \frac{L}{q} \left(k + 1 + \left[l^* + l^* l \right] k \right) \leq 1, \quad L \left[k + 1 + l^* k \right] = \theta < 1,$$

де $l^* = \max \{ l'_i, l''_i \}$, $l > 0$.

Зокрема, у випадку $\varepsilon = 0$, отримаємо систему вигляду

$$x(qt) = F\left(t, x(t), x\left(t + f_1(t, x(t))\right), \dots, x\left(t + f_k(t, x(t))\right)\right), 0, \quad (2)$$

для якої доведена теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються умови 1-3. Тоді система рівнянь (2) має єдиний неперервний розв'язок, що задовольняє умову

$$\left| x(\bar{t}) - x(\bar{t}) \right| \leq l \left| \bar{t} - \bar{t} \right|,$$

де $\bar{t}, \bar{t} \in \mathfrak{R}$, l – деяка додатна стала.

Виконуючи в системі рівнянь (1) взаємно однозначну заміну змінних $x(t) = y(t) + \gamma(t)$, де $\gamma(t)$ – неперервний розв'язок системи (2), отримаємо систему рівнянь вигляду

$$y(qt) = \tilde{F}(t, y(t), y(t + \tilde{f}_1(t, y(t))), \dots, y(t + \tilde{f}_k(t, y(t))), \varepsilon), \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} & \tilde{F}(t, y(t), y(t + \tilde{f}_1(t, y(t))), \dots, y(t + \tilde{f}_k(t, y(t))), \varepsilon) = \\ & = F(t, y(t) + \gamma(t), y(t + f_1(t, y(t) + \gamma(t))) + \\ & + \gamma(t + f_1(t, y(t) + \gamma(t))), \dots, y(t + f_k(t, y(t) + \gamma(t))) + \gamma(t + f_k(t, y(t) + \gamma(t))), \varepsilon) - \\ & - F(t, \gamma(t), \gamma(t + f_1(t, \gamma(t))), \dots, \gamma(t + f_k(t, \gamma(t))), 0). \end{aligned}$$

Теорема 2. Нехай виконуються умови 1, 2 та при достатньо малих L_0 , L , l'_i, l''_i , $i = 1, 2, \dots, k$, виконуються співвідношення $\frac{L_0}{ql} + \frac{L}{q} (k + 1 + [l^* + l^* \tilde{l}]) k \leq 1$, $L [k + 1 + \tilde{l} l^* k] = \theta < 1$, де $l^* = \max \{l'_i, l''_i\}$, $\tilde{l} > 0$. Тоді система рівнянь (3) має єдиний неперервний обмежений при $t \in \mathfrak{R}$ розв'язок, який задовольняє умові $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = 0$.

Список використаних джерел:

1. Пелюх Г.П. О существовании периодических решений нелинейных разностных уравнений / Г.П. Пелюх // Укр. мат. журн. – 2002. – №12. – С. 1623-1633.
2. Пелюх Г.П. К теории систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами / Г.П. Пелюх // Докл. АН РАН. – 1994. – №4 – С. 451-452.
3. Agarwal R.P. Stable Periodic Solutions of Difference Equations / R.P. Agarwal, E.Yu. Romanenko // Appl. Math. Lett. – 1998. – №4. – P. 81-84.

УДК 532.516

Ю. В. Загородній, канд. техн. наук

Київський Національний Університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ БІОЛОГІЧНИХ КЛІТИН РОСЛИННОГО ОРГАНІЗМУ

Рослинний організм можна представити як систему елементів, які складаються з біологічних клітин [1, 5]. Таких елементів може бути N і щільність розподілення клітин визначається функцією $w_i(\tau, t)$ з парамет-

рами біологічного віку $\tau \in [0, \tau_m]$ і моменту часу $t \in [0, T]$ в області визначення $Q_T = \{(\tau, T) : 0 \leq \tau \leq \tau_m, 0 \leq t \leq T\}$, $i = \overline{1, N}$.

При $N = 1$ рослина представляється як єдиний організм, функція щільності розподілення клітин якого задовольняє початково-крайовій задачі для рівняння переносу

$$\frac{\partial w_1(\tau, t)}{\partial t} = -(\bar{s}(\tau, t) + l_0 \theta_1(\tau, t)) w_1(\tau, t) - l_0 \frac{\partial w_1(\tau, t)}{\partial \tau},$$

$$w_1(0, t) = \gamma_1 \int_0^{\tau_d} w_1(\tau, t) \theta_1(\tau, t) d\tau, w_1(\tau, 0) = \varphi_1(\tau). \quad (1)$$

При $N = 2$ рослину можна представити як систему двох елементів – підземної ($i = 1$) та надземної ($i = 2$) частин. Тоді зв'язок між елементами описується наступними крайовими умовами:

$$\theta_1(\tau, t) = \theta_{11}(\tau, t) + \theta_{12}(\tau, t),$$

$$w_1(0, t) = \gamma_1 \int_0^{\tau_d} w_1(\tau, t) \theta_{11}(\tau, t) d\tau,$$

$$w_2(0, t) = \gamma_2 \int_0^{\tau_d} w_2(\tau, t) \theta_2(\tau, t) d\tau + \gamma_1 \int_0^{\tau_d} w_1(\tau, t) \theta_{12}(\tau, t) d\tau.$$

При $N = 3$ розглядався ще один елемент, розвиток якого відбувається в підземній частині рослини і впливає на ріст всього організму. Наприклад, в підземній частині рослин квасолі вплив азот-фіксуючих бактерій призводив до створення бульбочки в корінні [3].

Для задачі (1) знайдений аналітичний розвиток, запропонована стійка різницева схема і вирішена задача параметричної ідентифікації [2].

Кожен елемент системи рослини може мати інтегральну кількісну характеристику

$$W_i(t) = \int_0^{\tau_m} b_i(\tau) w_i(\tau, t) d\tau,$$

яка визначає ріст всього організму і легко спостерігається. Наприклад, це може бути вага, висота або концентрація речовини, важливої для розвитку рослини. Тоді динаміку росту організму рослини можна представити у вигляді системи нелінійних диференціальних рівнянь [4].

Дані математичні моделі були використані для дослідження закономірностей динаміки і прогнозування росту рослин хмелю, квасолі, соняшника та картоплі.

Список використаних джерел:

1. Торнли Дж. Математические модели в физиологии растений / Дж. Торнли. – К. : Наукова думка, 1982. – 312 с.
2. Акименко В.В. Моделирование динамики структурированной по возрасту полициклической популяции биологических клеток на параметризованном

- множестве алгебраических функций / В.В. Акименко, Ю.В. Загородний // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – №4. – С. 108-125.
3. Загородний Ю.В. Математичні моделі в дослідженні вірусів рослин / Ю.В. Загородний, А.Л. Бойко. – К. : Ексоб, 2001. – 152 с.
 4. Загородний Ю.В. Математична модель процесів росту рослин на прикладі картоплі / Ю.В. Загородний, І.О. Клімова // Вісник Житомирського державного університету імені Тараса Шевченка. – 2007. – Вип. 33. – С. 229-232.
 5. Webb G.F. Population models structured by age, size and spatial position / G.F. Webb // Structured Population Models in Biology and Epidemiology. – Springer, 2008. – 306 p.

УДК 519.64:517.443.254-37:519.6

В. К. Задірака, д-р. фіз.-мат. наук

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, м. Київ

50 РОКІВ ТЕМАТИЦІ З ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ

Півстоліття – це ціла епоха!

А починалась ця тематика завдяки двом речам:

- У зв'язку з бурхливим розвитком обчислювальної математики в 60-і роки було створено багато нових методів розв'язання типових задач обчислювальної та прикладної математики, але на той час не було критеріїв їх порівняльного аналізу і тому в ті часи наукові семінари часом перетворювались на «бійку»: кожний відстоював свій метод не маючи чітких аргументів на свою користь. З позицій сьогодення ми знаємо, що немає методів і алгоритмів, які завжди працюють краще за інші. Кожен метод має область своєї диференційної поведінки, коли в цій області він працює краще за інші. Коли це питання розв'язане (а це зробити не завжди просто), то і порівняльний аналіз методів (при однакових умовах) фактично розв'язаний. Тут важливі критерії порівняльного аналізу. Головне, щоб ці критерії були багатофакторними. Наприклад, враховували і точність, і час роботи алгоритму. Взагалі кажучи, порівняльний аналіз справа «тонка» і відповідальна, але його результати дуже важливі. Якщо не вдається його розв'язати аналітичними методами, вдаються до чисельно-аналітичних з використанням результатів тестування якості алгоритмів [1].
- Для отримання гарантованої оцінки точності наближеного розв'язку задачі треба враховувати різні джерела похибок, які реально супроводжують обчислювальний процес. Йдеться про оцінку повної похибки обчислювального алгоритму, яка враховує похибки: неусуну, методу та заокруглення. Цим київська школа відрізнялась від інших. В інших наукових школах досліджувалась, як правило, якась одна з складових повної похибки, що, безумовно, не могло дати гарантованої оцінки якості наближеного розв'язку задачі. Ці результати можна було використовувати лише для деякої ідеалізованої моделі обчислень. Наприклад, якщо вважати, що вхідна інформація задана точно (чого на практиці не буває) і обчислення ведуться на комп'ютері з нескінченною розрядністю (чого також не буває).

Без дослідження питань повної похибки, порівняльного аналізу статті в наукові журнали Інституту кібернетики, заявки на виступ на наукових семінарах та наукових форумах, апробацію дисертаційних робіт не приймалися.

Згодом, в 70-і роки розгорнувся фронт робіт з побудови (при даній вихідній інформації про задачу) оптимальних за точністю та швидкодією обчислювальних алгоритмів. Були сформульовані визначення оптимальних, асимптотично оптимальних та оптимальних за порядком за точністю та швидкодією алгоритмів. Відмінною рисою київської школи (на відміну від результатів Каліфорнійського, Московського та Варшавського університетів) було намагання, використовуючи (або обчислюючи) інформацію про задачу «занурити» задачу у більш вузький клас і тим самим зменшити чебишовський радіус області невизначеності наближеного розв'язку задачі і тим самим покращити потенційну спроможність чисельного методу [2]. Разом з методом «капелюхів» використовується метод граничних функцій, який був розроблений і обґрунтований в Інституті кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України [3, 4].

Значною віхою в тематиці оптимізації обчислень є тестування якості прикладного програмного забезпечення. Не з точки зору правильності кодування відповідних алгоритмів, а з точки зору їх якості (наскільки «родзинки» алгоритмів, які входять в алгоритми і їх обґрунтування знайшли своє відображення у відповідних програмах [1]).

Експериментальні дослідження алгоритмів-програм полягають у проведенні за різними критеріями числових обчислювальних експериментів (тестування) за допомогою наборів спеціально розроблених задач (тестів) для визначення функціональних можливостей алгоритмів-програм, кількісних показників їх характеристик і областей їх диференційованої поведінки за цими характеристиками, порівняння програм за різними критеріями якості і т.і. Тестування дає також інформацію, за допомогою якої можна судити про якість оцінок характеристик обчислювального алгоритму, отриманих в результаті теоретичних досліджень.

Запропонований метод тестування базується на концепції сполучення теоретичних досліджень числових методів і обчислювальних алгоритмів і експериментальних досліджень алгоритмів-програм.

Зупинимось на деяких резервах поліпшення характеристик якості наближеного розв'язку та відповідного обчислювального процесу [5].

Розглядаються наступні резерви оптимізації.

1. Резерви зменшення міри похибок:

- за рахунок уточнення вхідних даних (уточнення класу, коригування вхідної інформації, підвищення точності вхідної інформації);
- за рахунок використання оптимальних та близьких до них алгоритмів, оптимізації інформаційного набору функціоналів, перехід в інший клас інформаційних операторів, повне використання вхідної інформації для звуження класу задач;
- за рахунок зменшення оцінок похибок заокруглень (використання схем обчислень, які мінімізують швидкість накопичення похибки заокруглення, вибір та моделювання правил заокруглень).

2. Резерви зменшення процесорного часу (збільшення довжини розрядної сітки, підвищення точності обчислення параметрів обчислювального процесу, використання «швидкої арифметики», узгодження обчислювального алгоритму з архітектурою комп'ютера; розпаралелювання обчислень).

Зараз, у зв'язку з необхідністю розв'язання задач трансобчислювальної складності, теорія похибок починає грати головну роль і дуже актуальними стають комп'ютерні технології розв'язання таких задач з заданими значеннями характеристик якості за точністю та швидкодією. Ці технології базуються на теорії похибок, загальній теорії оптимальних алгоритмів і теорії складності. Такі технології (як загальні підходи до їх побудови, так і конкретні технології розв'язання типових класів задач обчислювальної та прикладної математики) вже існують [5]. Без таких технологій, які є адаптивними по відношенню до апріорної та апостеріорної інформації про задачу і які використовують всі сучасні засоби ефективного розв'язання задач, підключаючи ті чи інші резерви оптимізації обчислень, складні задачі з заданою якістю не розв'язати.

Комп'ютерна технологія включає формування певного набору обчислювальних ресурсів, спосіб та умови їх використання для побудови обчислювального процесу, результатом якого має бути розв'язок задачі.

Якщо аналізувати нинішній фронт робіт з оптимізації обчислень, то він складається з:

- розвитку загальної теорії оптимальних алгоритмів;
- розвитку паралельної математики;
- використання непокрощувальних оцінок якості наближеного розв'язку задач;
- впровадження комп'ютерних технологій розв'язання задач прикладної та обчислювальної математики з заданими значеннями характеристик якості за точністю та швидкодією.

Список використаних джерел:

1. Бабич М.Д. Вычислительный эксперимент в проблеме оптимизации вычислений I / М.Д. Бабич, В.К. Задирака, И.В. Сергиенко // КиСА. – 1999. – Ч. 1, №1. – С. 51-63; Ч. 2, №2. – С. 59-79.
2. Задирака В.К. Теория вычисления преобразования Фурье / В.К. Задирака. – К. : Наук. думка, 1983. – 215 с.
3. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ (справочное пособие) / В.В. Иванов. – К. : Наук. думка, 1986. – 584 с.
4. Сергієнко І.В. Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів та суміжні питання / І.В. Сергієнко, В.К. Задірака, О.М. Литвин. – К. : Наук. думка, 2012. – 400 с.
5. Сергиенко И.В. Компьютерные технологии решения задач прикладной и вычислительной математики с требуемыми значениями характеристик качества / И.В. Сергиенко, В.К. Задирака, М.Д. Бабич, А.И. Березовский, П.Н. Бесараб, В.А. Людвиченко // КиСА. – 2006. – 42, № 5. – С. 33-41.

В. К. Задірака*, д-р. фіз.-мат. наук,

М. Д. Бабич**, д-р. фіз.-мат. наук,

І. В. Швідченко*, канд. фіз.-мат. наук

* Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, м. Київ,

**Український державний університет фінансів
та міжнародної торгівлі, м. Київ

ПРО МІЖНАРОДНІ НАУКОВІ ФОРУМИ З ПРОБЛЕМ ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ

З 1969 року проведено 42 наукових форуми з питань оптимізації обчислень, які постійно проводить, як головна організація, Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. В квітні 2016 року буде проведена Координаційна нарада (ПОО-ХЛІІІ) в Кам'янець-Подільському національному університеті імені Івана Огієнка по визначенню тематики, місця і терміну проведення, складу програмного комітету ХLIV-го наукового форуму з цієї проблематики, яку ми присвячуємо 60-річчю Інституту [1].

42 наукових форуми: це багато, чи мало? Така кількість вказує на те, що тематика продовжує бути актуальною, наукові форуми проводяться регулярно, набутий певний досвід їх організації та проведення [2], відслідковуються актуальні для цього наукового напрямку питання, для участі в роботі наукових форумів запрошуються поруч з відомими фахівцями молодь (молоді кандидати і доктори наук, науковці, викладачі, аспіранти, студенти старших курсів), наукові форуми є міжнародними (причому географія країн-учасників весь час поширюється). Серед країн, які постійно приймають участь в їх роботі крім країн пострадянського простору можна виділити США, Польщу, Швейцарію, Угорщину. Наприклад, в роботі 42-го наукового форуму (Міжнародної наукової школи-семінару, присвяченої 85-річчю від дня народження академіка В.С. Михалевича (2015 рік)) прийняло участь 125 науковців з 58 організацій. Серед них 4 академіки, 1 член-кореспондент, 16 докторів наук, 10 кандидатів наук, наукові співробітники, викладачі вузів і молоді вчені, зокрема аспіранти і студенти.

Програмний та організаційні комітети наукових форумів постійно тримає руку на пульсі сучасних методів обчислювальної математики, оцінок їх характеристик, їх порівняльного аналізу, паралельної математики, комп'ютерних технологій розв'язання задач трансобчислювальної складності, застосувань обчислювальних методів та комп'ютерних технологій для розв'язання конкретних класів задач математичного моделювання, інформаційної безпеки, тощо. Це дозволяє зберігати інтерес до цих наукових форумів та залучати провідних фахівців, які отримали нові цікаві результати.

Робота наукових форумів проходить за наступними секціями:

1. Загальна теорія оптимізації обчислень.
2. Наближення та відновлення функцій і функціоналів.
3. Цифрова обробка сигналів та зображень.
4. Розв'язування рівнянь.

5. Системний аналіз, оптимізація, математичне програмування, методи прийняття рішень.
6. Методи захисту інформації.
7. Прикладні задачі.

На цих секціях розглядаються методи розв'язання більшості типових класів задач обчислювальної та прикладної математики.

Декілька слів до історії наукових форумів. Першими були Республіканський симпозіум «Точність та ефективність обчислювальних алгоритмів», який відбувся в червні 1969 року у Києві та літня математична школа з такою ж назвою у вересні 1969 року в Одесі.

Ідея проведення наукових форумів виникла у м. Ужгород в 1968 році під час роботи Республіканської конференції з обчислювальної математики. Було вирішено просити Інститут кібернетики АН УРСР взяти на себе ініціативу організації і проведення наукових форумів. Дирекція інституту позитивно відгукнулася на цю пропозицію.

Наведемо основні віхи зміни тематики наукових форумів за роками.

В 60-і роки основними напрямками робіт були дослідження функціональних і якісних характеристик наближених методів і відповідних їм обчислювальних алгоритмів (о.а.). Проводились оцінки різного роду похибок (у тому числі і повної) при реалізації о.а. наближеного розв'язування задач різних класів та оцінки обчислювальної складності.

70-і роки характерні подальшим дослідженням чисельних методів і о.а. з метою побудови ефективних, у тому числі й оптимальних за різними критеріями (наприклад, точністю та швидкістю) о.а. та створення математичного забезпечення у вигляді індивідуальних програм та бібліотек і пакетів програм, призначених для розв'язування науково-технічних та народногосподарських задач.

Період 80-х років відзначався розробкою о.а. предметно-орієнтованих на різні класи прикладних задач з практичною їх реалізацією у вигляді як індивідуальних програм, так і пакетів прикладних програм з елементами розпаралелювання обчислень.

На протязі 90-х років теорія обчислень розвивалася в напрямку її застосування до аналізу і комплексного дослідження та розв'язування складних багатовимірних задач, що і привело до створення узагальнюючої дисципліни «системний аналіз». Багато уваги приділялось тестуванню якості прикладного програмного забезпечення.

Початок нового тисячоріччя можна характеризувати як поширення теорії обчислень на нові класи задач, такі як: захист інформації, глобальне розв'язування нелінійних функціональних рівнянь, глобальна оптимізація багатоекстремальних задач, оцінки складності о.а., комп'ютерні технології розв'язання задач прикладної та обчислювальної математики з заданими значеннями характеристик якості за точністю та швидкістю, розпаралелювання обчислень. Інтенсивні наукові дослідження з теорії обчислень на наведених класах задач повинні привести до нових результатів як в теоретичному плані, так і в практичній реалізації на конкретних класах задач, що відображають реальні природничі процеси та явища.

За час роботи наукових форумів в їх роботі прийняли участь відомі фахівці в галузі обчислювальної та прикладної математики: В.М. Глушков, М.С. Бахвалов, В.І. Бердишев, В.В. Воеводін, О.А. Самарський, В.С. Михалевич, В.С. Дейнека, Ю.М. Єрмольєв, І.М. Коваленко, Н.П. Корнійчук, В.К. Дзядик, В.С. Корольок, Ю.Г. Кривонос, О.І. Кухтенко, О.А. Летичевський, В.Л. Макаров, І.І. Ляшко, Б.М. Пшеничний, В.Л. Рвачев, І.В. Сергієнко, Н.З. Шор, Б.М. Бублик, В.В. Васін, В.О. Морозов, А.М. Гупал, В.К. Задірака, М.Д. Бабич, В.В. Іванов, М.В. Михалевич, І.М. Парасюк, Ю.І. Самойленко, І.В. Бейко, А.Ф. Верлань, В.В. Скопецький, В.В. Шайдуров, Г.М. Вайнікко, А.Ю. Лучка, Ю.О. Митропольський, Б.Т. Поляк, В.Я. Скоробагатько, П.І. Боднарчук, В.М. Фаддєєва, В.Я. Арсенін, В.П. Діденко, В.М. Старков, Ю.В. Капітонова, Є.О. Волков, О.С. Стукало, Ю.Ю. Червак, П.С. Бондаренко, О.Д. Горбунов, В.І. Лебедєв, В.І. Гуменюк-Сичевський, С.М. Кіро, І.М. Молчанов, І.Д. Горбенко, А.М. Кудін, В.Ю. Кудринський, В.Е. Шаманський, О.М. Хіміч, О.М. Литвин, М.О. Недашковський та багато інших докторів і кандидатів наук, наукових співробітників.

Коли складаєш цей список – не віриться, що стільки відомих фахівців прийняли участь в роботі наукових форумів і своєю участю підтримали їх авторитет.

Відмітимо також, що Головами програмних комітетів форумів в різні роки були: В.С. Михалевич, І.В. Сергієнко, В.В. Іванов, які багато зробили щодо стратегії проведення наукових форумів, формування їх тематики, особливо в часи перебудови, своїми власними лекціями сприяли авторитету цього наукового напрямку.

Наукова інформація про результати проведення наукових форумів друкується у журналі «Кібернетика та системний аналіз», у Віснику НАН України, а також на web-сайті наукових форумів <http://isicopt.com.ua/ua/>.

Все це вселяє надію, що і наступні наукові форуми з питань оптимізації обчислень будуть проходити на високому науковому рівні з актуальної тематики, молоді вчені і надалі будуть мати змогу апробувати на них свої результати, підшукувати собі опонентів і будуть активними учасниками.

Список використаних джерел:

1. Сергієнко И.В. Вопросы оптимизации вычислений. Международная научная школа-семинар (ВОВ-ХЛП) в Закарпатье, посвященная 85-летию со дня рождения академика В.С. Михалевича / И.В. Сергієнко, В.К. Задирака, М.Д. Бабич, И.В. Швидченко // Кибернетика и системный анализ. – 2016. – №2. – С. 184-185.
2. Питання оптимізації обчислень (1969–2009): Збірник науково-методичних та навчально-організаційних матеріалів. Видання друге, доповнене / І.В. Сергієнко, В.К. Задірака, М.Д. Бабич. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова, Наукова рада НАН України з проблеми «Кібернетика». – 2009. – 187 с.

**МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО ДВОВИМІРНОГО
СТАНУ У КУСКОВО-ОДНОРІДНІЙ ТРИКОМПОНЕНТНІЙ
ОБЛАСТІ З ТРІЩИНОЮ**

В останні два десятиліття значно зріс інтерес до теоретичних досліджень температурних полів і напружень у живих тканинах. Це зумовлено використанням теплових процедур під час лікування різноманітних ортопедичних захворювань та значним тепловиділенням в поліметилакриловому цементі, що використовується в операціях ендопротезування для фіксації імплантанту до кістки, за якого локальна температура зростає до 90°C-110°C. Під час полімеризації відбувається об'ємна «усадка» цементу, його густина збільшується з 900 кг/м³ до 1100кг/м³. Це зумовлює значні залишкові напруження у цементі та оточуючій його кістці та появу пор і тріщин у цементі. Охолодження цементу супроводжується термічними напруженнями. Термомеханічне моделювання і експериментальне дослідження простих зразків встановили виникнення тріщин, орієнтованих перпендикулярно до напрямків головних напружень. Ще однією причиною появи залишкових напружень у кістковому цементі є неповна його полімеризація, внаслідок якої утворюються попередньо напружені кластери (включення) з іншими механічними властивостями та поверхневим перехідним шаром.

Наведений вище далеко неповний перелік причин виникнення залишкових і термічних напружень у структурах імплантант-цемент-кістка спонукають до розвитку теоретичних моделей, які даватимуть змогу враховувати їх вплив на механічну поведінку, напружено-деформований стан і міцність ортопедичних структур в процесі їх функціонування. Найкритичнішим дефектом, який може спричинити екстремальні напруження у матеріалі та його руйнування, є тріщина. Тому ми вибираємо для моделювання плоску пружну матрицю з кусково-однорідним двокомпонентним круговим включенням та розташованою поблизу нього прямолінійною тріщиною, що перебувають у стаціонарному температурному полі. За допомогою такого поля можна змоделювати залишкові (усадочні) деформації, вибравши відповідно температуру і коефіцієнти теплового розширення компонентів структури. Така модель відповідає плоскій задачі термопружності для кусково-однорідного тіла з тріщиною.

Двовимірні задачі теорії пружності або термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами методом сингулярних інтегральних рівнянь розглядали раніше. Зокрема досліджували термопружний стан в обмеженій, півобмеженій і необмеженій плоскій області з чужорідними включеннями і криволінійними тріщинами. Однак, в цих працях розглядали двокомпонентні області з тріщинами. В даній роботі досліджується розподіл температурних напружень поблизу вершин тріщини, яка знахо-

диться в трикомпонентній області (площина з чужорідним двокомпонентним включенням) за умов сталої температури.

В даній роботі розглянуто двовимірну задачу термопружності для площини з двокомпонентним круговим включенням і тріщиною. Задачу зведено до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь на замкненому (межа включення) і розімкненому (тріщина) контурах. Числові розв'язки інтегральних рівнянь одержано методом механічних квадратур. Досліджено вплив теплофізичних, механічних властивостей компонент включення на розподіл напружень в околі вершин тріщини. Визначено коефіцієнти інтенсивності напружень на кінцях тріщини з допомогою яких визначають граничні теплові навантаження при яких тріщина починає рости, що призводить до локального або повного руйнування тіла.

УДК 004.94

В. А. Іванюк, канд. техн. наук,

В. В. Понеділок

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ НЕЛІНІЙНИХ ОБ'ЄКТІВ НА ОСНОВІ РЯДІВ ВОЛЬТЕРРИ

Одним з найбільш універсальних підходів до побудови математичних моделей нелінійних динамічних систем типу чорного ящика є представлення відгуку системи на зовнішній вплив у вигляді інтегро-степеневого ряду Вольтерри [2]. Застосовуючи методи побудови ряду Вольтерри [1] матимемо:

$$y(t) = \int_0^t K_1(t-s)x(s)ds + \iint_{00}^{tt} K_2(t-s_1, t-s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 + \dots, \quad (1)$$

де $x(t)$, $y(t)$ – відповідно вхідний і вихідний сигнали об'єкта, t – час перехідного процесу, $K_i(t-s_1, \dots, t-s_i)$ – ядра Вольтерри.

Розглядається задача керування нелінійної системи, яка полягає у визначенні вхідного впливу $x(t)$, який відповідає заданому (бажаному) відгуку $y(t)$. Вибір $x(t)$ виконується при умові відсутності зворотного зв'язку [2].

Пропонується алгоритм розв'язування інтегрального рівняння Вольтерри I роду (1) для двовимірного випадку на основі використання методу трапецій [3]:

$$y(t_i) = \frac{1}{2}hK_1(t_i, t_i)x(t_i) + \sum_{j=2}^{i-1} hK_1(t_i, t_j)x(t_j) + \\ + \frac{1}{2}hK_1(t_i, t_1)x(t_1) + \frac{1}{4}h^2K_2(t_i, t_1, t_1)x(t_1)x(t_1) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}h^2 \sum_{j=2}^{i-1} (K_2(t_i, t_1, t_j) + K_2(t_i, t_j, t_1))x(t_1)x(t_j) + \\
& + h^2 \sum_{j=2}^{i-1} K_2(t_i, t_j, t_j)x(t_j)x(t_j) + \frac{1}{4}h^2 K_2(t_i, t_i, t_i) + \\
& + \frac{1}{4}h^2 (K_2(t_i, t_i, t_1) + K_2(t_i, t_1, t_i))x(t_1)x(t_i) + \\
& + \frac{1}{2}h^2 \sum_{j=2}^{i-1} (K_2(t_i, t_i, t_j) + K_2(t_i, t_j, t_i))x(t_j)x(t_i),
\end{aligned} \tag{2}$$

де $i = \overline{2..n}$, $h = t_i - t_{i-1}$.

Перетворивши (2) отримано $n - 1$ квадратних рівнянь:

$$\varphi(x_i) \equiv Ax_i^2 + Bx_i + C = 0, \tag{3}$$

де

$$A = \frac{1}{4}h^2 K_2(t_i, t_i, t_i), \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
B = & \frac{1}{2}hK_1(t_i, t_i) + \frac{1}{4}h^2 (K_2(t_i, t_i, t_1) + K_2(t_i, t_1, t_i))x(t_1) + \\
& + \frac{1}{2}h^2 \sum_{j=2}^{i-1} (K_2(t_i, t_i, t_j) + K_2(t_i, t_j, t_i))x(t_j),
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
C = & \sum_{j=2}^{i-1} hK_1(t_i, t_j)x(t_j) + \frac{1}{2}hK_1(t_i, t_1)x(t_1) + \frac{1}{4}h^2 K_2(t_i, t_1, t_1)x(t_1)x(t_1) + \\
& + \frac{1}{2}h^2 \sum_{j=2}^{i-1} (K_2(t_i, t_1, t_j) + K_2(t_i, t_j, t_1))x(t_1)x(t_j) + \\
& + h^2 \sum_{j=2}^{i-1} K_2(t_i, t_j, t_j)x(t_j)x(t_j) - y(t_i).
\end{aligned} \tag{6}$$

Рівняння (3-6) розв'язуються на основі ітераційних методів, причому за початкове наближення береться корінь рівняння, отриманий на попередньому кроці. Значення $x(t_1) = \frac{y'_1(t_1)}{K(t_1, t_1)}$ знаходиться шляхом диференціювання (1) по t при умові, що $K(t_0, t_0) \neq 0$.

Список використаних джерел:

1. Іванюк В.А. Комп'ютерна реалізація детермінованого способу ідентифікації інтегральних моделей нелінійних динамічних об'єктів / В.А. Іванюк, В.В. Понеділок, В.А. Гришук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. : Технічні науки : зб. наук. пр. – 2014. – Вип. 10. – С. 59-67.

2. Солодуша С.В. Моделирование систем автоматического управления на основе полиномов Вольтерра / С.В. Солодуша // Моделирование и анализ информационных систем. – 2012. – №1. – С. 60-68.
3. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: Методы. Алгоритмы. Программы : справочное пособие / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К. : Наук. думка, 1986. – 548 с.

УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен*, д-р.фіз.-мат. наук,

І. П. Мединський**, канд. фіз.-мат. наук,

Г. С. Пасічник***, канд. фіз.-мат. наук

*Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ,

**Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів,

***Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПАРАБОЛІЧНІ МОДЕЛІ З ВИРОДЖЕННЯМИ НА ГІПЕРПЛОЩИНІ ЗАДАННЯ ПОЧАТКОВИХ ДАНИХ

Мета доповіді – привернути увагу до математичних моделей, які описуються параболічними рівняннями з виродженнями на початковій гіперплощині. Ці рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} (\alpha(t)\partial_t - \beta(t)A - a_0)u(t,x) &= f(t,x), \\ (t,x) \in \Pi_{(0,T]} &:= (0,T] \times \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (1)$$

де α і β – неперервні на $[0,T]$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t \in (0,T]$, $\alpha(0)\beta(0) = 0$; a_0 – задана функція; A – диференціальний вираз за n -вимірною просторовою змінною x такий, що вираз $\partial_t - A$ є: 1) рівномірно в $\Pi_{[0,T]}$ параболічним за Петровським чи за Ейдельманом виразом з обмеженими або необмеженими при $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами, 2) виродженим параболічним типу Колмогорова (ультрапараболічним) виразом, коефіцієнти якого не залежать від усіх просторових змінних або тільки від змінних виродження.

Рівняння (1) мають виродження при $t = 0$, які класифікуються за величинами

$$A(t,\tau) := \int_{\tau}^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}, \quad B(t,\tau) := \int_{\tau}^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta.$$

Так, рівняння (1) має: слабе виродження, коли $A(T,0) < +\infty$, сильне – якщо $A(T,0) = +\infty$, і дуже сильне – коли $A(T,0) = +\infty$ і $B(T,0) = +\infty$.

За відповідних умов на коефіцієнти для рівняння (1) побудовано і досліджено фундаментальні розв'язки задачі Коші, за допомогою яких встановлено коректну розв'язність та інтегральне зображення розв'язків задачі Коші у випадку слабого виродження, задачі з ваговою початко-

вою умовою, коли виродження не дуже сильне, та задачі без початкової умови для випадку дуже сильного виродження.

Бібліографію праць, присвячених рівнянню (1), можна знайти в [1, 2].

Список використаних джерел:

1. Eidelman S.D. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – №152. – 390 p.
2. Возняк О.Г. Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині / О.Г. Возняк, С.Д. Івасишен, І.П. Мединський // Буковинський мат. журн. – 2015. – № 3-4. – С. 41-51.

УДК 519.87

Є. В. Івохін, д-р. фіз.-мат. наук,

Д. В. Апанасенко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

ПРО РЕАЛІЗАЦІЮ ПРОЦЕСУ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ НА МНОЖИНІ СКЛАДЕНИХ НЕЧІТКИХ ЧИСЕЛ

Розробка конструктивного алгоритму для кластеризації нечітких даних, представлених сукупністю нечітких величин, включає в себе формалізацію способів пошуку кластерного центру множини даних та реалізацію процедури групування нечітких чисел в межах заданої кількості кластерів. У літературі, присвяченій проблемам кластеризації [1-3], найчастіше розглядаються три алгоритми: C-means, пікового групування та різницевого групування. Ці методи представляють собою кардинально різні підходи до вирішення проблеми кластеризації.

У даній роботі проведено дослідження вищезгаданих методів кластеризації для випадку нечітких множин спеціального вигляду. Нечітка множина елементів, що потребують групування, задається сукупністю складених нечітких чисел трикутного вигляду. На основі введеного поняття відстані між складеними нечіткими числами та способу порівняння відстаней запропоновано алгоритми нечіткого групування даних.

Проаналізовано особливості застосування розроблених методів кластеризації. Показники ефективності метода на практиці суттєво залежать від умов конкретної задачі. Проведено чисельні розрахунки, що підтвердили конструктивність практичного застосування розглянутих методів кластеризації на прикладі двомірних складених нечітких чисел.

Список використаних джерел:

1. Jamba M. Hierarchical cluster analysis and compliance / M. Jamba. – М. : Финансы и статистика, 1988. – 345 с.
2. Durand B. Cluster analysis / B. Durand, P. Odell. – М. : Статистика, 1977. – 128 с.
3. Viattchenin D.A. Fuzzy methods of automatic classification / D.A. Viattchenin. – Минск : Технопринт, 2004. – 219 с.

Є. В. Івохін, д-р. фіз.-мат. наук,
М. Ф. Махно

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

ПРО ПІДХІД ДО ФОРМАЛІЗАЦІЇ ПРОЦЕСУ ТЕСТУВАННЯ НА ОСНОВІ ГІБРИДНОЇ МОДЕЛІ ЗАДАЧІ РОЗКЛАДІВ

Часовий характер задач теорії розкладів відносить їх до особивого класу, який суттєво відрізняється від об'ємних економічних задач. В задачах теорії розкладів потрібно визначитись з порядком виконання робіт з урахуванням їх важливості або складності [1].

На пошук оптимального або близького до оптимального розкладу впливає наявність у задачі додаткових параметрів, які можуть мати динамічний характер. Це призводить до необхідності створення гібридних моделей задач теорії розкладів та дослідження можливості їх розв'язання.

Розглядається задача впорядкування n робіт для 1 машини. Для розв'язання задачі зазвичай застосовуються методи математичного програмування. За додаткових умов необхідно врахувати динаміку параметрів задачі в процесі пошуку її оптимальних розв'язків. Такими параметрами можуть бути обмеження часу та важливість робіт.

Проведено дослідження на прикладі задачі перевезення заданої кількості вантажів. Вважається, що за один раз можна перевезти лише один вантаж. Перевезення вантажів здійснюється одним транспортним засобом, а порядок транспортування вантажів визначається їх цінністю. Для розв'язування задачі отримано двохкритеріальну задачу оптимізації з антагоністичними критеріями, для вирішення якої можна використати методи математичного програмування або методи теорії ігор.

Запропоновано спосіб формалізації поставленої задачі у вигляді гібридної моделі, яка складається з оптимізаційної задачі теорії розкладів та диференційного рівняння, що описує динаміку зміни одного з параметрів задачі оптимізації. В якості критерію розглянуто величину часу, що залишається наприкінці вирішення усіх етапів роботи. Наведено результати чисельних експериментів.

Список використаних джерел:

1. Жданова Е.Г. Теория расписаний / Е.Г. Жданова. – М., 2000. – 136 с.

Є. В. Івохін, д-р. фіз.-мат. наук,
Ю. О. Науменко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

ПРО ГІБРИДНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ РЕКЛАМИ НА ОСНОВІ РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ

Вважається, що вимірювання ефективності реклами є досить складною проблемою. Більшість дослідників вважає її нерозв'язною, інші пропонують як прості, так і складні рішення. Проте, абсолютно усі дотримуються думки, що вимірювати ефективність реклами необхідно. Реклама є «мистецтвом впровадження унікальної торгової пропозиції в голови найбільшого числа людей при найменших витратах», а мінімізація витрат без вимірювання ефективності неможлива.

Головною проблемою визначення оптимального рекламного бюджету є визначення бюджету, що дозволив би одержати гарантовану віддачу від реклами. Будь-яке відхилення від оптимальності приводить до неефективності [1].

Насправді суть ефективності реклами полягає в оцінці величини позитивного зрушення відносно покупців до предмету реклами і залежить від торгової пропозиції, форми її подання (креатива), використання рекламо носіїв та частоти і часу дії реклами на покупців.

Змодельовано процес розповсюдження дії реклами на покупців. Для цього використано опис зміни концентрації впливу у часі на основі моделювання процесів розповсюдження впливу за схемами, подібними до моделей дифузії.

В процесі моделювання рівня впливу реклами на інформованість населення про товар, що рекламується отримано математичні моделі, в яких враховано процеси зміни кількості населення та зміни обсягу товарів. Проведено чисельні експерименти на реальних прикладах.

Список використаних джерел:

1. Шведун В.А. Разработка методического обеспечения формирования совокупного рекламного бюджета предприятия / В.А. Шведун // Бизнес Информ. – 2008. – №9. – С. 60-68.

С. А. Іліка, канд. фіз.-мат. наук,
Л. А. Піддубна, канд. фіз.-мат. наук
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПОБУДОВА ОБЛАСТЕЙ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Розглядається лінійне диференціально-різницеве рівняння із багатьма запізненнями

$$\frac{dx(t)}{dt} + \sum_{k=1}^n a_k x(t - \tau_k) = 0, \quad (1)$$

де $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \overline{1, n}$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n = \tau$.

Нехай у рівнянні (1) запізнення τ_k , $k \in \overline{1, n}$ – додатні раціональні числа. Без втрати загальності, можна вважати в цьому випадку, що запізнення в рівнянні (1) – цілі додатні попарно різні числа. У цьому випадку квазіполіномом рівняння (1) має вигляд

$$\lambda = a_1 e^{-\lambda} + a_2 e^{-2\lambda} + \dots + a_n e^{-n\lambda}. \quad (2)$$

Означення 1. Областю стійкості рівняння (2) називається множина точок $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ для яких усі корені рівняння (2) задовольняють умову $Re \lambda < 0$.

Має місце таке твердження.

Теорема 1 [1]. Область стійкості рівняння (1) обмежена.

Для побудови алгоритму знаходження області стійкості рівняння (1) будемо використовувати наступну теорему.

Теорема 2 [2]. Якщо нульовий розв'язок рівняння (1) експоненціально стійкий (нестійкий), тоді існує $m_0 > 0$ таке, що при $m \geq m_0$ нульовий розв'язок відповідної апроксимуючої системи експоненціально стійкий (нестійкий). Якщо для всіх $m \geq m_0$ нульовий розв'язок відповідної апроксимуючої системи експоненціально стійкий (нестійкий), то й нульовий розв'язок рівняння (1) експоненціально стійкий (нестійкий).

Застосовуючи теореми 1, 2 та схему апроксимації диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь [3], побудовано ефективний алгоритм знаходження області стійкості лінійного диференціально-різницевого рівняння із запізненням.

Результати числових експериментів для рівняння

$$x'(t) = a_1(t-1) + a_2(t-2)$$

зображені на рисунку, де область стійкості – це заштрихована частина площини.

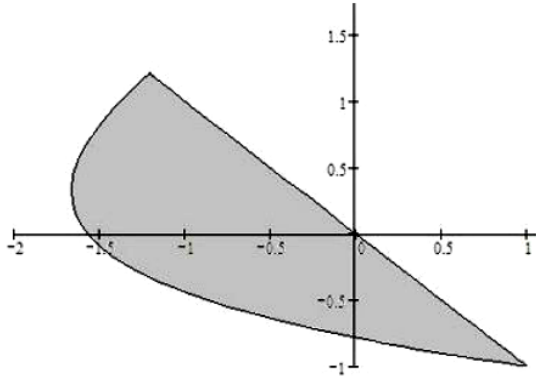


Рис. 1.

Список використаних джерел:

1. Клевчук І.І. Побудова областей стійкості лінійних диференціально-різницьових рівнянь / І.І. Клевчук, С.А. Пернай (Іліка), І.М. Черевко // Доповіді НАН України. – 2012. – №7. – С. 28-34.
2. Матвій О.В. Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість / О.В. Матвій, І.М. Черевко // Нелінійні коливання. – 2004. – №2. – С. 208-216.
3. Іліка С.А. Схеми апроксимації диференціально-функціональних рівнянь та їх застосування / С.А. Іліка, О.В. Матвій, Л.А. Піддубна, І.М. Черевко // Буковинський математичний журнал. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2014. – Т. 2, №2-3. – С. 92-96.

УДК 519.21

В. С. Ільків, д-р. фіз.-мат. наук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

**КРАЙОВА ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ
ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЛЯМЕ У ПРОСТОРАХ
МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ**

В області $Q_p = [0, T] \times \mathbb{R}^p$ змінних $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_p)$, $p \in \mathbb{N}$, $T > 0$, розглядається задача про знаходження майже періодичного за змінною x зі спектром $M = \{ \mu_k = (\mu_{k1}, \dots, \mu_{kp}) \in \mathbb{R}^p : k \in \mathbb{Z}^p \}$, розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\sigma^* \partial_t^2 u = \mu^* (\partial_x \operatorname{col} \partial_x) u + (\lambda^* + \mu^*) (\operatorname{col} \partial_x \partial_x) u, \quad (t, x) \in Q_p, \quad (1)$$

який задовольняє інтегро-крайові умови

$$\alpha_j u((j-1)T, x) + \beta_j \int_0^T \frac{t^{r_j}}{r_j!} u(t, x) dt = \varphi_j(x), \quad x \in \mathbb{R}^p, \quad j=1, 2. \quad (2)$$

Система (1) у тривимірному випадку називається системою Ляме і описує напружений стан ізотропного однорідного пружного тіла у переміщеннях, де σ – густина середовища, λ^* і μ^* – (додатні) коефіцієнти Ляме, t – час, x – просторова точка, α_j і β_j – комплексні параметри

$(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 > 0, |\beta_1|^2 + |\beta_2|^2 > 0), \partial_t = \partial / \partial t, \partial_x = (\partial / \partial x_1, \dots, \partial / \partial x_p), r_j,$ – невід’ємні цілі числа (порядки моментів), col – операція транспонування. Шуканий розв’язок $u = u(t, x)$ – вектор розміру p , а $\varphi_1 = \varphi_1(x), \varphi_2 = \varphi_2(x)$ – задані вектор-функції.

Задачу (1), (2) для $p = 3$ досліджено у роботі [1] у шкалі $\{H_M^q\}_{q \in \mathbb{R}}$ гільбертових просторів H_M^q майже періодичних функцій, отриманих поповненням множини майже періодичних многочленів $v(x) = \sum v_k e^{i(\mu_k, x)}$ за нормою $\|v; H_M^q\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \|v_k\|^2 (1 + \|\mu_k\|^2)^q$, де $\|\cdot\|$ – евклідова норма, а спектр M задовольняє умову зростання: для деяких $0 < d_1 \leq d_2$ і $0 < \theta_1 \leq \theta_2$ виконуються нерівності $d_1 \|k\|^{\theta_1} \leq \|\mu_k\| \leq d_2 \|k\|^{\theta_2}$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$.

Отримано умови розв’язності задачі та побудовано розв’язок. Ці результати уточнено та поширено на загальну постановку задачі у разі $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$ та у разі $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ авторами статті [2].

У даній роботі припускаємо $\alpha_1 = 0$ і $\alpha_2 \beta_1 \neq 0$. Для цього випадку одержано результати про розв’язність задачі (1), (2), які є продовженням і доповненням тверджень з роботи [2], зокрема визначено вплив параметрів α_2, β_j та r_j , де $j = 1, 2$, на існування і гладкість розв’язку.

Показано, що розглядувана задача некоректна за Адамаром і у шкала просторів $\{H_M^q\}_{q \in \mathbb{R}}$ має розв’язок не для всіх $T \in [T_0, T_1]$, де $0 < T_0 < T_1 < \infty$, а для майже всіх у сенсі міри Лебега $T \in [T_0, T_1]$.

Для моменту нульового порядку ($r_1 = 0$) у задачі (1), (2) виникають малі знаменники, при дослідженні яких використано метричний підхід [3, 4] і встановлено відповідні оцінки знизу цих знаменників.

Список використаних джерел:

1. Кузь А.М. Задача з інтегральними умовами за часом для системи рівнянь динамічної теорії пружності / А.М. Кузь, Б.Й. Пташник // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – №4. – С. 40-53.
2. Ільків В.С. Задача з інтегро-крайовими умовами для системи рівнянь Ляме у просторах майже періодичних функцій / В.С. Ільків, З.М. Нитребич, П.Я. Пучак // Буков. мат. журн. – 2015. – №2. – С. 27-41.

3. Ільків В.С. Задача з нелокальними умовами для рівнянь з частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників / В.С. Ільків, Б.Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 2006. – №12. – С. 1624-1650.
4. Пташник Б.Й. Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними / Б.Й. Пташник, В.С. Ільків, І.Я. Кміть, В.М. Поліщук. – К. : Наукова думка, 2002. – 416 с.

УДК 519.21

О. В. Ільченко, канд. фіз.-мат. наук,
Т. В. Шовкопляс, канд. фіз.-мат. наук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

УМОВИ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ З ВИПЕРЕДЖЕННЯМ

Нехай $t \in [0, T]$, $T < \infty$; λ – міра Лебега на відрізку $[0, T]$; $x \in R^d$, $|\cdot|$ – норма вектора з R^d . Через G позначимо обмежену область (відкрити зв'язну множину в R^d) з кусково-гладкою межею [3], ∂G – межа області G , λ_d – міра Лебега на G :

$$G_T = \{(x, t) : x \in G, t \in (0, T)\}, \quad \partial G_T = \{(x, t) : x \in \partial G, t \in [0, T]\}.$$

Підсумовування в межах від 1 до d здійснюється по парам однакових індексів. Позначимо, $u_{x_i} = du/dx_i$, $i = \overline{1, \dots, d}$, $u_s = du/ds$, $u_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_d})$.
Всі похідні розглядаються в узагальненому сенсі [1].

Через $(\cdot, \cdot)_0$ і $(\cdot, \cdot)_{0,0}$ позначено скалярні добутки в $L^2(G)$ і в $L^2(G_T)$ відповідно: $\|f\|_0 = (f, f)_0^{1/2}$, $W_1^2(G)$ – простір Соболева функцій $f \in L^2(G)$, що мають похідну $f_x \in L^2(G)$; $(f, g)_1 = (f, g)_0 + (f_{x_k}, g_{x_k})_0$, $\|f\|_1 = (f, f)_1^{1/2}$ – скалярний добуток і норма елементів в $W_1^2(G)$;
 $\overset{\circ}{W}_1^2(G) = W_{1,0}^2(G_T) \cap \{f : f|_{\partial G_T} = 0\}$. $W_{1,0}^2(G_T)$ – простір Соболева функцій $f \in L^2(G_T)$ з похідними $f_x \in L^2(G_T)$ і скалярним добутком $(f, g)_{1,0} = (f, g)_{0,0} + (f_{x_k}, g_{x_k})_{0,0}$; $\overset{\circ}{W}_{1,0}^2(G_T) = W_{1,0}^2(G_T) \cap \{f : f|_{\partial G_T} = 0\}$.
 $W_{1,1}^2(G_T)$ – простір Соболева функцій $f \in L^2(G_T)$, які мають похідні

$f_x, f_s \in L^2(G_T)$ та скалярний добуток: $(f, g)_{1,1} = (f_s, g_s)_{0,0} + (f, g)_{1,0}$;
 $\overset{\circ}{W}_{1,1}^2(G_T) = W_{1,1}^2(G_T) \cap \{f: f|_{\partial G_T} = 0\}$.

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ – канонічний ймовірностний простір, на якому задано вінерівський процес $w(t), t \in [0, T]$: $\Omega = C_0([0, T])$, $\mathfrak{F} = \overline{B}^P(\Omega)$, P – вінерівська міра на \mathfrak{F} , $W(t, \omega) = \omega(t)$; $\|F\|_2 = (E|F|^2)^{1/2}$.

Позначимо через $I_n(f_n), f_n \in L^2([0, T]^n)$ – кратний стохастичний інтеграл Вінера-Іто; $D_s F, s \in [0, T]$, – стохастична похідна випадкової величини $F = F(W)$. $\overset{\circ}{SV}$ – банахів простір, який складається з елементів $L^2\left([0, T] \times \Omega; \overset{\circ}{W}_1^2(G)\right)$, що мають скінченну норму. $\int_0^t u(s) dw(s)$ – невизначений розширений стохастичний інтеграл Скорохода [2, 4].
 $a_{ij} \equiv a_{ij}(x, t)$, $b_i \equiv b_i(x, t)$, $(x, t) \in G_T$, $\varphi \equiv \varphi(x)$, $u \equiv u(x, t)$,
 $u_{x_i} \equiv u_{x_i}(x, t, \omega)$, $i, j = \overline{1, d}$, $(x, \omega) \in G \times \Omega$ – задані функції.

Знайдено умови існування розв'язку першої крайової задачі для рівняння

$$u(x, t) = \varphi(x) + \int_0^t \left(a_{ij} u_{x_i} \right)_{x_j} ds + \int_0^t b_i u_{x_i} dw(s). \quad (1)$$

Узагальнений розв'язок першої крайової задачі для рівняння (1) знайдено за допомогою наближеного метода Гальборкіна.

Список використаних джерел:

1. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
2. Скороход А.В. Об одном обобщении стохастического интеграла / А.В. Скороход // Теория вероятностей и применение. – 1975. – №2. – Вып. 20. – С. 223-237.
3. Buckdahn R. Linear stochastic differential equations and Wick products / R. Buckdahn, D. Nualart // Probab. Theory Relat. Fields. – 1994. – №99. – P. 501-526.
4. Nualart D. The Malliavin calculus and related topics / D. Nualart. – Springer, 1995. – 266 p.

ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ КОМПЛЕКСУ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ФУНКЦІОНУВАННЯ РОЗПОДІЛЬЧИХ СИСТЕМ

Запропоновано комплекс взаємопов'язаних нелінійних моделей розподільчих систем, що враховують видобуток, прокачування, зберігання та споживання енергетичних ресурсів, а також можливість перерозподілу навантаження постачальників за рахунок оптимізації основних параметрів мережі.

Загальні принципи побудови моделей розподілу потоків у розподільчих системах досліджуються на прикладі газотранспортних систем.

Розглядається складна система, основними елементами якої є газові промисли, на яких відбувається видобуток газу; нитки газопроводів, що з'єднують газові промисли з вузлами, де розташовані споживачі; а також підземні сховища, що використовуються як резервуари тимчасового зберігання газу. Ставиться така оптимізаційна задача: при заданих обмеженнях на обсяги видобутку газу, обмеженнях на пропускні спроможності ниток газопроводу потрібно визначити оптимальні обсяги транспортування газу від газових промислів до споживачів або у тимчасові сховища при мінімальних витратах на транспортування [1].

Топологічно розподільча мережа представляє собою зв'язний граф зі скінченими множинами вершин та ребер. Вважаємо, що виділено деяку підмножину вершин, в яких величина споживання не є фіксованою. Докладно досліджено задачу мінімізації вартості транспортування потоків за умови, що деякі вузлові параметри представляються як невідомі, тобто оптимізація відбувається не тільки за рахунок мінімізації вартості доставки газу споживачам, але і за рахунок ефективного перерозподілу навантаження джерел і стоків.

У процесі обчислень відбувається перехід до двоїстої задачі. Якщо на вузлові змінні вихідної задачі не накладені обмеження, то передбачається, що джерела (стоки) рівноцінні і тоді відповідні їм змінні двоїстої задачі збігаються. Запропонований підхід дозволяє не тільки перейти від задачі з великою кількістю обмежень до задачі без обмежень, але і підвищити ефективність процесу знаходження розв'язку, врахувавши збіг двоїстих змінних у відповідних точках і виключивши при реалізації алгоритмів непотрібні обчислення.

На основі дослідженої базової моделі [2], шляхом модифікації цільової функції та системи обмежень побудовано ряд моделей, що орієнтовані на вирішення таких проблем: розподіл потоків з усталеними поставками продукту, розподіл потоків з оптимальним перерозподілом постачальників продукту, розподіл потоків із урахуванням пріоритету джерел постачання продукту, оптимізація функціонування мережі в процесі наповнення і випорожнення сховищ газу.

Побудовані моделі призначені для розв'язання комплексу взаємопов'язаних задач оптимізації експлуатації газотранспортної системи. Во-

ни дозволяють провести попередню оцінку ефективності системи при проектуванні мереж, розрахувати попередній план подачі газу в мережу при сезонній зміні потреб користувачів, гарантувати задоволення споживачів при аварійних відмовах деяких вузлів.

Список використаних джерел:

1. Кирик Е.Е. Комплексные оптимизационные модели и задачи добычи, распределения и хранения газа / Е.Е. Кирик, А.П. Яковлева // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – №3. – С. 137-144.
2. Александрова В.М. Оптимізаційні моделі та алгоритми для мережевих задач розподілу ресурсів / В.М. Александрова, О.Є. Кірік // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2014. – №4. – С. 39-45.

УДК 004.074.34

І. А. Клименко, канд. техн. наук,

О. М. Сторожук

Національний технічний університет України «КПІ», м Київ

СПОСІБ АВТОМАТИЧНОГО РОЗПАРАЛЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ІЗ ЗАВЧАСНОЮ РЕКОНФІГУРАЦІЄЮ НА ПЛІС

Швидкість обчислень в реконфігурованих обчислювальних системах залежить, як від часу виконання апаратних задач, так і від витрат часу на реконфігурацію обчислювальної структури на поверхні ПЛІС. Час реконфігурації є непродуктивною складовою обчислювального процесу, яка критично впливає на ефективність реконфігурованих обчислень [1]. Тому задача мінімізації часу реконфігурації є актуальною проблемою і потребує нових підходів та рішень для ефективної реалізації динамічно реконфігурованих обчислювальних систем.

Одним з розповсюджених способів організації паралельного обчислювального процесу є спосіб управління потоками даних. На відміну від обчислювальних алгоритмів поданих графами ярусно-паралельної форми, такий спосіб дозволяє зменшити критичний час виконання обчислювального алгоритму, за рахунок видалення затримок очікування виконання задач. В роботі запропоновано спосіб зменшення критичного часу виконання потокових алгоритмів за рахунок здійснення завчасної реконфігурації. Для реалізації запропонованого способу розроблена модифікація відомого пристрою автоматичного розпаралелювання заявок (ПРЗ) під управлінням потоку дескрипторів даних [2]. На відміну від відомої реалізації, в склад пристрою введено блок черги реконфігурації. Наявність контролеру реконфігурації забезпечує розпаралелювання процесів управління обчисленнями та реконфігурації, що дозволяє ефективно реалізувати процес завчасної реконфігурації.

За запропонованого способу реалізації обчислювального процесу модифікована умова формування заявок, яка враховує параметр R_i – заявка реконфігурована, v_i – готовність актора заявки, δ_{ji} – готовність вхідних дескрипторів. Її можна представити як кон'юнкцію:

$$w_i = R_i \& v_i \& \delta_{ij}$$

Для моделювання запропонованого способу реконфігурації розроблений програмний емулятор реконфігурованої обчислювальної системи та програмна модель реалізації запропонованого пристрою. Достовірність функціонування програмної моделі забезпечена шляхом моделювання функціональних елементів системи з часовими характеристиками максимально наближеними до реальних. Часові характеристики роботи функціональних блоків задач, складових модулів та функціональних процесів обчислювальної системи отримані на базі розроблених моделей, синтезованих на мові *Verilog* та реалізованих на ПЛІС *Cyclone II Altera*. За результатами моделювання графу потокового алгоритму, представленого на рис. 1, а, отримані часові діаграми без мінімізації критичного часу (рис. 1, б) і з мінімізацією критичного шляху за рахунок реалізації завчасної реконфігурації (рис. 1, в), де *Z* – заявка, *I* – виконувана функція.

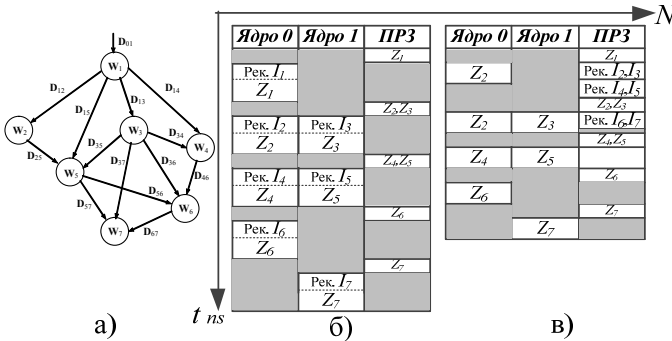


Рис. 1. Результати моделювання: а – граф потокового алгоритму, б – часова діаграма автоматичного розпаралелювання заявок без завчасної реконфігурації, в – із завчасною реконфігурацією

На часових діаграмах видно скорочення часу реконфігурації. На підставі проведених експериментів отримано прискорення обчислень в часі від застосування попередньої реконфігурації до 40% на відміну від відомого пристрою.

Запропонований спосіб розподілу задач із завчасною реконфігурацією дозволяє розширити функціональні можливості відомого пристрою і підвищити його ефективність за рахунок зменшення часу затримок реконфігурації системи.

Список використаних джерел:

1. Клименко І.А. Оптимізація реконфігурації в динамічно реконфігурованих обчислювальних системах / І.А. Клименко // Вісник НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка : зб. наук. пр. – К. : Век+, 2015. – №63. – С. 93-100
2. Жабин В.И. Реализация вычислений под управлением потока дескрипторов данных в мультипроцессорных системах / В.И. Жабин // Электронное моделирование. – 2003. – Т. 25, №1. – С. 35-47.

О. Є. Коваленко*, канд. техн. наук,

М. А. Клименко**

*Інститут проблем математичних машин і систем НАН України, м. Київ,

**Національний технічний університет України «КПІ», м Київ

ТЕХНОЛОГІЧНІ МОДЕЛІ ПРОГРАМНОЇ СИСТЕМИ ДЛЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ МЕТОДОМ ГОЛОСУВАННЯ

Прийняття рішень методом голосування використовуються в різних сферах діяльності. На теперішній час розроблені різноманітні методи голосування [1], які застосовуються для прийняття рішень не лише при вирішенні соціально-політичних проблем, а й в програмно-технічних системах колективного прийняття рішень, зокрема, в процедурах прийняття рішень в системах ситуаційного управління [2] та прийнятті публічних стандартів в сфері інформаційних технологій, таких як OMG RFP (Request for Proposals), W3C RFC (Request for Comments), JSR-JCP (Java Specification Requests – Java Community Process), DEbian VOTe EnginE (<https://vote.debian.org/~secretary/devotee.git>) та ін.

Існує широкий спектр пропозицій програмних продуктів для підтримки процедур голосування як у вигляді інсталяційних пакетів, так і веб-сервісів. Використання існуючих засобів і розробка спеціалізованих продуктів як компонентів інформаційних систем для підтримки процесів голосування вимагає визначення місця, ролі, функціональності та інтерфейсів таких компонентів в контексті їх застосування, наприклад з використанням нотатції UML.. Модель варіантів використання (діаграма прецедентів, Use Case Diagram) в UML є графічним зображенням найбільш загальних ролей акторів та їх відношень між собою та варіантами використання (прецедентами) в системі. Актори позначають зовнішні сутності системи, що впливають на систему або зазнають впливу з боку системи. Кожний варіант використання відображає окрему узагальнену функцію (множину функцій) або процес (сукупність процесів) у системі. Вимога забезпечення можливості віддаленого доступу до функцій голосування обумовлює необхідність розробки моделей програмного забезпечення, орієнтованих на реалізацію у веб-середовищі. Перелік основних характеристик таких моделей для веб-середовища включає в себе:

- підтримку клієнт-серверної архітектури;
- забезпечення засобів обліку та управління користувачами;
- підтримку fron-end та back-end (administrative) інтерфейсів;
- формування та збереження поточного профілю голосування;
- можливості вибору методу обробки профілю голосування;
- збереження і управління доступом до архіву проведених голосувань та їх даних;
- забезпечення безпеки даних і систем.

Діаграма варіантів використання, що задовольняє переліченим характеристикам показана на рис.1.

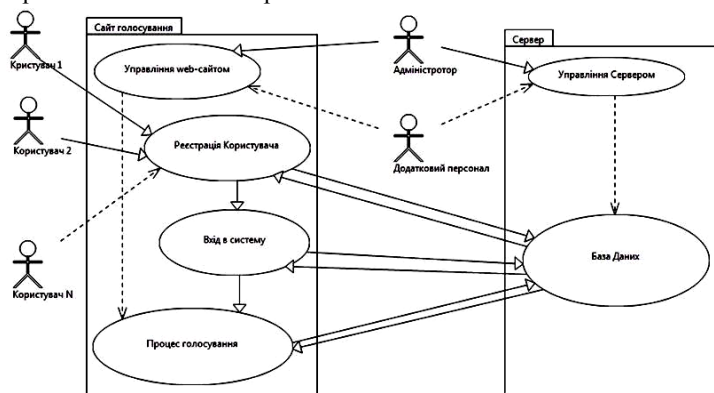


Рис. 1. Діаграма варіантів використання для системи голосування

Важливим аспектом розробки програмних систем є правильний вибір технологічної платформи. Основним критерієм вибору платформи розробки є підтримка нею всіх етапів життєвого циклу програмної системи. Цьому критерію задовольняє мультипроектна екосистема розробки програмних продуктів Eclipse (<https://eclipse.org/>), що підтримує всі стадії життєвого циклу, починаючи з формулювання вимог і закінчуючи засобами поширення і обслуговування програмних пакетів та компонентів.

На основі розробленої діаграми варіантів використання створюються інші технологічні моделі програмного продукту, такі як, діаграми діяльності, діаграми послідовностей, діаграми станів, діаграми компонентів і класів, діаграми розгортання.

Таким чином, розробка технологічних моделей для опису програмних систем прийняття рішень методом голосування забезпечує наскрізну прозорість процесу їх створення, виявлення проблем і неузгодженостей до початку кодування, можливості швидкого реінжинірингу систем та застосування компонентного підходу до проектування.

Список використаних джерел:

1. Green-Armytage James. A Survey of Basic Voting Methods. – Режим доступу: <http://inside.bard.edu/~armytage/personal/voting/survey.htm>.
2. Коваленко О.Є. Організація процедур прийняття рішень у ситуаційних центрах на основі голосування / О.Є. Коваленко // Актуальні проблеми економіки. – 2009. – №6. – С. 289-293.

ЕЛЕМЕНТИ МОДЕЛЬНО-ОРІЄНТОВАНОГО ПІДХОДУ ТЕХНОЛОГІЇ РОЗРОБКИ СИСТЕМ СИТУАЦІЙНОГО УПРАВЛІННЯ

Ситуаційне управління являє собою вид діяльності, пов'язаний з розпізнаванням, поясненням, впливом і прогнозуванням ситуацій, які виникли або можуть виникнути в динамічних системах, на основі використання відповідних концепцій, моделей і технологій. Така діяльність здійснюється у системах ситуаційного управління – організаційно-технічних комплексах, основу яких складають інформаційне і програмне забезпечення підтримки управлінських рішень на основі комплексного моніторингу факторів впливу на розвиток процесів, що відбуваються в об'єкті керування. Формалізація розробки таких систем дозволяє забезпечити прозорість і контрольованість всіх етапів життєвого циклу систем. Одним з таких підходів є модельно-орієнтований підхід до розробки програмно насичених систем, зокрема на основі концепції керованих моделями архітектур (Model Driven Architecture – MDA) [1].

Якість інформаційних технологій визначається, зокрема, їх прозорістю, керованістю, стандартизацією. Забезпечення цих властивостей визначається системою нотацій засобів моделювання і технологічною платформою розробки. Вибрані засоби побудови моделей системи повинні забезпечувати наскрізну підтримку всіх етапів життєвого циклу системи та її представлення для різних рівнів абстракції та аспектів проектування.

Формалізація загального опису процесів діяльності систем може бути представлена у різних нотаціях: BPMN, ARIS, UML, IDEF та ін. Сімейство узгоджених та взаємодоповнюючих нотацій для підтримки модельно-орієнтованого процесу проектування розвивається консорціумом Object Management Group (OMG) і включає специфікації стосовно керованих моделями архітектур (MDA), моделювання бізнес-процесів (BPM), програмного забезпечення проміжного шару (middleware), UML та ін.

Наступним елементом технології розробки інформаційних систем є технологічна платформа розробки. Найбільш відомою пропрітарною платформою розробки є платформа Microsoft.NET (.NET Framework). Однією з найпоширеніших і динамічних технологічних платформ, що поширюються за вільною ліцензією, є платформа Eclipse (Eclipse Public License – EPL). Екосистема Eclipse [2] являє собою мультипроектне модульне інтегроване середовище розробки програмного забезпечення, що розвивається некомерційною організацією Eclipse Foundation, стратегічними членами якої є компанії IBM, Google Inc., Oracle, RadHat, SAP, CA Technologies та ін. Зокрема, в рамках цієї платформи підтримуються засоби модельно-орієнтованого проектування.

Розробка засобів системи ситуаційного управління на основі модельно-орієнтованого підходу в середовищі платформи Eclipse вимагає відповідного його підготовки та налаштування. Така підготовка полягає у виборі версії та типу пакету завантаження його встановлення на плат-

формі використання та додавання додаткових засобів моделювання та проектування. Зокрема, модулі jBPM, Papyrus, BPMN modeller забезпечують створення моделей бізнес-процесів та об'єктно-орієнтованих моделей програмно-технічних компонентів таких систем.

Моделі бізнес-процесів ситуаційного управління будуються на основі опису технології підготовки і прийняття рішень у системі ситуаційного управління [3]. Відповідно до цього опису процес ситуаційного управління включає в себе наступні групи процесів:

- моніторинг стану керованого об'єкту;
- відбір учасників (аналітиків та експертів) для колективного прийняття рішень;
- підготовка наради для прийняття колективного рішення;
- відпрацювання прийнятих рішень;
- контроль та аналіз результатів виконання прийнятих рішень.

При побудові моделей для кожної з зазначених груп процесів виділяються окремі пули та доріжки для представлення ролей учасників прийняття рішень, які, у відповідності з ролями, здійснюють певні дії на основі обміну повідомленнями та реагуючи на події. Узгодженість дій учасників процесу прийняття рішень визначається моделями хореографії.

Таким чином, формальна модель бізнес-процесів прийняття рішень, дозволяє виділити фрагменти процесу прийняття рішень, що підлягають програмній реалізації та визначити семантику їх інтерфейсів в залежності від контексту виду діяльності.

Список використаних джерел:

1. The Zachman Framework and the OMG's Model Driven Architecture / David S. Frankel, P. Hamon, J. Mukerji et al. // White paper. Business Process Trends. – 2003.
2. Домашня сторінка спільноти Eclipse. – Режим доступу: <http://www.eclipse.org>.
3. Ситуаційні центри. Теорія і практика / за ред. А.О. Морозова, Г.Є. Кузьменко, В.А. Литвинова. – К. : СП «Інтертехнодрук», 2009. – 348 с

УДК 681.516.75:631.234

В. В. Коваль*, д-р. техн. наук,

В. В. Дорогобед*,

Д. О. Кальян*,

В. В. Коваль, мол. **

*Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ,

**Державний університет телекомунікацій, м. Київ

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА СТАТИСТИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ ПРИБОРІВ СИНХРОНІЗАЦІЇ З АДАПТИВНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Метою є комп'ютерне моделювання та статистична оптимізація пристроїв синхронізації (ПС) з адаптивними властивостями, побудованих на основі систем автоматики з фазовою підстройкою частоти. ПС пропо-

нуються для використання при створенні системи передачі національної шкали координованого часу, модернізації мереж синхронізації цифрових інфокомунікацій [1, 2], а також для забезпечення мітками часу процесу безперервного моніторингу стабільності параметрів енергосистем, згідно концепції інтелектуальної енергомережі (Smart Grid).

Використання ПС з адаптивними властивостями, як відтворювачів синхросигналів високостабільних джерел, обумовлює необхідність підвищення вимог до точності та стабільності часових інтервалів (ЧІ), що вони задають. Пропонується використання статистичного методу підвищення точності пристроїв синхронізації побудованих на основі нелінійних систем з фазовим автопідстроюванням частоти. Обґрунтуванням цього є те, що фізична природа, технологія виробництва, реальні умови технічної експлуатації ПС з адаптивними властивостями визначають статистичний характер залежності точності ЧІ від температури. Ця залежність нелінійна, що слідує з результатів експериментальних досліджень вибіркової партії однотипних ПС (29 приладів), представлених сімейством кривих, що перетинаються у точці температури, де здійснювалося їхнє налаштування (+20°C) й пучків розбіжних від цієї точки в обидва боки [3].

З метою підвищення точності часових інтервалів синхросигналів, що формуються ПС з адаптивними властивостями, пропонується здійснити статистичну оптимізацію залежності точності ЧІ від температури. На основі даного методу, критерію оптимальності (джерей-параметра) та рівнянь, що зв'язують дисперсію і середнє значення температурної стійкості ЧІ потрібно відшукати оптимальні співвідношення між ними, враховуючи мінімізацію впливу температури на характеристики ПС. Рішення цієї задачі, пов'язано зі значними обсягами математичних обчислень тому розроблено оригінальні алгоритми та комп'ютерна програма «CALCULATION» на мові програмування C++ для автоматизації процесу оптимізації температурної стійкості інтервалів часу синхросигналів, що формуються ПС. Визначено оптимальні умови температурної стійкості ПС з адаптивними властивостями, що випускаються, за критерієм мінімізації статистичного джей-параметру $J(\Delta\Theta)$ [3].

Впровадження запропонованих пристроїв синхронізації з адаптивними властивостями на діючі об'єкти, що потребують синхроінформацію, забезпечить підвищення точності, швидкодії, заводо захищеності та заданий рівень надійності. Особливо важливим є те, що вказані системи можуть виготовлятися в умовах серійного виробництва та працювати в реальних кліматичних умовах експлуатації на об'єктах, що потребують синхроінформацію відповідних галузей економіки. За результатами проведених досліджень підготовлено матеріали до патентування винаходу «Адаптивний цифровий фазовий дискриміатор».

Високий технічний рівень розроблених пристроїв синхронізації з адаптивними властивостями підтверджено тим, що по досягнутих технічних параметрах, які отримані в процесі експериментальних досліджень на діючих корпоративних IP-мережах, вони знаходяться на рівні кращих зарубіжних аналогів.

Список використаних джерел:

1. Koval V.V. Optimal of Slave Devices Synchronization of Infocommunication Networks / V.V. Koval, B.J. Kostik, G.A. Sukach // XIth International Conf. «The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics» (CADSM 2011). 23-25 лютого 2011 – Lviv ; Polana, (Ukraine), 2011. – P. 132-133.
2. Multichannel Clock Signal Monitoring System for Infocommunication Networks / V.V. Koval, D.O. Kalian, V.M. Tepluk, I.I. Shkliarevskii, M.M. Khudyntsev // Proc. International Conf. «Modern problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science» (TCSET'2016). Lviv-Slavske, Ukraine, 23-26 February, 2016. – Львів : НУ «Львівська політехніка», 2016. – С. 618-620.
3. Статистический метод повышения точности поликанального мониторинга синхронизации цифровых телекоммуникаций / В.В. Коваль, Г.А. Сукач, О.В. Гельчин и др. // Электросвязь. – 2012. – №5.

УДК 517.5.

І. Б. Ковальська, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

НАБЛИЖЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИМИ СУМАМИ ЗІГМУНДА НА КЛАСАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ В ІНТЕГРАЛЬНІЙ МЕТРИЦІ

Розглянемо множини L_{β}^{ν} і класи $L_{\beta}^{\nu}\mathfrak{R}$, які визначаються двома функціями натурального аргументу $\psi(k)$ і $\bar{\beta} = \bar{\beta}(k) = \beta_k$. Згідно [3] скажемо, що функція $f \in L(0; 2\pi)_{+}$ із рядом Фур'є $S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$, де $a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt$, $k = 0, 1, \dots$, $b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt$, належить множині L_{β}^{ν} , якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(k)} \left(a_k(f) \cos \left(kx + \frac{\beta_k \pi}{2} \right) + b_k(f) \sin \left(kx + \frac{\beta_k \pi}{2} \right) \right)$ є рядом Фур'є деякої функції f_{β}^{ν} із $L(0; 2\pi)$. Якщо $f \in L_{\beta}^{\nu}$ і при цьому $f_{\beta}^{\nu} \in \mathfrak{R}$, то кажуть, що $f(\cdot)$ належить до класу $L_{\beta}^{\nu}\mathfrak{R}$.

Розглянемо, також, поліноми виду

$$U_n^{\varphi, \sigma}(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\varphi(k)}{\varphi(n)} \sigma \left(\frac{k}{n} \right) \right) (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx), \quad (1)$$

де $n \in \mathbb{N}$, $a_k(f)$, $b_k(f)$ – коефіцієнти Фур’є функції $f(x)$, $\varphi(\cdot) \in F$, $\sigma \in G$ (F – множина всіх неперервних, додатних і монотонно зростаючих до нескінченості функцій $\varphi(u)$, $u \geq 1$, а G – множина всіх двічі диференційовних на $[0,1]$ функцій $\sigma(u)$), що мають обмежені похідні другого порядку $\sigma''(u)$ і задовольняють умову: $\sigma(1) = 1$, $\sigma(0) = 0$). Ці поліноми називають узагальненими сумами Зігмунда. При $\sigma(u) \equiv 1$ поліноми (1) досліджувались В.Т. Гаврилюк [1]. У випадку довільних $\sigma \in G$ поліноми (1) вперше з’явилися у роботі О.О. Новікова [2]. При певних параметрах $\varphi \in F$ і $\sigma \in G$ ці поліноми перетворюються в деякі відомі класичні тригонометричні суми.

При кожному фіксованому $q \in [0,1]$ через D_q позначимо множину послідовностей $\varphi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, для яких

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q_1, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi(k+1)\varphi(k+1)\sigma\left(\frac{k+1}{n}\right)}{\psi(k)\varphi(k)\sigma\left(\frac{k}{n}\right)} = q_2, \quad (2)$$

де $q = \max\{q_1, q_2\}$.

Прикладом ядер, коефіцієнти $\psi(k)$ яких задовольняють умову (2) є ядра

$$P_p^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kx - \frac{\beta_k \pi}{2}\right), \quad q \in (0,1), \beta_k \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

які при $\beta_k = \beta \in \mathbb{R}$ є відомими ядрами Пуассона і позначаються через $P_\beta^q(\cdot)$.

Класи $L_\beta^{\psi, \mathfrak{R}}$, що породжуються ядрами (3), позначаються $L_\beta^q \mathfrak{R}$.

Через L_p , $1 \leq p \leq \infty$ позначимо простір функцій $f \in L$ зі скінченною

нормою $\|f\|_p$, де при $p \in [1; \infty)$: $\|f\|_p = \|f\|_{L_p} = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$, $L_1 = L$, а

при $p = \infty$ $\|f\|_\infty = \text{ess sup} |f(t)|$.

Одиничну кулю в L_p позначатимемо U_p і вважатимемо, що

$$L_\beta^{\psi, \mathfrak{R}} U_p^0 = L_{\beta, p}^{\psi, \mathfrak{R}}, \quad U_p^0 = \{g : g \in U_p, g \perp 1\}.$$

Дослідимо величини $\rho_n(f, x) = f(x) - U_n^{\varphi, \sigma}(f, x)$ відхилень узагальнених сум Зігмунда порядку $n-1$ від функцій $f \in L_\beta^{\psi, \mathfrak{R}}$, де \mathfrak{R} – деяка фіксована підмножина з L_p , $1 \leq p, s \leq \infty$ і верхні грані цих відхилень

$$E_n(L_\beta^{\psi, \mathfrak{R}})_s = \sup_{f \in L_\beta^{\psi, \mathfrak{R}}} \|f(x) - U_n^{\varphi, \sigma}(f, x)\|_s$$

з метою отримання для них асимптотичних рівностей, коли $\psi \in D_q, 0 < q < 1$.

Використаємо лему 1 [4, с.353], суть якої полягає в тому, що залишки $\rho_n(\psi_{\beta}^{\psi})$ ядер $\psi_{\beta}^{\psi}(T)$, що породжують класи L_{β}^{ψ} при $\psi \in D_q, 0 < q < 1, n \rightarrow \infty$ поведуть себе приблизно так само, як і класи $\rho_n(P_{\beta}^q)$ ядер $P_{\beta}^q(t)$.

Мають місце такі теореми.

Теорема 1. Нехай $1 \leq p, s \leq \infty, \psi \in D_q, q \in (0,1), \psi(k) > 0$. Тоді $\forall f \in L_{\beta}^{\psi} L_p$ при $n \rightarrow \infty$ має місце формула

$$\|\rho_n(f)\|_s = \frac{1}{\varphi(n)} K_s^{\psi} + \psi(n) \left(q^{-n} \left\| \rho_n \left(I_{\beta}^q \left(f_{\beta}^{\psi} \right) \right) \right\|_s \right) + O(1) \frac{\varepsilon_n E_n \left(f_{\beta}^{\psi} \right)_p}{(1-q)^2}, \quad (4)$$

де $\varepsilon_n = \sup \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right|$, $O(1)$ і K_s^{ψ} – величини, рівномірно обмежені відносно параметрів n, p, q і β_k , $E(f) = \inf_{t_{n-1}} \|f - t_{n-1}\|_s$ – найкраще наближення функції f в метриці L_s тригонометричними поліномами порядку $n-1$.

Теорема 2. Нехай $1 \leq p, s \leq \infty$ і $\psi \in D_q, q \in (0,1), \psi(k) > 0$. Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$E_n \left(L_{\beta,p}^{\psi} \right)_s = \frac{K_s^{\psi}}{\varphi(n)} + \psi(n) \left(q^{-n} E_n \left(L_{\beta,p}^q \right)_s + O(1) \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right),$$

де $\sup_{k \geq n} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right|$, а $O(1)$ і K_s^{ψ} – величини, рівномірно обмежені відносно параметрів n, p, q і β_k .

Список використаних джерел:

1. Гаврилюк В.Т. О характеристике класса насыщения $C_O^{\psi} L_{\infty}$ / В.Т. Гаврилюк // Укр. маг. журнал. – 1986. – Т. 38, №4. – С. 421-427.
2. Новиков О.А. Приближение классов непрерывных периодических функций линейными методами / О.А. Новиков. – К., 1991. – 38 с. – (Препр. /АН УССР. Ин-т математики, 91.50).
3. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций / А.И. Степанец. – К. : Наук. думка, 1987. – 268 с.
4. Степанец А.И. Методы теории приближения / А.И. Степанец. – К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 1. – 427 с.

$F(x): X \rightarrow R$, де $F(x) = (f_1(x), \dots, f_i(x), \dots, f_l(x))$, що складається із часткових критеріїв $f_i(x) \rightarrow \max, i \in N_l$ і потрібно знайти альтернативу $x^0 \in X$, на якій ця цільова функція приймає екстремальне значення: $F(x^0) = \text{extr}_{x \in X} F(X)$, $\text{extr} \in \{\min, \max\}$. Для задач оптимізації альтернативи $x \in X$ звичайно називають допустимими розв'язками, x^0 – оптимальний розв'язок, $X = \{x\}$ – множиною допустимих розв'язків де X дискретна.

Розглянемо випадок, коли X – комбінаторна множина розміщень. $F(x) = (f_1(x), \dots, f_i(x), \dots, f_l(x))$ – векторний критерій, заданий на множині $A(B)$ розміщень, породжуваних деякою скінченною мультимножиною $B = \{b_1, b_2, \dots, b_q\}$. Тоді задача має вигляд: $Z(F, X)$.

Задача містить додаткові лінійні обмеження, які утворюють опуклу многогранну множину $D \subset R^n$ вигляду: $D = \{x \in R^n \mid Gx = h\}$, де $G \in R^{m \times n}$, $h \in R^m$. Для подальшого розв'язання задачі будемо граф $G(B)$ многогранника розміщень $M_q^n(B)$ [2]. Граф $G(B)$ складається з підграфів, які є скінченними й ізоморфні між собою і його можна розглядати як скінченний граф, що є об'єднанням чотирьох підграфів (для випадку $n=4$) $G_1(B) = (X_1, U_1)$, $G_2(B) = (X_2, U_2)$, $G_3(B) = (X_3, U_3)$, $G_4(B) = (X_4, U_4)$, де $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \text{vert } M$ і для $G = (X, U)$, $\text{vert } M = X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$, $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4$. Допустимий розв'язок x визначається як підграф $x = (X_x, U_x)$, $X_x \subseteq X$, $U_x \subseteq U$, у якому кожний компонент зв'язності ізоморфний графу $G(B)$, де X – множина допустимих розв'язків на графі. З огляду на багатокритеріальність заданої задачі, зазначимо що її необхідно звести до однокритеріальної задачі. Для цього застосуємо відомий алгоритм лінійної згортки. Ці алгоритми базуються на наступному відомому факті: при додатньо-визначеній вектор-цільової функції елемент $x \in X$, максимізуючий лінійну згортку $F^\lambda(x)$, є Парето-оптимальним. Далі загальна ідея запропонованого підходу розв'язання задачі $Z(F, X)$ полягає в послідовному розгляді підзадач, кожна з яких містить функції з вектор-функції й функції-обмеження. Подальший розв'язок задачі базується на відшуканні підграфу, що визначається множиною вершин і обчислюємо на ньому \min або \max значення цільової функції $f(x)$. Задача розв'язана, якщо значення цільової функції знаходяться в точках на перетині і визначають об'єднання вершин підграфів $G_1(B), \dots, G_n(B)$ [2]. Оскільки розв'язки задачі шукається на скінченній дискретній множині розміщень, то можна гарантувати знаходження хоча б одного Парето-

оптимального розв'язку \tilde{x} задачі $Z(F, X)$ з вектор-цільовою функцією, а відповідно, застосування алгоритму до даного графа $G(B)$, у якого складність знаходження \tilde{x} становить $O(mn^2)$. Подальший розвиток досліджень направлено на реалізацію запропонованого підходу.

Список використаних джерел:

1. Сергиенко И.В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И.В. Сергиенко, М.Ф. Каспшицкая. – К. : Наук. думка, 1981. – 287 с.
2. Донець Г.П. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях : монографія / Г.П. Донець, Л.М. Колечкіна. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 362 с.
3. Донець Г.А. Об одной задаче оптимизации дробно-линейной функции цели на перестановках / Г.А. Донец, Л.Н. Колечкина // Проблемы управления и информатики. – 2010. – №2. – С. 31-41.

УДК 517.95: 519.63

В. М. Колодяжний*, д-р фіз.-мат. наук,

С. М. Ламтюгова**,

О. Ю. Лісіна*, канд. фіз.-мат. наук

*Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків,

**Харківський університет міського господарства ім. О.М. Бекетова, м. Харків

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОВИМІРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОТА МАСОПЕРЕНОСУ ЗА БЕЗСІТКОВИМИ МЕТОДАМИ З ВИКОРИСТАННЯ Р-ФУНКЦІЙ ТА АТОМАРНИХ РАДІАЛЬНИХ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ

Досліджується випадок, коли відшукується розподіл теплофізичних та гідродинамічних характеристик рухомої рідини. Рух середовища описується рівнянням неперервності та рівнянням Нав'є-Стокса [1]. Рівняння неперервності нестисливої рідини розглядаємо у вигляді $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0$. Для компонент швидкості u та v використовуємо представлення через функцію току ψ : $u = \partial \psi / \partial y$, $v = \partial \psi / \partial x$ ($\psi = \text{const}$ – лінії току). Для вихору швидкості двовимірних течій маємо: $\text{rot } v = (0, 0, \omega)$, $\omega = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$. Звідки маємо $\omega = -\Delta \psi$, Δ – оператор Лапласа в декартових координатах. Рівняння руху розглядаємо у вигляді $\partial \omega / \partial t + \text{div}(\omega v) = \nu \Delta \omega + \partial f_y / \partial x - \partial f_x / \partial y$, де ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості; $\nu = \eta / \rho$: η – коефіцієнт в'язкості, ρ – густина середовища; $f = (f_x, f_y)$ – вектор масових сил. Конвективний доданок у цьому рівнянні можна записати в наступному вигляді $\text{div}(\omega v) = v \text{grad} \omega = D(\omega, \psi) / D(x, y) = (\partial \omega / \partial x)(\partial \psi / \partial y) - (\partial \omega / \partial y)(\partial \psi / \partial x)$, де $v = (u, v)$

визначення для компонент швидкості, і розглядати як якобіан перетворення $(\omega, \psi) \rightarrow (x, y)$. На основі виписаного, отримуємо шукану систему рівнянь руху в'язкої нестисливої рідини в змінних «функція току, вихор швидкості». Вихор швидкості можна виключити і отримати одне псевдопараболічне рівняння четвертого порядку для функції току ψ :

$$\partial \Delta \psi / \partial t = D(\Delta \psi, \psi) / D(x, y) = \nu \Delta \Delta \psi - \partial f_y / \partial x + \partial f_x / \partial y.$$

Подібним чином отримуємо і рівняння теплопровідності

$$c_p \rho [\partial T / \partial t + D(T, \psi) / D(x, y)] = \text{div}(k \text{ grad } T) + \eta \Phi$$

з відповідним виразом для дисипативної функції Φ :

$$\Phi = (\partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial y^2)^2 + 4(\partial^2 \psi / \partial x \partial y)^2.$$

Умови не протікання та прилипання дають дві умови для функції току:

$$\psi = \text{const}, \quad \partial \psi / \partial n = 0, \quad (x, y) \in \partial \Omega.$$

Для розв'язання даної системи рівнянь пропонується використовувати підхід на основі застосування числового методу R -функцій [3]. Альтернативним підходом для вирішення представленої задачі є безсітковий метод, який пропонується реалізувати за схемою, що описана в роботі [4], але передбачає використання спеціальних атомарних радіальних базисних функцій [2], а саме фінітних нескінченно диференційованих розв'язків функціонально-диференціальних рівнянь, побудова яких здійснюється за допомогою бігармонічного оператора $\Delta \Delta = (\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2)^2$:

$$\Delta \Delta u(x, y) = \lambda_1 \oint_{S_1} u[5(x - \xi), 5(y - \eta)] ds + \lambda_2 \oint_{S_2} u[5(x - \xi), 5(y - \eta)] ds + \mu u(5x, 5y),$$

де $\partial S_1 : \xi^2 + \eta^2 = 4 / 25$, $\partial S_2 : \xi^2 + \eta^2 = 16 / 25$.

Існування атомарної радіальної базисної функції, яка являється розв'язком наведеного вище рівняння, гарантується при наступних значеннях коефіцієнтів: $\mu = 24\pi\lambda_2 / 5$, $\lambda_1 = -2^3 \lambda_2$, $\lambda_2 = 5^7 / 24\pi$.

Список використаних джерел:

1. Самарский А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабишевич. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
2. Колодяжный В.М. Атомарные функции. Обобщения на случай многих переменных и перспективные направления практических приложений / В.М. Колодяжный, В.А. Рвачев // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – №6. – С. 155-177.
3. Lamtyugova S.N. Numerical analysis of the external flows of a viscous fluid using the R-function method / S.N. Lamtyugova, M.V. Sidorov // Journal of Engineering Mathematics. – 2015. – Vol. 91, №1. – P. 59-79.
4. Лисина О.Ю. Моделирование тепловых полей в машиностроительных изделиях неканонической формы / О.Ю. Лисина // Проблемы машиностроения. – 2011. – Т.14, №6. – С. 57-64.

О. Є. Колосов, д-р техн. наук,
В. І. Сівецький, канд. техн. наук

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ПІДХОДИ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНІЧНИХ ЗАСОБІВ ДЛЯ ОДЕРЖАННЯ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ КОМПОЗИТИВ

Протягом останнього десятиріччя у всьому світі спостерігається високий попит на інноваційні інтелектуальні полімерні композиційні матеріали (ІПКМ) та вироби з них, у т.ч. на базі наномодифікаторів та сплавів з магнітними властивостями, волоконно-оптичних і п'єзоелектронних датчиків тощо.

Це обумовлено тим, що створення «інтелектуальних матеріалів» на базі полімерів відкриває принципово нові можливості для розроблення сучасної техніки. Їх використання дозволяє експлуатувати цю техніку при критичних навантаженнях в умовах, коли ніякі інші методи контролю стану матеріалу і коригуючого впливу на нього не можуть бути використані за конструктивних або технологічних причин.

У даний час «інтелектуальні» армовані полімерні композити використовуються, головним чином, в конструкціях літальних апаратів та іншої техніки, від життєздатності якої залежать можливості виконання стратегічних завдань.

Постійний моніторинг напружено-деформованого стану відповідальних виробів з ІПКМ, зокрема, може бути забезпечений за умов направленої введення мінімальної кількості інтелектуальних датчиків для отримання шуканої інформації.

Сучасні теорії підготовки розчинів (розплавів) полімерів та ІПКМ на їх основі будуються на попередньому визначенні поля швидкостей та деформацій, що накопичуються в них, по наближеним залежностям. Останні базуються на припущенні, що рух розчинів (розплавів) полімерних композицій в каналах устаткування відбувається по відносно простим траєкторіям, при яких циркуляційні процеси мало впливають на інтенсивність деформування. Але реальне конструктивне оформлення робочих органів устаткування суттєво перебудовує потоки, що зумовлює компоненти полімерних композицій рухатись хаотично, забезпечуючи їх необхідний перерозподіл у полімерній матриці.

Тому є необхідним при комплексний підхід з використанням моделювання процесів взаємодії компонентів, що знаходяться в різному фазовому стані, включаючи можливість фазових перетворень, із застосуванням фундаментальних законів збереження в рамках механіки суцільного середовища.

Такий підхід дозволяє використовувати результати чисельного моделювання зміни конфігурації поперечного перерізу профільних виробів складної геометрії з урахуванням в'язкопружних ефектів і на цій основі здійснювати коригування конструкції устаткування для забезпечення заданої конфігурації і розмірної точності виробів з ІПКМ.

За аналогією з технологією виготовлення термопластичних полімерних виробів з ефектом пам'яті форми, пропонується використовувати термореактивні полімери, в яких за наявності сітки хімічних вузлів відбувається згортання не молекулярних ланцюжків, а міжвузлових фрагментів, зорієнтованих при твердофазному витягу. Шукане досягнення направленої зміни структури і збільшення ступеня термоосадження можливе за допомогою застосування ультразвуку (УЗ). Одержувати вироби з наперед заданим рівнем термоосадження можливо за рахунок використання ефективних режимів УЗ-дії з одночасним зменшенням коефіцієнту варіації властивостей міцності.

Ще одним напрямком одержання ІПКМ є використання наномодифікаторів як каталізаторів процесів їх зшивання та затвердіння функціональних груп полімерів.

Таким чином, доцільно застосовувати комплексний підхід до розроблення методів компаундування інгредієнтів інтелектуальних полімерних композицій і формування виробів з них, в тому числі з використанням УЗ-обробки та наномодифікованих наповнювачів і методів моделювання всіх стадій формування.

Його передбачається реалізувати на основі розробленої комплексної методики аналізу протікання процесів компаундування та формування виробів і виникнення та дії залишкових напружень в виробах з ІПКМ, а також удосконалення існуючої технології їх виробництва і розроблення інноваційних конструкцій устаткування.

Висновки. Основний метод моделювання технічних засобів для одержання ІПКМ – комплексний, який полягає у спільному використанні експериментально-статистичного, математичного та комп'ютерного моделювання з наступним підтвердженням адекватності отриманих результатів експериментами та випробуваннями.

Список використаних джерел:

1. Колосов О.Є. Одержання волокнистонаповнених реактопластичних полімерних композиційних матеріалів із застосуванням ультразвуку : [монографія] / О.Є. Колосов, В.І. Сівецький, О.П. Колосова. – К. : ВПК «Політехніка», 2015. – 295 с.

УДК 514.18

О. П. Колосова

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

РЕЗУЛЬТАТИ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТА ОБЛАДНАННЯ ДЛЯ ОДЕРЖАННЯ РЕАКТОПЛАСТИЧНИХ ВОЛОКНИСТИХ КОМПОЗИТІВ

Відомо, що моделювання (геометричне, комп'ютерне та експериментально-статистичне) технологічних параметрів процесів виготовлення композиційно-волокнистих матеріалів (КВМ), а також конструктивних параметрів формуютьоровального технологічного обладнання, мають важливе значення.

Незважаючи на досягнутий прогрес у сфері автоматизованого проектування виробництва КВМ, у багатьох випадках проектні рішення, що приймають розробники у тій чи іншій ситуації, ґрунтуються на їх особистому досвіді та часто будуються переважно на евристичних засадах. Вирішення цієї проблеми у значній мірі можливе шляхом використання інформатизації виконуваних проектно-технологічних робіт у хімічному та спеціальному машинобудуванні, у т.ч. геометричного та комп'ютерного моделювання.

У результаті виконання досліджень було отримано такі нові результати, що мають науково-практичну значимість.

1. На основі аналізу існуючих підходів до моделювання технологічних процесів обґрунтовано актуальність дослідження та застосування системного підходу при розробленні узагальненої структурно-параметричного геометричного моделювання (СПГМ) технології одержання високоміцних й бездефектних реактопластичних КВМ із застосуванням УЗ (ультразвукової) обробки та застосовуваного при цьому обладнання.
2. Проаналізовано особливості геометричного моделювання формувальних елементів трьох виокремлених структурних блоків технологічної схеми інноваційного одержання КВМ, а саме: УЗ-обробки епоксидної смоли і приготування просочувальної композиції, «вільного» просочення волокнистих наповнювачів (ВН) озвученим рідким полімерним зв'язуючим (ПЗ), а також дозованого нанесення озвученого ПЗ на просочений ВН.
3. Удосконалено загальну методику застосування автоматизованого СПГМ як основи для проведення оптимізації конструкції хвилеводів і концентраторів УЗ-технологічного обладнання з урахуванням не тільки ефективності їх функціонального призначення, а й особливостей процесів виготовлення.
4. Проведено раціональне параметричне конструювання простих акустичних концентраторів УЗ на прикладі найбільш використовуваних циліндричних, конічних, експонентних і катеноїдальних акустичних концентраторів.
5. Удосконалено теорію геометричного моделювання базового процесу «вільного» просочування ОВН рідкими ПЗ, що надає практичний та зручний інструмент для аналізу і корекції схеми армування ОВН з урахуванням зусилля натягнення та геометричних параметрів змотувального й просочувального обладнання.
6. Здійснено геометричне та комп'ютерне моделювання мікроструктури просочуваного ОВН із застосуванням методології інтегральної геометрії та геометричних ймовірностей, що передбачає знаходження функції розподілу відстаней між сусідніми колами (екстхорд) геометричної моделі мікроструктури композитів.
7. Удосконалено методику та розроблено алгоритм моделювання параметрів базового процесу «вільного» просочування, що передбачає апроксимацію реальної мікроструктури армування ОВН геометричною моделлю ЕБК та еквівалентним циліндричним капіляром, для якого

знаходять геометричні та структурні характеристики за вхідними умовами технологічного процесу.

8. Уперше розроблено методику та алгоритм комп'ютерного СПГМ складеного УЗ-кавітаційного дозуючого пристрою, що складається з прямокутної випромінюючої пластини, двоступінчастих хвилеводів-концентраторів та ПЕП. Здійснено параметричну візуалізацію розробленого алгоритму на базі використання нових параметричних геометричних моделей, які наочно відображають існуючі варіаційні взаємозв'язки між елементами конструкцій створюваних виробів.
9. Уперше сформована комп'ютерна 3D-модель для наступних структурних елементів складеного дозуючого УЗ-пристрою: ширини, довжини, товщини випромінюючої пластини; товщини ПЕП; товщини електродів; внутрішнього діаметра частотознижуючих накладок та їх висоти; діаметрів ступенів складених УЗ-концентраторів і довжин їх циліндричних частин.

Список використаних джерел:

1. Колосов О.Є. Одержання волокнистонаповнених реактопластичних полімерних композиційних матеріалів із застосуванням ультразвуку : [монографія] / О.Є. Колосов, В.І. Сівецький, О.П. Колосова. – К. : ВПК «Політехніка», 2015. – 295 с.
2. Колосова О.П. Моделювання процесів виготовлення реактопластичних композиційно-волокнистих матеріалів : [монографія] / О.П. Колосова, В.В. Ванін, Г.А. Вірченко, О.С. Колосов. – К. : ВПК «Політехніка», 2016. – 164 с.

УДК 517.946

І. М. Конет, д-р фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ГІПЕРБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В ОБМЕЖЕНИХ НЕОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Розглядається задача побудови обмеженого на множині

$$D = \{(t, r, \varphi, z) : t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j = \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j); \varphi \in [0; 2\pi); \\ z \in (-l_1; l_2); l_1 \leq 0; l_2 \geq 0; |l_1| + |l_2| \neq 0\}$$

2π -періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [1]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \Delta_j u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z); \quad r \in I_j; j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$u_j \Big|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z); \quad r \in I_j; j = \overline{1, n+1},$$

відповідними крайовими умовами та умовами спряження [2]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right]_{r=R_k} = 0; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n},$$

де $\Delta_j = a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа для ортогонального середовища у циліндричній системі координат; $a_{rj}, a_{zj}, \chi_j, \alpha_{js}^k, \beta_{js}^k$ – деякі сталі; f_j, g_j^1, g_j^2 – задані двічі неперервно диференційовні функції; $u(t, r, \varphi, z) = \{u_1(t, r, \varphi, z), u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z)\}$ – шукана функція.

Щодо проміжку I_n^+ розглянуто випадки:

- 1) $R_0 = 0; R_{n+1} = +\infty$ (шар);
- 2) $R_0 > 0; R_{n+1} = +\infty$ (шар з порожниною);
- 3) $R_0 = 0; R_{n+1} \equiv R < +\infty$ (суцільний циліндр);
- 4) $R_0 > 0; R_{n+1} \equiv R < +\infty$ (порожнистий циліндр).

Інтегральне зображення точних аналітичних розв'язків досліджуваних гіперболічних початково-крайових задач спряження одержано в замкнутій формі методом інтегральних та гібридних інтегральних перетворень у поданні з методом головних розв'язків (матриць впливу і матриць Гріна).

Побудовані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задач й можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків коливних процесів у кусково-однорідних середовищах.

Список використаних джерел:

1. Самойленко В.Г. Рівняння математичної фізики / В.Г. Самойленко, І.М. Конет. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2014. – 283 с.
2. Конет І.М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І.М. Конет. – Кам'янець-Подільський : Видавництво Абетка-Світ, 2013. – 120 с.

УДК 681.3.057:518.12

Н. Л. Костьян, канд. техн. наук

Восточноевропейский университет экономики и менеджмента, г. Черкасы

КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ СИСТЕМ

Теоретический и практический интерес к созданию, исследованию и применению методов и средств решения обратных задач определяется необходимостью в разработке новых методов обработки сигналов, а также повышенной, по отношению к прямым задачам, сложностью задач этого вида.

На основе эффективного использования платформы системы MATLAB был разработан комплекс программ, который позволяет решать широкий класс обратных задач динамики технических объектов и систем с возможностью обеспечения необходимой точности и быстродействия. Пакет состоит из тринадцати основных модулей, предназначенных непосредственно для решения задач идентификации и восстановления входного сигнала динамических объектов, семи модулей, реализующих оконный интерфейс и обеспечивающих диалоговый процесс решения модельных примеров, а также одиннадцати дополнительных модулей, вызываемых основными в качестве подпрограмм.

Основные модули разработанного пакета имеют следующее назначение: `MSM_general`, `inv_general` – реализация интегрального метода идентификации (решение уравнения Вольтерра II рода) на основе методов наименьших квадратов и обратных матриц соответственно [1]; `paramsMSM`, `paramsLM` – расчет параметров дифференциального уравнения оптимизационными методами (наименьших квадратов и Левенберга-Маркарда [2]); `calcZ`, `calcPIinvZ` – аналитическое представление экспериментальных зависимостей на основе обратного z-преобразования передаточной функции с использованием методов наименьших квадратов и псевдообратной матрицы [3]; `polyCoef` – определение коэффициентов переходной характеристики динамического объекта; `coefH` – расчет коэффициентов передаточной функции на основе преобразования Лапласа-Карсона; `voltITrad` – решение интегрального уравнения Вольтерра I рода на основе традиционного подхода; `voltIMod` – реализация модифицированного алгоритма решения интегрального уравнения Вольтерра I рода с возможностью выбора типа ядра; `errorMiddle2`, `errorMax` – расчет среднеквадратической и максимальной абсолютной погрешностей выходного сигнала соответственно. Полученные параметры передаточных функций являются также коэффициентами соответствующих дифференциальных уравнений, что позволяет получать эквивалентные математические модели в виде интегральных уравнений. Оптимизационные методы рекомендуется применять для идентификации систем при низкочастотных сигналах.

Для идентификации динамических характеристик объекта используется дополнительный модуль `ident_App`, вызывающий подпрограмму для решения систем с плохо обусловленной матрицей, которая была протестирована для вещественных матриц Ганкеля с размерностью $n = 700$.

При использовании комплекта программ для решения обратных задач динамики предусмотрена возможность обработки значений функций входного и выходного сигналов, заданных как в аналитическом, так и в табличном виде. В последнем случае экспериментально полученные данные предварительно записываются в файлы формата *.doc или *.txt

Эффективность программных модулей оценивалась при решении группы тестовых примеров по таким критериям как точность решения и время выполнения. Есть возможность наложения на входной сигнал $f(t)$ аддитивной помехи, которая может быть представлена в следующем виде: случайной помехой, распределенной по нормальному закону; случай-

ной помехой с учетом амплитуды входного сигнала и синусоидальной помехи $\varepsilon = kf(t)\sin(t)$, где k – коэффициент, задающий уровень помехи. Соответствующий выходной сигнал рассчитывается с помощью метода Рунге-Кутты 4 и 5 порядков при известных точных значениях параметров.

Предусмотрена возможность построения графиков функций сигналов и абсолютной погрешности решения.

Результаты тестирования позволяют сделать вывод о том, что разработанное программное обеспечение полностью соответствует требованиям, предъявляемым к современным пакетам прикладных программ для компьютерного моделирования.

Список использованной литературы:

1. Костьян Н.Л. Метод идентификации интегральных моделей линейных динамических объектов / Н.Л. Костьян // Вісник ЧДТУ. Серія: Техн. науки : зб. наук. праць. – Черкаси : ЧДТУ, 2013. – №2. – С. 84-89.
2. Гилл Ф. Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт ; пер. с англ. – М. : Мир, 1985. – 509 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М. : Физматлит, 2004. – 560 с.

УДК 685.34

Б. О. Красницький

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

АНАЛІЗ СПОЖИВЧОЇ ПОВЕДІНКИ З МЕТОЮ ЗДІЙСНЕННЯ ЦІНОВОЇ ДИСКРИМІНАЦІЇ

Цінова дискримінація як економічна категорія застосовується з першої половини ХХ століття. А.Пігу була запропонована найбільш повна теоретична класифікація типів цінової дискримінації, яка лежить в основі значної частини сучасних досліджень в цій області. З середини ХХ століття до початку 1990-х років найбільш значущі дослідження в області цінової дискримінації були пов'язані з розвитком теоретичної і методичної бази виявлення цінової дискримінації, а також з різними аспектами систематизації окремих випадків цінової дискримінації. Зокрема, Ф. Махлуп була запропонована класифікація зустрічаючихся на практиці видів цінової дискримінації. Також значна кількість досліджень в цей час було присвячено розгляду випадків, повністю або частково не відносяться до класифікації А. Пігу, наприклад, просторової цінової дискримінації і зв'язковим продажу [1].

Застосування інструментів аналізу споживчої поведінки з метою здійснення цінової дискримінації – найбільш значуще напрямком теоретичних і імперіческіх досліджень в галузі вивчення даного виду цінової поведінки домінуючої фірми в сучасних дослідженнях, завдяки яким з середини 2000-х в іноземній літературі набув широкого поширення термін, що визначає даний вид цінової дискримінації, – поведінка на основі

цінової дискримінації (BBPD). Мабуть, найкращим прикладом буде покупка авіаквитків через інтернет [2]. З моменту початку пошуку квитка і до його придбання проходить, наприклад, 2-4 дня, і ціна авіаперельоту постійно змінюється, як акції на фондовому ринку. Чому? Пошукові патерни зчитуються певними алгоритмами, які на основі поведінкової психології і великої кількості змінних (кеш, реферальні хвости, IP, куки і т.д.) оптимізують прибуток авіакомпаній шляхом створення індивідуальної ціни. Така прийом абсолютно законна в Україні, і є частиною стратегії гнучких цін в роздрібній торгівлі в деяких компаніях.

Даний вид дискримінації дозволяє визначати спосіб встановлення домінуючою фірмою диференційованих, часто включають в себе одночасно типи дискримінації за класифікацією А. Пігу (теоретичний підхід) і відповідно до підходу Ф. Махлуп (практичний підхід). Наприклад, в практиці може зустрічатися такий вид ціноутворення домінуючою фірми, як встановлення меж цінових діапазонів для різних груп споживачів, що представляє собою третій тип дискримінації за класифікацією А. Пігу, і призначення цін конкретним споживачем всередині груп цін в межах даного діапазону. При цьому, розглядаючи тільки дані продаж фірм, можна сказати, що даний підхід до встановлення цін і виявлення поділу на споживачів групи може бути неочевидним, так як межі діапазонів різних груп можуть перетинатися, а широта діапазону – варіюватися в залежності від сезонності або факторів зовнішніх ринків.

Висновок. Застосовуючи цінову дискримінацію підприємство збільшує обсяги виробництва і продаж, отримує додаткові доходи. При тих же витратах на одиницю продукції додаткові доходи перетворюються на додаткові прибутки. Слід зазначити, що у випадках державного регулювання цін (зокрема, в сферах діяльності, що віднесені до природних монополій), цінова дискримінація обмежується і розглядається як засіб отримання монопольних «надприбутків». Для недержавного регулювання ціни, компанія при тому ж показнику SAS-клієнта, в моделях, наприклад, Open Source, SaaS, Freemium, можна значно збільшити LTV. Тим паче, в сфері електронної комерції це може збільшити загальну прибутковість компанії в рази. Більш детально, треба розглядати MCC і весь комплекс inbound marketing для оптимізації такої моделі до реалій певної галузі та компанії.

Список використаних джерел:

1. Методологічні проблеми фінансової теорії та практики в умовах проведення системних реформ : матер. наук. конф. проф.-викл. складу. – Тернопіль : Видавничий центр «Вектор», 2011. – 88 с.
2. Крэм Т. Классная цена.: О секретах умного ценообразования / Т. Крэм // Olympus Business. – 2010. – 224 с.
3. Соловьев В.И. Стратегия и тактика конкуренции на рынке программного обеспечения: Опыт экономико-математического моделирования / В.И. Соловьев. – 2010. – Режим доступу: <http://visoloviev.ru/booksmath/STCPO.pdf>.

Ю. Г. Кривонос*, д-р. фіз.-мат. наук,

Ю. В. Крак***, д-р. фіз.-мат. наук,

О. В. Бармак***, д-р. техн. наук,

Р. О. Багрій***

*Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАНУ, м. Київ,

**Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ,

***Хмельницький національний університет, м. Хмельницький

ІНТЕЛЕКТУАЛІЗАЦІЯ ВВЕДЕННЯ ТЕКСТОВОЇ ІНФОРМАЦІЇ ПРИ АЛЬТЕРНАТИВНІЙ КОМУНІКАЦІЇ

Концепція альтернативної та додаткової комунікації (Augmentative and Alternative Communication – AAC) [1] ще недостатньо відома в Україні. Між тим, співтовариство фахівців, користувачів та виробників AAC вже більш ніж 30 років як створило напрям та самостійну область міждисциплінарного знання. Активним розвитком концепція завдячує ідеям інклюзії – включення людей з обмеженими можливостями життєдіяльності у загальнолюдську комунікацію.

Існування у сучасному суспільстві груп людей з обмеженими можливостями для спілкування (з вадами слуху, з щелепо-лицьовими травмами, після інсультів тощо) спонукає до досліджень альтернативних засобів комунікації для таких людей. Одним із засобів такої комунікації є рухи тіла: жести руками, конфігурації кисті, рухи очима та головою тощо.

Метою досліджень є проектування інформаційної технології, яка допомогла б реалізації альтернативних підходів до спілкування. Основна ідея технології полягає у створенні комплексного підходу до реалізації альтернативної комунікації. Апаратно-програмна реалізація технології повинна забезпечити комунікацію максимально-можливими способами.

Для реалізації поставленої мети запропонована інформаційна технологія, яка, з використанням сучасних ІТ-пристроїв (нетбуки, планшети, телефони тощо), дозволить реалізувати альтернативну комунікацію для людей, що її потребують.

Вхідна інформація для введення за допомогою ІТ-пристроїв потребує реалізації функцій управління курсором (переміщення курсору для вибору/вказування) та функцій безпосереднього введення найменшої комунікаційної одиниці – символу (букви). Для інтелектуалізації введення інформації запропоновано використовувати систему прискореного введення тексту у цифрові пристрої, яка в процесі введення блоків (множин) із букв прогнозує слова, що можуть утворюватись із елементів цих множин, базуючись на даних словників. Вихідна інформація може бути відтворена на пристрої у вигляді: звичайного тексту, звукового файлу, послідовності жестів (жестовою мовою) тощо. Окремо декларується можливість динамічного розширення запропонованої технології: додавання функцій управління курсором, введення символу, інтелектуалізації введення тексту, виведення текстової інформації.

У рамках зазначеного напрямку актуальними є дослідження та вдосконалення існуючих технологій введення тексту з прогнозуванням

(Predictive text) [2]. Їх суть полягає у використанні меншої кількості (відносно загального числа букв) керуючих дій з наступною інтелектуалізацією для повноцінного введення тексту.

Огляд способів інтелектуалізації введення тексту показав, що вказана проблема вирішувалась для систем введення текстової інформації у мобільні пристрої з цифровими кнопками. За допомогою 9-ти цифрових кнопок пропонувалися різні способи введення буквенної інформації. Можна виділити наступні методи введення (Input Methods): Multi-press, Two-key та T9.

Мінімізація кількості керувань для введення текстової інформації є важливою для альтернативних систем комунікації. Найбільш вартим уваги є T9 Input Method. Він вирішує проблему неоднозначності шляхом використання певних лінгвістичних знань. T9 знаходить можливі слова для такої комбінації кнопок за лінгвістичною базою та "передбачає" очікуване слово. Лінгвістична неоднозначність не є досконалою, так як багато простих слів можуть мати одну й ту ж послідовність кнопок. В цих випадках T9 пропонує слово, яке частіше використовується, як слово за замовчуванням.

Подальші дослідження направленні на інтелектуалізацію введення текстової інформації та реалізацію на базі цих досліджень інформаційної технології альтернативної комунікації для людей з відсутнім каналом основної вербальної комунікації, зокрема, для людей з вадами слуху.

Список використаних джерел:

1. Augmentative and Alternative Communication (AAC). – Режим доступу: <http://www.asha.org/public/speech/disorders/AAC/>.
2. Silfverberg M. Predicting text entry speed on mobile phones / M. Silfverberg, I.S. MacKenzie, P. Korhonen // Proceedings of the ACM Conference on Human Factors in Computing Systems – CHI 2000. – New York : ACM, 2000. – P. 9-16.

UDC 517.95

G. Kuduk

University of Rzeszow, Rzeszow, Poland

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR NONHOMOGENEOUS PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FIRST ORDER

In the strip $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, T), x \in \mathbb{R}\}$ we consider the problem with integral condition of the form

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right] U(t, x) = f(t, x), \quad t \in (0, T), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$\int_0^T g(t) U(t, x) dt = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

where $T > 0$, $U(t, x)$ is an unknown function, $f(t, x)$ and $g(t)$ are given functions, $a \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ is the differential expression with entire symbol $a(\lambda)$. Ac-

ording to the differential-symbol method [1] the solution of the problem (1), (2) in the special class of quasipolynomials is represented in the form

$$U(t, x) = f\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial \lambda}\right)\{G(t, v, \lambda)\exp[\lambda x]\}_{\lambda=0},$$

where $G(t, v, \lambda)$ is a solution of the problem

$$\left[\frac{d}{dt} - a(\lambda)\right]G(t, v, \lambda) = \exp[vt],$$

$$\int_0^T g(t)G(t, v, \lambda)dt = 0.$$

References:

1. Kalenyuk P.I. Generalized Scheme of Separation of Variables. Differential-Symbol Method / P.I. Kalenyuk, Z.M. Nytrebych. – Lviv : Publishing House of Lviv Polytechnic National University, 2002. – 292 p. (in Ukrainian).

UDC 517.95

G. Kuduk*,

M. M. Symotyuk**, cand. of sciences,

* University of Rzeszow, Rzeszow, Poland

**Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, Ukraine

NONLOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER

Let $\Pi(T) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, T), x \in \mathbb{R}\}$, $T > 0$. Let us denote by $E_{\alpha, \beta}$ ($\alpha, \beta \geq 0$) the space of functions $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ with the norm [1]

$$\|\varphi\|_{E_{\alpha, \beta}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varphi}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2\alpha} \exp(2\beta|\xi|) d\xi} < \infty,$$

where $\tilde{\varphi}(\xi)$ is the Fourier transform of function $\varphi(x)$.

In the domain $\Pi(T)$ we study the next problem

$$u_{tt}(t, x) + a_1 u_{tx}(t, x) + a_2 u_{xx}(t, x) = 0, \quad t \in (0, T), \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

$$p_j(\partial / \partial x)u(t, x)\Big|_{t=(j-1)T} + \int_0^T t^{j-1}u(t, x)dt = \varphi_j(x), \quad j = 1, 2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

where $p_1(\partial / \partial x)$, $p_2(\partial / \partial x)$ are differential polynomials. Assuming that the real parts of roots of the polynomial $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ are nonzero and different, the correctness of the problem (1), (2) in the space of functions

$C^2([0, T]; E_{\alpha, \beta})$ is established. This result continues the research of the work [2] in the case of the integral problem in the unlimited strip.

References:

1. Dubinskii Yu.A. The algebra of pseudodifferential operators with analytic symbols and its applications to mathematical physics / Yu.A. Dubinskii // Russian Mathematical Surveys. – 1982. – №37(5)ю – P. 109-153.
2. Kalenyuk P.I. Generalized Scheme of Separation of Variables. Differential-Symbol Method / P.I. Kalenyuk, Z.M. Nytrebych. – Lviv : Publishing House of Lviv Polytechnic National University, 2002. – 292 p. (in Ukrainian).

УДК 372.853.53

А. М. Кух, канд. пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПЕДАГОГІЧНА СИСТЕМА ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ

Для побудови ефективних педагогічних систем необхідно всебічно вивчати інноваційні системи і технології. Дистанційне навчання (ДН), яке є сьогодні реальною дієвою альтернативою традиційній системі навчання має ряд відмітних позитивних педагогічних особливостей. Проаналізуємо його з погляду організації навчального процесу.

Основною метою ДН є набуття кожним студентом системи умінь і знань, які формуються відповідно до моделі фахівця і держзамовлення. Зміст ДН – це склад, структура і навчальна інформація, а також комплекс задач, завдань і вправ, що передаються студентам, для формування в них професійних навичок і умінь, які сприяють накопиченню первинного досвіду трудової діяльності. Об'єктом ДН є користувачі освітніх послуг (студенти, слухачі, і т.д.). Слухачі ДН на відміну від студентів традиційних форм отримання освіти, працюють в умовах самоосвіти, виявляючи велику наполегливість, прагнення до знань, організованість, уміння працювати самостійно і володіють навичками роботи з комп'ютером і телекомунікаційними засобами зв'язку. Суб'єктами навчання ДН є викладачі.

Викладач – головна ланка в забезпеченні високої ефективності освітнього процесу ДН. Значна специфіка діяльності викладача ДН викликала необхідність ввести термін тьютор. Це – викладач, який повинен знати основи фундаментальної інформатики і телекомунікацій, а методи навчання повинні носити випереджаючий характер. Методи навчання – дидактична категорія, що дає теоретичне уявлення про систему норм взаємодії викладача і тих, хто навчається. Дистанційна форма навчання включає п'ять загальних дидактичних методів навчання: інформаційно-рецептивний, репродуктивний, проблемний виклад, евристичний і дослідницький. Вони охоплюють всю сукупність педагогічних актів взаємодії викладача і студента.

Найважливіша складова організації і якості дистанційної освіти – постановка роботи тьюторів. Тьютори уособлюють в собі:

- якості викладача: проводять ввідне і завершальне заняття, допомагають слухачам в їх професійному самовизначенні, забезпечують правильне і ефективне використання навчально-методичного супроводу курсу;
- якості консультанта: координують пізнавальний процес слухачів, проводять групові консультаційні і комунікативні заняття, індивідуально консультують слухачі з різних питань курсу, що вивчається; – якості менеджера: здійснюють набір і формування груп слухачів, складають графік навчального процесу, керують проведенням групових занять контролюють виконання слухачами графіка навчального процесу (проміжні тести, підсумкові тестування, екзамен).

У системі дистанційного навчання реалізується підтримка наступних основних методів:

Методи навчання за допомогою взаємодії студента з освітніми ресурсами при мінімальній участі викладача і інших студентів (самонавчання).

Методи викладання, що індивідуалізують навчання, для яких характерні взаємостосунки одного студента з одним викладачем або одного студента з іншим студентом (навчання "один до одного").

Методи, в основі яких лежить подання студентам навчального матеріалу викладачем або експертом, при якому студенти не виконують активну роль в комунікації (навчання "один до багатьох").

Методи, для яких характерна активна взаємодія між всіма учасниками навчального процесу (навчання "багато до багатьох").

Особливу роль в навчальному процесі виконують комп'ютерні конференції, які дозволяють всім учасникам дискусії обмінюватися письмовими повідомленнями як в синхронному, так і в асинхронному режимі, що має велику дидактичну цінність.

Таким чином, дистанційне навчання володіє рядом відмінних інноваційних рис сучасної системи освіти. При цьому викладач розв'язуючи задачі ефективного управління навчанням та об'єктивного оцінювання знань розвиває свої професійні навички та уміння.

УДК 272.853.53

О. М. Кух,

А. М. Кух, канд. пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-подільський

СЕРВІСИ GOOGLE ДЛЯ СТВОРЕННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-ОСВІТНЬОГО СЕРЕДОВИЩА

Сьогоднішня вищої і загальноосвітньої школи охоплене глобальною задачею організації інформаційно-освітніх середовищ для забезпечення якості освіти. І успішність розв'язання цієї проблеми у значній мірі залежить від відповіді на питання – які уявлення і очікування самого вчителя про структуру та функції інформаційно-освітньої середовища. Спробує-

мо розглянути якими можуть бути потреби вчителя у функціоналі ІОС через призму сервісів, які надає Google Apps.

Підготовка до уроків, в умовах доступного Інтернету, по-перше, займає левову частку робочого часу, по-друге, дійсно, одна з найактуальніших щоденних проблем-завдань. Додаткова вимога до такого середовища – як раз – «хмарність» – доступність з будь-якої точки, зі школи чи дому. Ще одне – можливість колективної розподіленої роботи і обміну з колегами зі своєї школи, а може бути, і іншими мережевими співавторами. Сьогодні вже нікого не здивуєш електронним конспектом, тезами лекцій, приготованими вчителем для «розшарювання» зі своїми учнями, але для цього і потрібні спеціальні інструменти такі як Google Apps Education Edition а саме, служби, що забезпечують співпрацю.

- 1) початкова сторінка і Google;
- 2) документи Google;
- 3) Google Page Creator для створення веб-сторінок.

Також застосовні Google служби

- а) панель управління;
- б) API для розширення;
- в) довідка та підтримка.

Розробка навчальних матеріалів. Цій потреби, мабуть, стільки ж років, скільки, взагалі, існує школа. Незважаючи на всі підручники і посібники, учитель, прагнучи пояснити і показати краще, наочніше, вечорами готує свої матеріали: паперові картки, плакати, або навчальні матеріали в цифровому вигляді. Важливе питання – питання якості розроблюваних матеріалів, їх анутовання і використання матеріалів інших авторів. І знову він може вирішуватися тільки за рахунок доступу до відкритих освітніх ресурсів, за рахунок можливостей колективного авторства. Google Apps Education Edition пропонує загальні служби і сервіси

- 1) Google Blogger;
- 2) Google Reader;
- 3) YouTube;
- 4) Веб-альбоми Picasa;
- 5) Google Maps.

Організація навчального процесу. Різні форми навчальних занять – урок 1:1, і урок в моделі BYOD, і дистантний урок, і навіть урок «поза класною кімнатою», як і навчальний проект на позакласних годинах вимагають комфортного і безпечного навчального середовища з базовим набором функцій, до яких відноситься: можливість структурування навчального матеріалу, організація навігації по сайту, зручність розміщення посилань на ресурси, простота забезпечення спільного доступу і відстеження інформації про дії учня на сайті. Очевидно тут застосовні сервіси Google

- 1) Gmail;
- 2) GoogleTalk;

- 3) Календар Google;
- 4) Групи Google.

Зміна оргформ. Можливості Google Sites в якості середовища навчання значно розширюють діапазон форм навчання: створення тематичних сайтів – віртуальних подорожей, екскурсій, мандрівок можливе із залученням сервісів GoogleYouTube або Smotri.com, веб-альбому Picasa і GoogleMaps.

Оцінювання роботи учнів. У розумінні вчителя журнал – місце обліку: відвідуваності, старанності, академічних результатів учня. Для того, щоб учитель почав розглядати електронну середовище більш широко, у нього повинні бути специфічні запити до цієї середовищі. Наприклад, у розгортанні формує, підтримує оцінювання, однією з найбільш розроблених і перспективних форм якого є електронне портфоліо учня. Тут корисними будуть сервіси Google Class Room і Google Room Manager? які крім обліку успішності дозволяють керувати навчальними курсами в визначеному класі і фіксувати просування учнів в навчанні

Участь у шкільному інформаційному обміні та документообігу. Два найважливіших критерії для визначення функціоналу ІОС в цій галузі – зручність (куди входить і безпека) і можливості колективної роботи. Всі типи документів і шкільної звітності, відзначимо, що робота з ними може бути оптимізована, спрощено. Стандартизація форм звітності забезпечується шаблонами Google Doc.

Спілкування з батьками і соціумом. Зрозуміло, що ні шкільна корпоративна пошта, ані освітні блоги, які вчителі відкривають для того, щоб зробити свою роботу більш відкритою для батьків, не можуть залишатися лише засобом внутрішньошкільного спілкування. Зрозуміло, що функціонально вони підтримують механізми мовлення та інтерактивного взаємодії школи та соціуму. Але, що є більш важливим, тут починає працювати і механізм залучення представників цього самого соціуму в життя школи, що відкриває для неї нові ресурси. Тому використання служб Google Gmail, Google Talk, Календар Google, Google Bloggerє перспективним в розв'язанні і цього завдання

Висновки. Вцілому службиGoogleстворює передумови для високо-ефективного інформаційно-освітнього середовища на базі основних його служб іGoogle, Gmail, Google Talk, календар Google, GoogleBlogger, групи Google, документи Google, Google Page Creator, YouTube, Smotri.com, веб-альбомів Picasa і Google Maps.

Список використаних джерел:

1. Кух А.М. Освітнє середовище в структурі інноваційної системи фахової підготовки майбутніх учителів фізики / А.М. Кух. – Режим доступу: <http://journals.uran.ua/index.php/2307-4507/article/viewfile/33989/30527>
2. Кух А.М. Методичні засади організації сучасного освітнього середовища з фізики в загальноосвітніх навчальних закладах / А.М. Кух, Д.Я. Костюкевич. – Кам'янець-Подільський : ПП Буйницький О.А., 2006. – 228 с.

3. Кух А.Н. Интерактивные технологии формирования профессиональных качеств будущих учителей физики / А.Н. Кух // Новые технологии в преподавании физики: школа и ВУЗ (НТПФ-IV) 14-17 марта 2005 г. : сборник аннотаций. – М. : Типография МПГУ. – С. 55.
4. Кух А.Н. Интерактивные методы обучения и их применение в высшей школе / А.Н. Кух // Преподавание физики в высшей школе. Научно-методический журнал. – М., 2005. – №31. – С. 14-17.
5. Кух А.Н. Инновация и профессионально-методическая подготовка преподавателя физики / А.Н. Кух // Преподавание физики в высшей школе. – М., 2006. – №32. – С. 86-94.

УДК 004.55

Б. Р. Кушлик, канд. техн. наук

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ВИКОРИСТАННЯ ПОБЛОКОВОЇ МЕТОДИКИ ВИВЧЕННЯ ЗАСОБІВ СТВОРЕННЯ WEB-СТОРИНОК

Інноваційні методи вищої школи – використання фундаментальних досліджень, сучасних досягнень науки і техніки та інформаційних технологій.

Результати експериментального навчання переконливо свідчать, що впровадження інформаційних технологій у навчальний процес вищої школи сприяє підвищенню ефективності результатів засвоєння знань студентами. Структура навчальної дисципліни «Технології створення Web-сторінок», запропонована у вигляді лекційного матеріалу та лабораторного (комп'ютерного) практикуму, розбитих тематично за створенням кінцевого робочого продукту (web-сторінки). Це сприяє підвищенню ефективності навчання майбутнього фахівця – умінню вибрати й розрахувати найбільш ефективні моделі та засоби створення web-сторінок, підбирати до них відповідне устаткування та програмне забезпечення, проводити тестування робочих версій, виявляти помилки та усувати їх, забезпечувати запуск розроблених web-сторінок у професійне використання.

Ставляться основні задачі під час вивчення та виконання лабораторних робіт.

- Написання базового коду Web-сторінки у HTML5 та перевірка його працездатності (ознайомлення із базовими теговими командами, перевірка можливості роботи браузерів).
- Випробування на практиці об'єктної моделі документа. Побудова сторінки за об'єктною моделлю документа.
- Написання веб-додатку із застосуванням форм, з форматуванням списку та із записом нових елементів у об'єктну модель документа шляхом використання обробників подій.
- Створення Web-додатку, його вдосконалення шляхом введення в нього конструкторів функцій та об'єктів із розширенням кількості відтворюваних об'єктів на Web-сторінці. (Засвоєння навичок із формування об'єктів у мові JavaScript, вдосконалення розуміння принципу побудови та логіки створення власних функцій).

- Записування координат в API-інтерфейсі Geolocation та представлення місця розташування користувача у використаному Web-додатку «Google Maps»: масштабування, центрування за координатами із заданою точністю; написання коду для визначення місцезнаходження у часі, побудова маршрутів на карті у режимі реального часу на створеній Web-сторінці.
- Створення автономного Web-додатку «Gumball sales» для запису кількості реалізацій товару із введенням в нього функцій запиту-відповіді Web-служб, засвоєння навичок зі здійснення запитів та отримання відповідей до віддалених веб-джерел певної протокольованої інформації, здійснення запуску власного сервера для тестування.
- Створення Web-додатку зі створення об'єктів Canvas для малювання на веб-сторінці, створення автономного веб-додатку із застосуванням форм, вибору даних із форм та виконання обробки введених у форми даних у Canvas.

Поставлені задачі і відображають новітні тенденції у питаннях створення та формування web-сторінок і забезпечують практичне вирішення завдань проектування складних за структурою, змістом та наповненням web-сторінок, їх запуск у реальне життя.

Список використаних джерел:

1. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт (комп'ютерного практикуму) з дисципліни «Технології створення Web-сторінок» для напряму підготовки 6.051501 «Видавничо-поліграфічна справа» спеціальності «Технології електронних мультимедійних видань» [Електронний ресурс] / уклад. Б.Р. Кушлик, О.І. Кушлик-Дивульська. – К. : НТУУ «КПІ», 2015. – 58 с. – Режим доступу: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/12699>.
2. Зінчук Н.А. Інформаційно-аналітична компетентність менеджера: значення у професійній управлінській діяльності та передумови формування у ВНЗ [Електронний ресурс] / Н.А. Зінчук // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2008. – №3(7). – Режим доступу: <http://www.ime.edu.ua.net/em7/emg.html>.
3. Андрущенко В.П. Філософські засади трансформації вищої освіти в Україні на початку ХХІ століття : монографія / В.П. Андрущенко. – К. : Педагогічна думка, 2007. – 350 с.

УДК 655.3.022.42

Б. Р. Кушлик, канд. техн. наук,

О. І. Кушлик-Дивульська, канд. фіз.-мат. наук

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ЗАСОБИ ВПЛИВУ НА СТАБІЛЬНІСТЬ БАЛАНСУ «ФАРБА-ВОДА» У ОФСЕТНОМУ ДРУЦІ

Найбільш загадковим для більшості поліграфістів залишається поняття балансу «фарба-вода». Він полягає у мінімально можливій подачі зволожуючого розчину, при якій досягаються оптимальні показники по щільності фарб на відбитку при одночасній відсутності затягування про-

більних елементів фарбою. Друкар може оцінити якість балансу візуально: для звичайних (не спиртових) систем поверхня друкарської форми повинна мати бархатистий глянець; для спиртових – бути матовою [1].

Для друку продукції високої якості необхідно швидке досягнення збалансованого стану між фарбою і зволожуючим розчином, що зберігає стабільність на формі, на накатних фарбових валиках і на офсетному полотні із дотриманням загальних вимог до основних показників зволожуючого розчину: водневий показник; загальна жорсткість; електропровідність; температура у блоці охолодження та в зволожуючому апараті [2].

Мета дослідження полягала в аналізі води, її оптимального підбору, визначенні робочого режиму добавки до зволожуючого розчину, розробленні рекомендацій щодо технологічного процесу.

Визначення робочого режиму конкретної буферної добавки до зволожувального розчину [3] проведено в різних друкарнях України. Проводилось вимірювання на оптимально великій ємності, у розчин вводилась добавка, її концентрація доведена до такого рівня: 1%, 1,5%, 2%, 2,5%, 3%, 3,5%, 4%, 5%. При кожному із значень дозування добавки вимірювались та записувались значення рН та електропровідності приготованого розчину. Опрацювання отриманих експериментальних статистичних даних за допомогою програмного пакету MS Excel дали інформацію: рН зволожувального розчину має вигляд гіперболи з асимптотичним наближенням при досягненні максимальної концентрації добавки у вигляді графіку функції $y = \frac{a}{x} + b$, розташованого у першій чверті координат; залежність електропровідності від дозування має лінійний вигляд. Маючи конкретну інформацію, проаналізовано залежність отриманих результатів для різного виду води (нормальної жорсткості та жорстка вода) з метою покращення якості технологічного процесу: коригування дозування концентрату зволожувального розчину, підтримка робочого стану валів розкочувально-накочувальної групи фарбового та зволожувального апарату з метою збільшення їх строку подальшої експлуатації, додаткова фільтрація, водопідготовка.

Список використаних джерел:

1. Величко О.М. Опрацювання інформаційного потоку взаємодією елементів друкарського контакту : монографія / О.М. Величко. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2005. – 264 с.
2. Золотухіна К.І. Дослідження основних показників зволожувальних розчинів / К.І. Золотухіна // Матеріали IV Міжнародної науково-технічної конференції молодих учених та студентів. Актуальні задачі сучасних технологій. – Тернопіль, 2015. – С. 18-19.
3. Кушлик Б.Р. Удосконалення технології друкування малотиражної продукції плоским офсетним друком : дис. ... канд. техн. наук : 05.05.01 / Б.Р. Кушлик. – К. : НТУУ «КПІ», 2014. – 190 с.

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ

Відомий ряд практичних задач оптимального керування, пов'язаних із використанням принципу максимуму Понтрягіна – фундаментального результату в теорії оптимального керування для диференціальних рівнянь без відхилень та задач, в яких вивчаються системи змінної структури при наявності різноманітних, фазових обмежень на рух об'єкту. Такими є задачі максимізації дій польоту літального апарату, мінімізація витрат палива під час руху ракети у вакуумі, оптимального розподілу ресурсів, капіталовкладень в одній (декількох) галузі та для ряду задач, пов'язаних із виробничими технологічними процесами промисловості.

Задача синтезу оптимальних керувань для різного виду лінійних, нелінійних систем диференціальних рівнянь з запізненнями та із фазовими обмеженнями розглядалась неодноразово, доведено необхідні умови оптимальності керування з побудовою спряженої системи диференціальних рівнянь з випередженням. В роботі [1] розглядається задача для реальних поліграфічних процесів. Для обертових та коливних рухів конструктивних елементів друкарської машини, яка описується системою лінійних диференціальних рівнянь з запізненням із фазовим обмеженням, як умова існування моменту часу $t_1 > 0$, при якому ще до досягнення точки (b, c) виконується нерівність $x_2(t_1) \leq 0$, задачу синтезу оптимальних умовами розв'язано за допомогою побудови відповідного до системи гамільтоніану

$$H = \Psi_1(t) \cdot x_2(t) - \Psi_2(t) \cdot (x_1(t - \Delta) - U(t))$$

та дослідження відповідної для нього системи рівнянь з випередженням. Дана задача задовольняє теорему – необхідні умови оптимальності за швидкодією, за якою для допустимого керування та відповідного йому траєкторії руху з початковою функцією існують ненульові функції $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$, відповідні $x(t)$, $u(t)$, що на них досягається максимум. Визначено траєкторію руху відповідної точки розвантажувального пристрою, вона має вигляд квадратичної параболи [2]. Змінюючи при цьому у відповідні моменти часу керування u з +1 на -1 і, навпаки, цією точкою можна досягти будь-яке наперед задане місцезнаходження у фазовій площині. При цьому керування буде оптимальним за швидкодією у випадку, коли моменти часу, в які знак керування змінюється, будуть однократними коренями функцій $\Psi_2(t)$. Задача має практичне значення: можна таким чином налаштувати процес швидкого досягнення та постійного підтримання балансу «фарба-вода», маючи певні значення та величини подачі фарби і зволожувального розчину, відповідно до кількості друкувальних та пробільних елементів на друкарській формі.

Досліджена задача з керованою початковою функцією, яка є розв'язком системи звичайних диференціальних рівнянь при наявності фазових обмежень зі змінними моментами часу – є реальною технологічною задачею поліграфічного виробництва – передачі фарби із одного валу на інший. Доведено [3] в загальному випадку, необхідні умови оптимальності, які також подано у вигляді функціоналу $\pi(x, \psi, u, v, t_1, \dots, t_m)$. Для задачі про мінімізацію часу, за який керована точка досягатиме рухомої точки площини із фазовим обмеженням $x_2(t_1) \leq 0$, отримано оптимальне керування, як кусково-неперервну функцію, що приймає значення $u = \pm 1$ та лінійний, квадратичний вигляд траєкторії руху (залежить від часового проміжку).

Список використаних джерел:

1. Кушлик-Дивульська О.І. Математична теорія оптимального керування в практичних задачах / О.І. Кушлик-Дивульська, Б.Р. Кушлик // Технологія і техніка друкарства. – К. : ВПІ НТУУ «КПІ», 2015. – №1(47). – С. 61-68.
2. Кушлик Б.Р. Удосконалення технології друкування малотиражної продукції плоским офсетним друком : дис. ... канд. техн. наук : 05.05.01 / Б.Р. Кушлик. – К. : НТУУ «КПІ», 2014. – 190 с.
3. Кушлык О.И. Оптимальное управление системами с запаздыванием при наличии фазовых динамических ограничений : дисс. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / О.И. Кушлык. – К. : Киевский ун-т им. Тараса Шевченко, 1992.

УДК 517.927.6

В. В. Листопадава, канд. фіз.-мат. наук

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ПРО ОДНУ БАГАТОТОЧКОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ З ПАРАМЕТРАМИ

Математичними моделями ряду важливих задач фізики, механіки, хімії є крайові задачі для диференціальних і інтегро-диференціальних рівнянь з параметрами, та їх систем. До них, зокрема, відносяться багатоточкові задачі для диференціальних рівнянь з параметрами. Вони детально досліджувалися багатьма авторами, серед яких потрібно відзначити роботи А.Ю. Лучки, М.С. Курпеля [1, 2]. Але задачі для диференціальних рівнянь нейтрального типу з параметрами вивчені ще недостатньо. Оскільки побудувати точний розв'язок таких задач в більшості випадків неможливо, то в зв'язку з цим важливого значення набуває питання побудови ефективних наближених методів їх розв'язування.

У повідомленні розглядається задача:

$$y''(x) + q(x)y''(x - \Delta) + g_1(x)y'(x) + g_2(x)y(x) + g_3(x)y'(x - \Delta) + g_4(x)y(x - \Delta) = f(x) + c(x)\lambda, x \in (a; b), \quad (1)$$

$$y(x_s) = \alpha_s, \alpha_s \in R, s = \overline{1, m}, a = x_1 < x_2 < \dots < x_s < \dots < x_m = b, \quad (2)$$

$$y''(x) = y'(x) = y(x) = 0, x \in (a - \Delta; a), \quad (3)$$

де Δ – постійне запізнення, $\Delta > 0$, $f(x)$ – відома, $y(x)$ – шукана функції, $c(x)\lambda$ – скалярний добуток шуканого вектора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ і відомої векторної функції $c(x) = (c_1(x), c_2(x), \dots, c_l(x))$, $l = m - 2$.

У доповіді встановлено умови існування та єдиності розв'язку багаточислової задачі (1)-(3) шляхом зведення її до рівносильного інтегрального рівняння, розглядається застосування до даної задачі проєкційного метода і одержано достатні умови його збіжності.

Список використаних джерел:

1. Курпель Н.С. Об одной многоточечной краевой задаче для дифференциальных уравнений с параметрами / Н.С. Курпель, А.Г. Марусяк // Укр. мат. журн. – 1980. – №2. – С. 223-226.
2. Лучка А.Ю. Многоточечная задача для дифференциальных уравнений с параметрами и её решение проекционно-итеративными методами / А.Ю. Лучка, А.Г. Марусяк // Динамические системы дифференциально-разностные уравнения. – К. : Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 53-68.

УДК 004.942

В. В. Листопадава, канд. фіз.-мат. наук,

А. Д. Кузнецова,

І. Ю. Терещенко

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ВАЖЛИВІСТЬ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В ОСВІТІ

Інформаційні технології відіграють ключову роль в житті студентів та викладачів. В даний час, більшість іноземних шкіл пропонують онлайн класи і курси, які можна відвідувати з комп'ютера або ноутбука, планшетних ПК і навіть мобільного телефону. Студенти легко перевіряють наявність домашніх завдань або лекцій у будь-який зручний для них час.

За допомогою технологій, викладачі зможуть спростити процес навчання і одночасно наситити його більшою інформацією, що потрібна для студента у майбутньому.

Ось список основних причин, чому потрібні інформаційні технології в освіті:

- 1) правильне використання допоможе підготувати студентів до їх майбутньої кар'єри, бути кваліфікованими, конкурентоспроможними і мобільними на ринку праці;
- 2) інтеграція технологій, безумовно, відмінний спосіб досягти різноманітності в стилі навчання;
- 3) технології допомагають викладачам підготувати студентів до реального світу, творчо мислити, діяти в нестандартних ситуаціях;

- 4) інтеграції технології в повсякденному житті дозволяють студентам залишатися в щільному зв'язку в сучасному світі;
- 5) за допомогою технології викладач може надавати більше інформації;
- 6) технології дають студентам можливість навчатися самостійно;
- 7) студент має доступ до всіх електронних підручників, які постійно оновлюються.

Застосування інформаційних технологій має бути послідовним та інтегрованим, включати всі предмети та дисципліни. Це є не просто доповненням до традиційних методів викладання, а доповненням до всіх компонентів. Це допомагає формувати сприйняття нового інформаційного середовища. Воно включає в себе сукупність засобів та технологій для передачі, обробки, засвоєння знань; функціонування структур педагогічної діяльності. Його призначення – вияв і розвиток можливостей студентів, надання засобів самостійної підготовки, забезпечення автоматизації процесу навчання, дистанційний зв'язок студента та викладача.

Щоб поліпшити навчальний процес, широке застосування знаходять мультимедійні технології. Система мультимедійної технології використовується в якості електронних підручників, бібліотек, посібників, архівів. Принципи цієї технології базуються на слуховому та візуальному сприйнятті знань. Також використання мультимедіа розвивають у студента його інтелектуальні та творчі здібності.

Іншими засобами обміну інформацією є електронна пошта. Найбільшого застосування вона знаходить у швидкому спілкуванні індивідуумів, передачі досвіду в будь-яку країну світу, розвитку наукової роботи не виходячи за межі домівки, інституту, лабораторії тощо.

Слід зазначити, що дистанційна освіта доступна для кожного, не зважаючи на вік, фізичний стан, соціальне положення.

Значним фактором розвитку освіти можна вважати можливість вищого навчального закладу адаптуватись до нових умов викладання. Загальна ефективність процесу буде визначатися взаємодією людей як системи для створення та отримання знань. Тому для вдосконалення інформаційно-технологічної освіти мають бути компетентні кадри.

У зв'язку з використанням технології потрібна якісна підготовка фахівців у будь-яких сферах науки. Для цього доцільно використати комп'ютерні програми, а саме:

- комп'ютерних середовищ, які входять в офісний пакет Microsoft Office;
- спеціально розроблених програмних продуктів, орієнтованих на застосування у навчальному процесі вищої школи, як MathCAD, MatLab або Maple.
- інтегрованих математичних середовищ для науково-технічних розрахунків.

Сучасні освітні технології обумовлюються трьома основними чинниками – комп'ютерною технікою, інформаційними мережами і мультимедійними засобами. Комп'ютерна техніка допомагає в навчанні, налагодженню зв'язку між студентом та викладачем, завдяки чому спрощується

навчання та зберігається час, що вкрай потрібен кожній людині. Увага приділяється інформаційним технологіям у процесі освіти, особливо – новим та зручним для користування та передачі даних.

Зважаючи на вищесказане, процес реалізації технологій в освіті не може бути хаотичним, без врахування попереднього досвіду педагогів, який не втратив свого значення в історії суспільства. Доцільно поєднувати традиційні та інтерактивні методи навчання, що значно підвищує ефективність навчального процесу. Змішана модель навчання надає студентам нові можливості по вивченню дисциплін – можна в будь-який зручний час проглянути в режимі он-лайн теоретичний матеріал, пройти тестування, перевірити свої знання по предмету, ознайомитись з додатковими джерелами по пройденим темам.

Отже, впровадження інформаційних технологій є найважливішим завданням у цей час. Їх використання у вищих навчальних закладах забезпечить перехід освіти на більш якісний рівень. За допомогою електроніки викладачі зможуть адаптуватися до зміни умов навчання. Використовуючи новий підхід на заняттях, вони можуть бути впевненими, що студенти будуть засвоювати матеріал краще, розвинуть свої комунікативні здібності, творчий потенціал і здатність використовувати інформаційні технології у своїй професійній діяльності. Та для цього потрібно вдосконалити та розробити інформаційне середовище, методичне забезпечення для дисциплін різних напрямків, навчальні посібники в електронному вигляді.

Список використаних джерел:

1. Вакарчук І. Стратегія інноваційного розвитку України на 2010-2020 роки в умовах глобалізаційних викликів: Тези доповіді Міністра освіти і науки України Івана Вакарчука/ І. Вакарчук // Освіта. – 2009. – 24 червня – 1 липня. – С. 3.
2. Пехота О.М. Освітні технології : навч.-метод. посіб. / О.М. Пехота, А.З. Кіктенко, О.М. Любарська. – К. : А.С.К, 2003. – 255 с.
3. Режим доступу: <http://www.securedgenetworks.com/blog/10-Reasons-Today-s-Students-NEED-Technology-in-the-Classroom>.

УДК 519.6

О. М. Литвин, д-р. фіз.-мат. наук,

Ю. І. Першина, д-р. фіз.-мат. наук,

О. Д. Пташний, канд. пед. наук

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДУ ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗРИВІВ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

У роботі досліджується метод знаходження ліній ε -розриву першого роду білінійної функції двох змінних, наближуючи її розривним інтерполяційним чи апроксимаційним лінійним сплайном. Доводяться теореми про необхідну кількість ітерацій запропонованого методу для досягнення потрібної точності.

Нехай в області $D=[0,1]^2$ задана розривна функція $f(x,y)$ та задане деяке розбиття на елементи (прямокутники)

$$\Pi_{i,j}=[x_i,x_{i+1}] \times [y_j,y_{j+1}], \quad 0=x_1 < x_2 < \dots < x_m=1, \quad 0=y_1 < y_2 < \dots < y_n=1.$$

Причому розташування ліній розриву функції $f(x,y)$ невідоме. В якості експериментальних даних будемо використовувати скінченну кількість інтерполяційних односторонніх значень розривної функції $f(x,y)$ у кутах заданої прямокутної сітки. Тобто в якості вхідних даних виступає матриця значень $C_{p,\ell}$, $p=\overline{1,n \cdot m}$, $\ell=\overline{1,4}$ розривної функції $f(x,y)$, де p – номер прямокутного елемента, що розглядається. В роботах [1, 2] дається означення ε – неперервності функції в точках та лініях.

Розглянемо випадок виявлення ліній розриву білінійної розривної функції.

Теорема 1. Якщо $f(x,y) \in C^{-1}[0;1]$ є кусково-білінійною і має одну точку розриву першого роду $x^* = \frac{m}{2^k}, y^* = \frac{p}{2^k} m, k, p \in N, m < 2^k, p < 2^k$, то можна її виявити за найбільше, ніж k ітерацій.

Теорема 2. Якщо $f(x,y) \in C^{-1}[0;1]^2$ є кусково-лінійною функція і має одну точку розриву першого роду (x^*, y^*) , то виявити її можна за $k = \lceil -\log_2 2\varepsilon \rceil$ ітерацій з похибкою ε .

Викладемо алгоритм знаходження ліній ε -розриву покровоко.

Крок 1. Будемо розривний апроксимаційний сплайн на заданих вузлах $(x_i, y_j), i=\overline{1, n-1}, j=\overline{1, m-1}$ за формулою з параметрами $C_{k,\ell}$, $k=\overline{1, (m-1) \cdot (n-1)}, \ell=\overline{1, 4}$. І знаходимо матрицю невідомих коефіцієнтів сплайна з умови (3.4), обчислюючи функціонал $J(C)$.

Крок 2. Знаходимо інтервали, на яких

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_\ell}^{y_{\ell+1}} (f(u,v) - S(u,v))^2 dt \neq 0, \quad k, \ell = \overline{1, n-1}.$$

Обчислюємо довжину інтервалів $d_k = x_{k+1} - x_k$, $g_\ell = y_{\ell+1} - y_\ell$. Якщо $d_k < 2\varepsilon$, $g_\ell < 2\varepsilon$, то інтервали $(x_k, x_{k+1}) \times (y_\ell, y_{\ell+1}) \in \varepsilon$ -прямокутником точок розриву (ε -розрив) і ітераційний процес закінчено. Якщо ці умови не виконуються, то знайдені прямокутні елементи ділимо на чотири частини, якщо не виконується одна з цих нерівностей, то прямокутний елемент ділимо на 2 частини. Інші інтеграли дорівнюють нулю, оскільки $f(x)$ є кусково-лінійною функцією. Отримаємо новий набір вузлів. І повторюємо крок 1.

Крок 3. В якості вузлів розривного сплайну обираємо кутові точки області визначення розривної функції та точки ε -розриву (x_m, y_2) ,

$m = \overline{1, M}$, $z = \overline{1, Z}$, враховуючи $C_{m,z}^{\pm, \pm} = f(x_m \pm \varepsilon, y_z \pm \varepsilon)$, $m = \overline{1, M}$, $z = \overline{1, Z}$. Сукупність знайдених точок ε -розриву створюють лінії ε -розриву.

Зауваження. Прямокутні елементи, на які розбивається область визначення розривної функції можуть мати довільно малі висоти і довжини, тобто можуть вироджуватися в лінії (одновимірний випадок).

У роботі викладено модифікований алгоритм виявлення ліній розриву функції двох змінних, яка не є білінійною, використовуючи розривний апроксимаційний білінійний сплайн. Оскільки наближувати її буде-мо білінійним розривним сплайном, то окрім значення ε , знадобиться точність наближення δ .

Список використаних джерел:

1. Литвин О.М. Наближення розривної функції розривним сплайном, коли вузли сплайна не збігаються з розривами функції / О.М. Литвин, Ю.І. Першина // Праці ІПММ НАН України. – 2012. – Т. 24. – С. 157-165.
2. Литвин О.Н. Приближение разрывной функции двух переменных с неизвестными линиями разрыва разрывным аппроксимационным сплайном / О.Н. Литвин, Ю.И. Першина // Научные ведомости БелГУ. Математика Физика. – 2013. – №6(160). – Вып.32. – С.51-60.

УДК 517.937

В. А. Літовченко, д-р фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПРО ГРАНИЧНІ ЗНАЧЕННЯ ГЛАДКИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ВИРОДЖЕНИХ $\{\bar{p}, \bar{h}\}$ -ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

При математичному моделюванні броунівського руху фізичної системи, А.М. Колмогоров у 1934 р. прийшов до рівняння дифузії з інерцією, яке є ультрапараболічним рівнянням. Воно є прототипом цілої сім'ї еволюційних рівнянь, які виникають у теорії дифузійних процесів з інерцією, кінетичній теорії газу, при вивченні руху матеріальних частинок у силовому полі, при дослідженні математичних моделей опціонів тощо.

Розглянемо рівняння, яке узагальнює рівняння Колмогорова:

$$(\partial_t + P(t; \partial_x))u(t; x) = 0, (t; x) \in (0; T] \times \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

тут $x = (x_1; x_2; x_3)$, де $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$, $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$;

$$P(t; \partial_x) := \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}} - A(t; i\partial_{x_1})$$

а $A(t; i\partial_{x_1})$ – диференціальний вираз за змінною x_1 з коефіцієнтами, залежними неперервно від t такий, що вираз $\partial_t - A(t; i\partial_{x_1}) \in \{\bar{p}, \bar{h}\}$ -пара-

болічним на множині $(0;T] \times \mathbb{R}^{n_1}$ у сенсі [3] із родом та зведеним порядком \bar{p}_0 .

У просторі $\left(S_{\alpha}^{\bar{\beta}}\right)'$ розподілів І.М. Гельфанда і Г.Є. Шилова задамо для рівняння (1) початкову умову

$$u(t; x)|_{t=0} = f, f \in \left(S_{\alpha}^{\bar{\beta}}\right)'. \quad (2)$$

Правильне таке твердження [1, 2]: нехай $f \in \left(S_{\alpha}^{\bar{\beta}}\right)'$, тоді відповідна задача Коші (1), (2) є коректно розв'язною, причому її розв'язок $u(t; \cdot) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $t \in (0; T]$. Тут $\bar{\alpha}^* := (\bar{\alpha}_{1^*}; \bar{\alpha}_{2^*}; \bar{\alpha}_{3^*})$, $\bar{\beta}^* := (\bar{\beta}_{1^*}; \bar{\beta}_{2^*}; \bar{\beta}_{3^*})$, $\{\bar{\alpha}_{j^*}, \bar{\beta}_{j^*}\} \subset \mathbb{R}^{n_j}$, де

$$\bar{\alpha}_{1^*} := \begin{cases} \bar{1} - \frac{\bar{\mu}}{\bar{p}_0}, & 0 < \bar{\mu}, \\ \bar{1} - \frac{\bar{\mu}}{\bar{h}}, & \bar{\mu} \leq 0, \end{cases}$$

$$\bar{\alpha}_{2j^*} := \bar{\alpha}_{1j^*}, \quad \bar{\alpha}_{3j^*} := \bar{\alpha}_{1j^*}, \quad \bar{\beta}_{1^*} := \frac{\bar{1}}{\bar{h}}, \quad \bar{\beta}_{2j^*} := \bar{\beta}_{1j^*}, \quad \bar{\beta}_{3j^*} := \bar{\beta}_{1j^*}$$

Далі нехай S – простір Л. Шварца; позначимо через S_{α} , $S^{\bar{\beta}}$ і $S_{\alpha}^{\bar{\beta}}$ відповідні простори типу S Гельфанда І.М. і Шилова Г.Є. Задача полягає у знаходженні умов на узагальнену функцію f , за яких відповідний розв'язок задачі Коші (1), (2) при кожному фіксованому t буде елементом простору S або того чи іншого простору типу S .

Розглянемо класи \hat{S}^1 , \hat{S}'_{α} , $\hat{S}^{\bar{\beta}}$ і $\hat{S}_{\alpha}^{\bar{\beta}}$ усіх узагальнених функцій $f \in \left(S_{\alpha}^{\bar{\beta}}\right)'$ такі, що:

$$F[\hat{S}^1] = \left\{ \tilde{f}(\cdot) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) \mid \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \exists \gamma_k \geq 0 \exists c_k > 0 \forall \sigma \in \mathbb{R}^n : \left| \partial_{\sigma}^k \tilde{f}(\sigma) \right| \leq c_k (1 + \|\sigma\|)^{\gamma_k} \right\};$$

$$F[\hat{S}'_{\alpha}] = \left\{ \tilde{f}(\cdot) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) \mid \exists B > 0 \exists c > 0 \exists \gamma_0 \geq 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \forall \sigma \in \mathbb{R}^n :$$

$$\left| \partial_{\sigma}^k \tilde{f}(\sigma) \right| \leq c B^{|k|} k^{k\bar{\alpha}} (1 + \|\sigma\|)^{\gamma_0} \right\};$$

$$F\left[\widehat{S}^{\bar{\beta}}\right] = \left\{ \tilde{f}(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \delta > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \exists c_{k,\delta} > 0 \forall \sigma \in \mathbb{R}^n : \left| \partial_\sigma^k \tilde{f}(\sigma) \right| \leq c_{k,\delta} e^{\delta |\sigma|_+^{1/\bar{\beta}}} \right\};$$

$$F\left[\widehat{S}_{\alpha}^{\bar{\beta}}\right] = \left\{ \tilde{f}(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \delta > 0 \exists c_\delta > 0 \exists A_\delta > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \forall \sigma \in \mathbb{R}^n : \right. \\ \left. \left| \partial_\sigma^k \tilde{f}(\sigma) \right| \leq c_\delta A_\delta^{|k|_+} k^{\bar{\alpha}} e^{\delta |\sigma|_+^{1/\bar{\beta}}} \right\} \left\{ \left| \partial_\sigma^k \tilde{f}(\sigma) \right| \leq c_\delta A_\delta^{|k|_+} k^{\bar{\alpha}} e^{\delta |\sigma|_+^{1/\bar{\beta}}} \right\}$$

(тут $\tilde{f} := F[f]$, де $F[\cdot]$ – перетворення Фур'є, а $|\sigma|_+^{1/\bar{\beta}} := \sum_{j=1}^n |\sigma_j|^{1/\beta_j}$).

Теорема. Нехай початковий розподіл $f \in \left(S_{\alpha^*}^{\bar{\beta}^*} \right)'$ а u – відповідний розв'язок задачі Коші (1), (2). Тоді якщо:

- а) $f \in \widehat{S}'$ то $u(t; \cdot) \in S$ при кожному $t \in (0; T]$;
- б) $f \in \widehat{S}'_{\alpha_0}, \bar{\alpha}_0 \geq \bar{\alpha}^*$ то $u(t; \cdot) \in S_{\alpha_0}$ при $t \in (0; T]$;
- в) $f \in \widehat{S}'^{\bar{\beta}_0}, \bar{\beta}_0 \geq \bar{\beta}^*$, то $u(t; \cdot) \in S^{\bar{\beta}_0}$ при $t \in (0; T]$;
- г) $f \in \widehat{S}'^{\bar{\beta}_0}_{\alpha_0}, \bar{\alpha}_0 \geq \bar{\alpha}^*, \bar{\beta}_0 \geq \bar{\beta}^*$ то $u(t; \cdot) \in S^{\bar{\beta}_0}_{\alpha_0}$ при $t \in (0; T]$.

Список використаних джерел:

1. Ivasyshen S.D. Cauchy problem for one class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type with positive genus / S.D. Ivasyshen, V.A. Litovchenko // Ukr. Math. J. – 2009. – Vol. 61, №8. – P. 1264-1288.
2. Ivasyshen S.D. Cauchy problem for a class of degenerate kolmogorov-type parabolic equations with nonpositive genus / S.D. Ivasyshen, V.A. Litovchenko // Ukr. Math. J. – 2011. – Vol. 62, №10. – P. 1543-1566.
3. Litovchenko V.A. Cauchy problem for $\{\bar{p}, \bar{h}\}$ -parabolic equations with time-dependent coefficients / V.A. Litovchenko // Mathematical Notes. – 2005. – Vol. 77, №3-4. – P. 364-379.

Г. П. Лопушанська, д-р фіз.-мат. наук,
В. Р. Рапіга

Львівський національний університет імен Івана Франка, м. Львів

ОБЕРНЕНА КОЕФІЦІЕНТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО РІВНЯННЯ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ

Досліджуємо обернену задачу [1]

$$D_t^\alpha u + r(t)D_t^\beta u - \Delta u = F_0(x, t), (x, t) \in \Omega_0 \times (0, T],$$

$$u(x, t) = 0, (x, t) \in \partial\Omega_0 \times [0, T],$$

$$u(x, 0) = F_1(x), x \in \bar{\Omega}_0,$$

$$u_t(x, 0) = F_2(x), x \in \bar{\Omega}_0 \subset \mathbb{R}^n,$$

$$\int_{\Omega_0} u(x, t) \varphi_0(x) dx = F(t), t \in [0, T].$$

для лінійного неоднорідного телеграфного рівняння з регуляризованими похідними дробових порядків $\alpha \in (1, 2), \beta \in (0, 1)$ за часом в обмеженому циліндрі $Q_0 = \Omega_0 \times (0, T]$ – задачу про визначення пари функцій: класичного розв'язку першої крайової задачі для такого рівняння та невідомого, залежного від часу, неперервного коефіцієнта $r(t)$ в молодшому члені рівняння. Остання умова – це умова перевизначення.

Розв'язком задачі є пара функцій

$$(u, r) \in \mathcal{M}(Q_0) := C_{2, \alpha}(\bar{Q}_0) \times C[0, T],$$

яка задовольняє рівняння та умови задачі. Тут

$$C_{2, \alpha}(Q_0) = \{v \in C(Q_0) \mid \Delta v, D_t^\alpha v \in C(Q_0)\}, C_{2, \alpha}(\bar{Q}_0) = \{v \in C_{2, \alpha}(Q_0) \mid v, v_t \in C(\bar{Q}_0)\}.$$

$$\text{Нагадаємо, що } D_t^\alpha v(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau - \frac{v(x, 0)}{t^\alpha} \right] \text{ при}$$

$$\alpha \in (0, 1), D_t^\alpha v(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v_\tau(x, \tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}} d\tau - \frac{v_t(x, 0)}{t^{\alpha-1}} \right] \text{ при } \alpha \in (1, 2)$$

$$\text{та } D_t^1 v = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Через $C^\gamma(\bar{\Omega}_0)$ позначаємо простір неперервних функцій в $\bar{\Omega}_0$, які задовольняють умову Гельдера, а через $C^\gamma(\bar{Q}_0)$ – простір неперервних функцій в \bar{Q}_0 , які для кожного $t \in (0, T]$ задовольняють умову Гельдера за просторовими змінними $x \in \bar{\Omega}_0$

Теорема 1. За припущень

$$F_0 \in C^\gamma(Q_0), F_1 \in C^\gamma(\bar{\Omega}_0), F_1|_{\partial\Omega_0} = 0, F_2 \in C^\gamma(\bar{\Omega}_0), \gamma \in (0,1),$$

$$F, D^\beta F, D^\alpha F \in C[0, T], D^\beta F(t) \neq 0, \varphi_0 \in C^2(\bar{\Omega}), \varphi_0|_{\partial\Omega_0} = 0$$

та умов узгодження даних

$$\int_{\Omega_0} F_1(x) \varphi_0(x) dx = F(0), \int_{\Omega_0} F_2(x) \varphi_0(x) dx = F'(0)$$

існує деяке $T^* \in (0, T]$ (відповідно $Q^* = \Omega_0 \times (0, T^*]$) і розв'язок задачі

$$(u, r) \in \mathcal{M}(Q_0^*) = C_{2,\alpha}(\bar{Q}_0^*) \times C[0, T^*].$$

Для доведення теореми використовуємо метод функції Гріна[2].

Теорема 2. За умови $D^\beta F(t) \neq 0, t \in [0, T]$ розв'язок задачі $(u, r) \in \mathcal{M}(Q_0)$ єдиний.

Список використаних джерел:

1. Lopushanska H. Inverse coefficient problem for semi-linear fractional telegraph equation / H. Lopushanska, V. Rapita // Electronic J. Differential Equations. – 2015. – №153. – P. 1-13.
2. Eidelman S.D. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei. – Basel ; Boston ; Berlin : Birkhauser Verlag, 2004.

UDC 004.89:004.912

I. V. Malashchuk

Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkov

MATHEMATICAL MODELING OF GOOD SQUARES STABLE PROCESSES OF WARM DIRECTIONS IN SOLID-PIECES OF THE COSMIC SPACES

As we already know the Venus project [1] is beyond war, politics and poverty, but rejecting smoke cannabis leafs per 18000 dollars per month. It will create cutting edge new sites like Sambir [2].

Agent-oriented approach to solution of theoretical and practical tasks also started in the early 70th years in XX century [3]. That publication is a proof and a fact material from young sciences which was born in Donetsk region (Donbass), were many artifacts saved in the mining holes and spaces after ejecting of the coal. Resource based economy of the Venus project shows direction to how we can reuse coal for making photocopies on the paper and, than, re-use almost every small mass of the coal.

Base on re-usable resources can be shown on Ukrainian flag, when the yellow and the blue colors mixed than the green produced like on the tree, which is shown on the figure 1.



Fig. 1.

Figure also consists from the small masses of the coal and other components, filtered from all over the world. The size of the color drops is near the 2 Pico liters allows to print the figure in high resolution which is not necessary for these thesis.

First of all the graph is a picture of molecular structure. Every molecule contains coal for the Text Mining, and thus reusable in electronic devices. Also it contains triangles for bicycles of Nordic Group and hot soup (which is in theory of boning life on the planet Earth), where life may born again, again and again.

The second warm direction is Cosmopolitan Space advertised in modern journals ... That is a joke. We have a freedom to turn our sub-globes as we can, as we wish and without the pain. The pain is important. No pain, no gain, as a Scorpions group signs in their song. Another song – Shocking Your until you turn to blue. The planet Earth is blue and it is our home. Also it has so many true colors for our eyes and rhythms for our ears – we can hear and dance from heavy metal to light rain.

Third direction is genetics' research on site geni.com Malashchuk [4] family tree with many flowers and fruits on it. Yandex and Google emails and search engines [5] used for that research.

So, the task is in space cleaning with low pressure on existing structures, which are shown on figure 1. Computer linguistics and fuzzy logic should be used for help, but not for the simulation of the real life – that not necessary and impossible, because our culture cannot be modeled mathematically. Mathematical modeling we are going to use only for prevention of the danger processes. Internet and websites makes so easy to cross the borders and think out of the box.

Results of this work expected as not undefined, but good for people and pupils world. Applied mathematics is a queen of the sciences.

In conclusion, I just want to underline, that life is not the theatre, and a theatre is not a real life. And when you collecting something piece by piece, you may find the peace and friendship, and love, just via believing in sciences. Cosmic space so big and so warm, and good squares can divide properly and make right balance of the power in our world. Proper limitation is the way to happiness and prosperity.

Literature:

1. <https://www.thevenusproject.com>.
2. <http://sumbircity.gov.ua/>, <http://sambircity.com.ua>.
3. Skobelev V.G. Probability model of the agent interaction with net environment / V.G. Skobelev // Cybernetics and System Analysis, November – December 2015. – P. 3-19.
4. <http://malashchuk.info>.
5. <https://www.youtube.com/watch?v=BNCoaKE4S7M> // DUIF PIGEON (Pidgin IM).

УДК 514.219, 519.217.7

І. В. Малик, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Ю. Федьковича, м. Чернівці

АСИМПТОТИКА ДОГРАНИЧНИХ НАПІВМАРКОВСЬКИХ ЕВОЛЮЦІЙ У СХЕМІ УСЕРЕДНЕННЯ

Розглянемо випадкову еволюцію у R^d , що задається стохастичним адитивним функціоналом:

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t \eta(ds; x(s)) + \int_0^t \gamma(ds; x(s)), t \geq 0$$

Однорідний ергодичний марковський стрибковий процес перемикань $x(t), t \geq 0$ розглядається у просторі (E, E) зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in E$ та визначений напівгрупою $Q_t \varphi(x) := \int_E \varphi(y) P_t(x, dy), t \geq 0$, де $P_t(x, A) := P\{x(t) \in A | x(0) = x\}$. Напівгрупа $Q_t, t \geq 0$ породжується генератором Q з інтенсивністю $q(x)$, проектором Π та потенціалом R_0 .

Напівмарковські процеси $\eta(t, x), t \geq 0, x \in E$ в евклідовому просторі $R^d, d \geq 1$ породжуються процесами марковського відновлення (ПМВ) $(\eta_n, \tau_n), n \geq 0$, де $\eta_n := \eta(\tau_n x_n), x_n := x(\tau_n), \tau_n, n \geq 0$ – моменти відновлення напівмарковського процесу. ПМВ задаються напівмарковськими ядрами:

$$G(u, dv, t, x) := G(u, dv; x) F_u(t), u \in R_d, dv \in R^d, t \geq 0, x \in E,$$

Неперервна складова еволюції $\gamma(t), t \geq 0$ між моментами відновлення τ_n та τ_{n+1} , за умови $x(\tau_n) = x, x \in E$, задається напівгрупами $\Gamma_t(x), t \geq 0$ з генераторами

$$\Gamma(x)\varphi(u) := a(u; x)\varphi'(u) + \int_{R^d} (\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u))\Gamma(u, dv; x).$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} m_k(u) &:= \int_0^\infty t^k dF_u(t), k = 1, 2; \lambda(u) := 1 / m_1(u); \\ \eta(t) &:= \int_0^t \eta(ds; x(s)), \gamma(t) := \int_0^t \gamma(ds; x(s)) ds; \\ G(x)\varphi(u) &:= \int_{R^d} G(u, dv; x)\varphi(u+v), u \in R^d, \\ b(u, x) &:= \int_{R^d} uG(u, dv; x)c(u; x) := a(u; x) + \lambda(u)b(u; x). \end{aligned}$$

Напівмарковська випадкова еволюція розглядається у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \downarrow 0$ у такому нормуванні:

$$\begin{aligned} \xi^\varepsilon(t) &= \xi(0) + \varepsilon^3[\eta^\varepsilon(t) + \gamma^\varepsilon(t)], \\ \eta^\varepsilon(t) &:= \int_0^{t/\varepsilon^3} \eta(ds; x(\varepsilon s)), \gamma^\varepsilon(t) = \int_0^{t/\varepsilon^3} \gamma(ds; x(\varepsilon s)). \end{aligned} \quad (1)$$

Теорема. Нехай виконуються умови: марковський процес переключень є рівномірно ергодичний зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in E$; функція $c(u; x)$ задовольняє глобальну умову Ліпшиця з константою L , що не залежить від x ; рівномірно обмежені другі моменти для стрибків НМП, неперервної еволюції та часу перебування в стані; має місце збіжність початкових умов та їх обмеженість; існує функція Ляпунова $V(u), u \in R^d$ для усередненої системи, яка має наступні властивості: умова експоненціальної стійкості для розв'язку усередненого рівняння та

$$\left| c(u, x)V'(u) \right| + \left| c(u, x)[c(u, x)V'(u)] \right| \leq c_0 V(u);$$

функція розподілу $F_u(t), t \geq 0$ часу перебування в стані θ_u задовольняє умову Крамера рівномірно по $u \in R^d$; має місце оцінка $\inf_{u \in R^d} E\theta_u > 0$. Тоді для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, де ε_0 – достатньо мале, напівмарковська випадкова еволюція (1) при достатньо малих початкових даних $\left| \xi^\varepsilon(0) \right| \leq c_3$ задовольняє співвідношення

$$P\left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \xi^\varepsilon(t) \right| = 0 \right\} = 1.$$

М. М. Маляр, канд. техн. наук,

В. В. Поліщук, канд. техн. наук

ДВНЗ «Ужгородський національний університет», м. Ужгород

МОДЕЛЬ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОГО АНАЛІЗУ СТАРТАПІВ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВХІДНИХ ДАНИХ

З розвитком інформаційних технологій і глобалізації поширюється поняття стартапа, що щільно пов'язане з сучасною економікою. Термін «стартап» застосовується відносно компаній, що працюють у сфері інформаційних технологій.

Стартап – новостворена компанія, бізнес якої ґрунтується на інноваційних технологіях, що не вийшли на ринок або щойно почала на нього виходити і має потребу у залученні зовнішніх ресурсів [1, с.3-28]. Для фінансування створеної ідеї необхідно зовсім нові парадигми оцінки стартапів. Оцінка стартапу полягає не в оцінці компанії в даний момент, а в оцінці ідеї, яка в майбутньому може принести прибуток. Вартість такої ідеї, без впровадження її на ринок нічого не варта. Вчорашня «погана» ідея сьогодні може виявитись успішною, у зв'язку із стрімкими змінами галузі чи сфери бізнесу. У зв'язку з цим, постає слабоструктурована задача оцінювання ефективності стартапів, розв'язок якої цікавить як венчурні фонди так і самих стартаперів.

Стартапи мають різні стадії комерційного розвитку. Перша стадія – вивід продукту на ринок. Після успішного виконання першого етапу, настає другий – завоювання ринку як конкурентного гравця галузі. Тому, інвестування стартапів венчурними фондами відбувається поетапно. Для оцінювання величини фінансування другої стадії існує чимала кількість розроблених моделей, оскільки дана стадія відноситься до фінансування інвестиційного проекту, який є на ринку [2, с.117-126]. Оцінювання і фінансування першої стадії зводиться до досліджуваної проблематики – задачі оцінювання ефективності та вибору стартап проектів для фінансування. Для дослідження і вирішення даної проблеми застосуємо модель багатокритеріального аналізу [3, с.125-126].

Опишемо постановку задачі у наступному виді. Нехай задано множину стартап проектів $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, які потрібно оцінити і упорядкувати їх за важливістю. Для оцінювання стартап проектів необхідно мати множину критеріїв. Розв'язування даної задачі потребує вирішення наступних під задач:

- 1) провести класифікацію стартап проектів по галузях (предметних областях);
- 2) визначити критеріальну множину для оцінювання;
- 3) для кожного критерію описати математичну модель у вигляді функції належності нечіткій множині;
- 4) сформулювати модель правила вибору для побудови ранжувального ряду стартапів.

На основі запропонованого підходу можна побудувати інформаційну технологію оцінювання стартап проектів на вході якої є інформація про стартапи, а на виході оцінка та їх ранжувальний ряд. На основі отриманої оцінки, можна встановлювати поріг для фінансування та виводу на ринок стартап проектів. Адекватність даної інформаційної технології буде залежати від правильно підібраної множини критеріїв, методів опрацювання нечіткої інформації у вхідних даних та математичної моделі.

Створення інформаційної технології оцінювання та вибору ефективних стартап проектів на основі адекватної математичної моделі, що працює з нечіткими даними і підвищує обґрунтованість процесу прийняття рішень, буде необхідним інструментом, як для венчурних компаній так і для стартаперів при розвитку інноваційного бізнесу.

Список використаних джерел:

1. Garel G. Le management de projet / G. Garel. – Paris : La Decouverte, 2011. – 128 p. (Collection Réperes n 377).
2. Malyar M. Choice and evaluation methodics of investment projects / M. Malyar, V. Polishchuk // Košická bezpečnostná revue. – Košice, 2013. – P. 117-126.
3. Мальяр М.М. Використання динамічних критеріїв у моделях багатокритеріального вибору / М.М. Мальяр, В.В. Поліщук, М.М. Шаркаді // Компьютерная математика, 2015. – Вып. 1. – С. 125-133.

УДК 004.021

О. І. Махович, канд. техн. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕПЛООВОГО ПОЛЯ В ОБМЕЖЕНИХ ТІЛАХ МЕТОДОМ ПЕРЕРІЗІВ

Дослідження процесів теплопровідності є важливим етапом при вирішенні задач проектування елементів сучасних технічних систем. Стандартні програмні засоби комп'ютерного моделювання застосовують, переважно, сіткові методи та метод скінченних елементів, які вимагають значних обчислювальних ресурсів. При обмежених обчислювальних ресурсах, наприклад, для вбудованих цифрових обчислювачів або при вирішенні оптимізаційних задач ефективним є застосування методу опорних перерізів [1].

Оскільки реальні об'єкти моделювання є переважно обмеженими або напівобмеженими дво- або тривимірними тілами, покажемо, що динаміку нестационарного теплового процесу двовимірного тіла можна виразити як добуток розв'язків двох одновимірних нестационарних теплових задач.

Нехай маємо ізотропний необмежено довгий стержень прямокутного перерізу $2L \times 2l$ із початковою температурою T_0 та сталими теплофізичними характеристиками. В певний момент часу t_0 на бічній поверхні стержня задаються деякі граничні умови $T_{sp1}(t)$ (першого, другого, або третього роду).

Математичним описом спрощеної моделі нестационарного теплового процесу може виступати рівняння із частинними похідними параболічного типу [2]:

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

де $a = k / c\rho$ – коефіцієнт температуропровідності, c – питома теплоємність, ρ – густина, k – коефіцієнт теплопровідності, t – час, а $-L \leq x \leq L$, $-l \leq y \leq l$ – просторові координати. Оскільки на лініях симетрії тіла тепловий потік відсутній, то можна записати, що

$$\left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{та} \quad \left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.$$

Застосувавши для розв'язання даної задачі метод Фур'є

$$T(x, y, t) = X(x, t)Y(y, t), \quad (2)$$

отримаємо дві одновимірні задачі нестационарної теплопровідності необмежених ізотропних пластинок різної товщини ($2L$ і $2l$) та однаковими початковими і граничними умовами [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X(x, t)}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 X(x, t)}{\partial x^2}, & \frac{\partial Y(y, t)}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 Y(y, t)}{\partial y^2}, \\ X(x, t) \Big|_{t=0} &= T_0, & Y(y, t) \Big|_{t=0} &= T_0, \\ \frac{\partial X(0, t)}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial Y(0, t)}{\partial y} &= 0 \\ X(x, t) \Big|_{x=\pm L} &= F_{\text{зпл}}(t), & Y(y, t) \Big|_{y=\pm l} &= F_{\text{зпл}}(t), \end{aligned}$$

Тобто розв'язок $T(x, y, t)$ вихідної двовимірної задачі (1) виражається через добуток (2) розв'язків відповідних одновимірних задач, до яких можна застосувати метод опорних перерізів.

Відповідно до методу опорних перерізів для трьох опорних точок за кожною з просторових змінних маємо:

$$\begin{aligned} T(x, y, t) &\approx L_2(x, t) \cdot L_2(y, t) = \\ &= \left[\sum_{i=0}^2 T(x_i, t) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^2 \frac{x^2 - x_k^2}{x_i^2 - x_k^2} \right] \cdot \left[\sum_{i=0}^2 T(y_i, t) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^2 \frac{y^2 - y_k^2}{y_i^2 - y_k^2} \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, отримано спрощені обчислювальні вирази (поліном та допоміжні системи звичайних диференціальних рівнянь, розв'язки яких виступають в якості коефіцієнтів $T(x_i, t), T(y_i, t), i = \overline{0, 1}$ цього полінома) для числової реалізації моделі об'єкта з розподіленими параметрами.

Список використаних джерел:

1. Федорчук В.А. Метод исследования динамики нестационарных тепловых процессов при наличии симметричных граничных условий / В.А. Федорчук, А.И. Махович // Электронное моделирование. – К. : ИПМЭ НАНУ, 2014. – №3. – С. 71-79.
2. Самарский А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
3. Apaci V. Conduction Heat Transfer / V. Apaci. – New-York : Addison-Wesley Publishing Co., 1966. – 288 p.

УДК 519.61/64:627.05

Н. В. Медвідь

Національний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне

ПРО ВПЛИВ КОНТАКТНОЇ ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ВЗДОВЖ ВОДОВОДУ В ГРУНТОВІЙ ГРЕБЛІ НАПОЛОЖЕННЯ ДЕПРЕСІЙНОЇ ПОВЕРХНІ

Для пропуску води із верхнього б'єфу в нижній в ґрунтових греблях широко використовують водоводи, наявність яких може бути причиною аварій і пошкоджень. Наявність в тілі греблі водоводу має суттєвий вплив на характер фільтрації в навколотрубній зоні. Зокрема, можуть розвинути небезпечні фільтраційні деформації, викликані контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу з розмивом ґрунтів тіла, підйомом депресійної поверхні [1]. Тому, дослідженню впливу водоводу на процеси фільтрації в тілі ґрунтової греблі слід приділяти серйозну увагу. Це актуально на етапі проектування з метою здійснення прогностичних розрахунків для недопущення критичних та аварійних ситуацій в процесі експлуатації гідротехнічної споруди.

Фізична постановка задачі полягає в наступному. В тілі греблі наявний водовід. В результаті виникнення зосередженої фільтрації вздовж водоводу там утворюється зона вимиву. Зона вимиву являє собою порожнину, яка сполучена з верхнім б'єфом і заповнена рідиною. З математичної точки зору товщиною порожнини вздовж стінок водоводу нехтуємо і її присутність відображається в математичній моделі заданням граничних умов виду: $h(X,t)|_{\Gamma_p} = y$, де $h(X,t)$ – п'єзометричний напір, y – вертикальна координата поверхні порожнини. Поки що розміри порожнини вважаємо незмінними. В результаті присутності зосередженого шляху фільтрації вздовж водоводу, депресійна поверхня в тілі греблі буде змінювати своє положення. Ціль роботи – прогнозування зміни положення депресійної поверхні засобами математичного моделювання.

Математична модель тривимірної задачі фільтраційних процесів в тілі ґрунтової греблі з водоводом містить наступне квазістаціонарне рів-

няння фільтрації [2]: $\nabla \cdot (K\nabla h) = 0$, $X \in \Omega$. Вказане рівняння доповнюється граничними умовами.

Вільна межа Γ_0 (крива депресії) описується співвідношенням [3]: $\varphi(X,t) = (y - h(X,t))|_{\Gamma_0} = 0$, і на ній задається кінематична гранична умова [3]: $(u, n)|_{\Gamma_0} = \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, де $u = -K\nabla h$. При цьому має бути відомим початкове положення вільної поверхні.

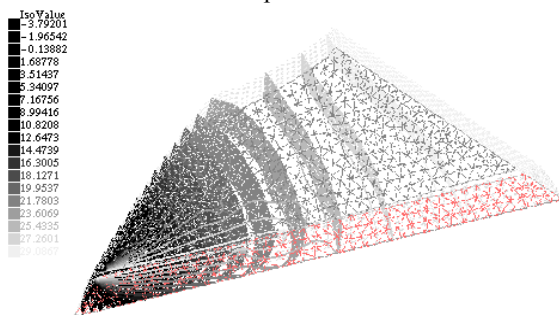


Рис. 1. Розподіл напорів в ґрунтовій греблі з водоводом та контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу через 10 років

Задача розв'язана методом скінченних елементів в середовищі FreeFem++. Проведено ряд чисельних експериментів, з яких можна зробити наступні висновки: наявність зони контактної розмиву вздовж водоводу суттєво впливає на положення депресійної поверхні в околі водоводу. При цьому, депресійна поверхня піднімається і максимальна різниця між положеннями вільних меж в греблях при наявності та відсутності водоводу через 10 років складає 0,22 м.

Список використаних джерел:

1. Анахаев К.Н. Об авариях и повреждениях земляных плотин с водоводами: причины и способы совершенствования противофильтрационной защиты / К.Н. Анахаев, К.А. Гегиев, Б.Х. Амшоков // Гидротехническое строительство. – 2004. – №3. – С. 30-36.
2. Медвідь Н.В. Дослідження впливу тепло-солеперенесення на швидкість фільтрації в ґрунтовій греблі (просторова задача) / Н.В. Медвідь, П.М. Мартинюк // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2015. – №4. – С. 169-178.
3. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – К. : Наук. думка, 1991. – 432 с.

В. В. Мендерецький, д-р пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

МІСЦЕ ТА РОЛЬ ІНФОРМАЦІЙНО-ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В СИСТЕМІ ОСВІТИ УКРАЇНИ

Нинішнє суспільство називають інформаційним. Таке суспільство розглядають як орієнтир, тенденцію змін у сучасному світі, воно асоціюється з розвитком інформаційно-телекомунікаційних технологій. Розвиток подібних технологій та глобальної мережі Інтернет створили можливість доступу до величезних обсягів інформації та її збереження. Комп'ютеризація життєдіяльності вимагають від людини нових компетентностей, що будуть адаптовані до умов інформаційного суспільства.

Освітні реформи тісно пов'язані з впровадженням інформаційно-телекомунікаційних технологій у процеси навчання молодого покоління. Більшість країн світу стратегічним вважають забезпечення комп'ютеризованих робочих місць для учнів та студентів, оснащення освітніх установ новітніми технологічними засобами для модернізації навчальних процесів, створення підґрунтя для набуття необхідних компетентностей у сфері застосування ІТКТ.

Інформаційні технології на основі систем телекомунікації у всьому світі визнані ключовими технологіями ХХІ століття, що на найближчі десятиріччя будуть основними двигунами НТП. Інформатизація освіти є частиною цього глобального процесу. Актуальною проблемою сьогодні є розробка освітніх технологій, які здатні модернізувати традиційні форми навчання з метою підвищення рівня навчального процесу. Світова практика розвитку та використання інформаційно-телекомунікаційних технологій в освіті демонструє тенденцію до зміни традиційних форм організації освітнього процесу.

Технічне забезпечення нових методів навчання стало важливим елементом оновлення освітнього середовища. Сучасні засоби сьогодні змінюють роль вчителя, який є не тільки тим, хто розповсюджує інформацію та навчає, а й тим, хто надає підтримку учням по мірі того, як у них формуються погляди під час засвоєння інформації.

Популярності набуває такий тип навчання, що спонукає навчатись в насиченому інформаційному середовищі і яке сприяє формуванню власного уявлення про нього та відповідні компетентності в галузі ІТКТ. Сучасні засоби навчання, широкий спектр інформаційних технологій надають широкі можливості для вчителя застосовувати в роботі проблемно-орієнтоване або конструктивістське навчання в індивідуальному ритмі кожного учня, здійснювати контроль успішності новими інтерактивними методами. Інформаційна грамотність учасників навчального процесу безпосередньо пов'язана необхідним рівнем володіння інформаційно-комунікаційною компетентністю.

Інформаційне середовище, що створено комп'ютерними засобами стало важливим елементом навчання. Головною рисою такого навчального середовища є наявність електронної бази даних (електронних бібліотек, спільнот, електронних сторінок, щоденників, баз даних), з якими учні можуть спілкуватись, додавати тексти, графіки, складати тести та іспити, здійснювати навчальні проекти. В даному контексті в комп'ютерних мережах навчальних закладів створюються електронні бібліотеки, що вміщують навчальні посібники, періодику, ілюстрації, діаграми, графіки, трьохвимірні моделі, анімацію, довідникові матеріали, відеофільми. Це стало важливим підґрунтям для розробки уроків, навчально-методичних матеріалів.

У всесвітній мережі Інтернет існує безліч Веб-сайтів, що вміщують навчальну інформацію починаючи з навчальних планів та програм, навчально-методичних матеріалів, в тому числі й інформацію для позакласної та позашкільної діяльності, призначені як для школярів, так і для вчителів. Такі доступні ресурси є цікавим та новим джерелом інформації в системі освіти. Можливість колективної участі в освітньому процесі через засоби ІТКТ є характеристикою сучасної освіти. Такі засоби дозволяють людям на великій відстані один від одного стати членами «віртуальних співтовариств» – груп учнів, що об'єднуються єдиними цілями з різних куточків світу. Для таких співтовариств не існує бар'єрів часу, відстані, віку, рівню вмінь. Віртуальне спілкування дозволяє школярам та студентам обирати зручний для них час, місце, темп засвоєння матеріалу. Подібні ресурси дозволяють педагогам створювати різноманітні Інтернет-моделі для навчальних рольових ігор при викладанні різних дисциплін. Такі моделі можуть використовувати засоби електронної пошти, діалогового режиму, можливість створення та редагування текстів в інтерактивному режимі, засоби відео-конференцій.

Сьогодні перед педагогічною громадськістю стоїть проблема підготовки вчителів, що здатні працювати в умовах швидкого розвитку інформаційно-телекомунікаційних технологій, хоча такі технології, як кіно- відеофільми, телебачення та радіо продовжують відігравати значну роль в освіті країни. Їм на зміну поступово приходять такі форми навчання, що використовують сучасні ІТКТ. Сьогодні мова йде саме про цифрові технології, тобто синтез засобів, обладнання та систем передачі інформації.

УДК 519.876.5

Т. В. Михайлович

Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя, м. Тернопіль

ОБҐРУНТУВАННЯ ЦИКЛІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПОГОДИННОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ ВОДОСПОЖИВАННЯ

Натепер актуальною є задача короткотермінового прогнозування водоспоживання у водопостачальній мережі міста з метою її зонування, зниження тиску у трубопроводі та підбору оптимальних діаметрів будинкових лічильників.

Для вирішення поставленої задачі, авторами [1] була запропонована математична модель інтенсивності водоспоживання як неперервної функції у вигляді умовного лінійного періодичного випадкового процесу. Інтенсивністю водоспоживання $\xi(t)$ називається об'єм споживання води за одиницю часу в моменту часу t .

У статтях [1-5] інтенсивність водоспоживання $\xi(t)$ є стохастично-періодичною функцією з періодом T , тобто її характеристична функція $f_{\xi}(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ задовольняє такій умові:

$$\ln f_{\xi}(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \ln f_{\xi}(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1 + T, t_2 + T, \dots, t_n + T).$$

Давачі тепловодолічильників та цифрові засоби обробки статистичних даних водоспоживання оперують послідовностями, значеннями яких є об'єми спожитої води впродовж послідовних рівних часових інтервалів. Такі випадкові послідовності можна отримати шляхом агрегації інтенсивності водоспоживання.

Погодинним водоспоживанням ξ_t називається агрегація інтенсивності водоспоживання $\xi(t)$ з кроком 1 година.

$$\xi_t = \int_{t-1}^t \xi(s) ds, t \in Z.$$

У статті ми обґрунтуємо, що у випадку цілого T , послідовність ξ_t також буде стохастично-періодичною (рис. 1). Випадкова послідовність ξ_t використовується авторами [2-5] для статистичного аналізу та прогнозування водоспоживання за результатами спостережень.

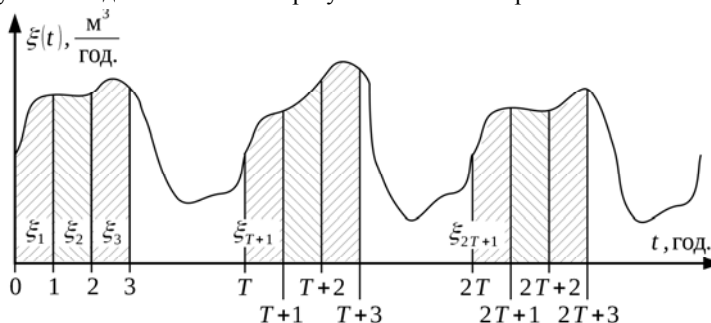


Рис. 1. Агрегація інтенсивності водоспоживання.

ξ_t – погодинне водоспоживання: площа заштрихованої області, м^3 ;

T – період процесу $\xi(t)$ та послідовності ξ_t , ціле число, год.

Також, в [2] поставлено задачу прогнозування та обґрунтовано модель погодинного водоспоживання у вигляді періодичної авторегресії; а

в [4, 5] описано її імплементацію в інформаційну систему, яку було впроваджено на підприємстві водопостачальних послуг.

Список використаних джерел:

1. Фриз М.Є. Обґрунтування математичної моделі водоспоживання у вигляді умовного лінійного випадкового процесу / М.Є. Фриз, Т.В. Михайлович // Електроніка та системи управління. – 2010. – №3(25). – С. 137-142.
2. Михайлович Т.В. Метод прогнозу водоспоживання з використанням моделі періодичної авторегресії / Т.В. Михайлович, М.Є. Фриз // ІПМЕ ім. Пухова. – 2011. – №57.
3. Михайлович Т.В. Метод інтервального прогнозування водоспоживання із використанням моделі періодичної авторегресії / Т.В. Михайлович, М.Є. Фриз // Вісник ТНТУ. – 2012 – №2(66). – С. 249-257.
4. Михайлович Т.В. Алгоритм та практична реалізація методу прогнозування водоспоживання із використанням моделі періодичної авторегресії / Т.В. Михайлович, М.Є. Фриз // Вимірвальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – №2.
5. Михайлович Т.В. Інформаційна система для імітаційного моделювання водоспоживання / Т.В. Михайлович, М.Є. Фриз // Вісник ХНУ. – 2013 – №2(66). – С. 249-257.

УДК 27.23.21:338.24.01

В. І. Мороз, д-р техн. наук,
Л. І. Чернобай, канд. екон. наук,
Н. О. Вацик, канд. екон. наук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ ПРИЙНЯТТЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ

Одним з ключових елементів забезпечення довгострокового розвитку суб'єктів господарювання є застосування сучасних систем управління для адекватного та економічно обґрунтованого реагування на результати впливу низки факторів зовнішнього та внутрішнього середовища їх функціонування. Так, у менеджменті згідно з концепцією процесно-структурованого управління застосовується низка методів, використання яких має на меті досягнення індивідуальних, колективних і загальних цілей [1]. Потрібно зазначити, що методи процесно-структурованого менеджменту розглядаються керівниками не як відокремлені елементи, а як цілісна система взаємодіючих, взаємопов'язаних і взаємодоповнюючих складових, які зорієнтовані на забезпечення управлінського впливу керуючої системи на керовану, а також на створення умов функціонування суб'єкта господарювання, розроблення планово-економічних, соціальних і технологічних показників і механізмів їх досягнення тощо.

Проте, опис результатів функціонування суб'єктів господарювання проводиться у вигляді дискретних величин (щоквартальні значення), які необхідно застосувати для виявлення основних тенденцій розвитку та

моделювання економічних процесів. У такому випадку доцільно застосовувати методи, які дають змогу розв'язувати одно- чи багатокритеріальні задачі з вибором сукупності критеріїв, зведенням їх до єдиного вимірника і побудови єдиної цільової функції. До найбільш придатних методів для розв'язування задач такого типу належать інтегральні перетворення для дискретних величин.

Для реалізації цілей дослідження, тобто для прийняття раціональних управлінських рішень, а також для опису поведінки суб'єкта господарювання запропоновано здійснити його ідентифікацію як динамічної ланки. На першому етапі досліджень для ідентифікації використано диференціальне рівняння другого порядку. Процес ідентифікації суб'єкта господарювання відбувається з використанням інтегрального середньоквадратичного критерію між відхиленнями табличних даних і реакції моделі. Розв'язок диференціального рівняння другого порядку, яким здійснюють опис суб'єкта господарювання та його ідентифікацію, відбувається з використанням інтегральних перетворень, а саме – z-перетворення [2]. Процедуру отримання рекурентної формули виконано методом відображення нулів та полюсів [2]. Використання ідентифікації суб'єкта діяльності як динамічного об'єкта другого порядку дало змогу спростити процедуру знаходження оптимальної точки внесення інвестицій.

Власне, застосування рекурентних рівнянь у процесі прийняття управлінських рішень дасть змогу керівництву суб'єкта господарювання врахувати часовий аспект та динамічні процеси під час формування стратегічних, тактичних та оперативних планів, а також для прогнозування діяльності підприємства на майбутній період.

Авторами проведено дослідження щодо прогнозування результатів діяльності ПАТ «Промприлад» у розрізі витрат на експорт, відображених на рис. 1. Прийняття управлінських рішень стосується ідентифікації часового періоду додаткових вкладень.

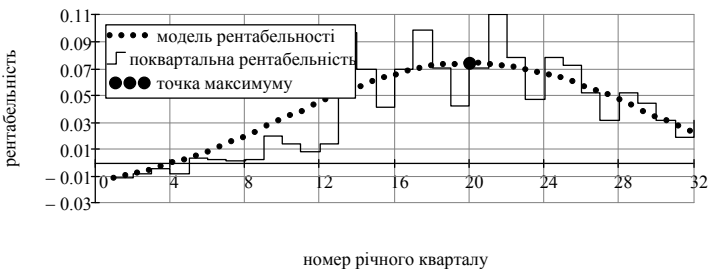


Рис. 1. Ідентифікація моменту додаткового фінансування експортної діяльності

Апроксимація табличних даних з витрат на експортну діяльність підприємства проводилась диференціальним рівнянням другого порядку $a_2 P''(t) + a_1 P'(t) + a_0 P(t) = B(t)$, де коефіцієнт a_0 приймався як $a_0 = P(t_{кін.}) / B(t_{кін.})$; $B(t)$ – витрати; $P(t)$ – рентабельність.

Список використаних джерел:

1. Концепція та еволюція процесно-структурованого менеджменту [Електронний ресурс] / О.Є. Кузьмін // Економіка: реалії часу. Науковий журнал. – 2012. – №2(3). – С. 7-16. – Режим доступу: <http://www.economics.opu.ua/n3.html>.
2. Moroz V. High-Speed Computer Simulation of Electrical Circuits / V. Moroz, G. Sivyakova // Journal of Energy Engineering and Control Systems. – 2015. – Vol. 1, Issue 1, 2015. – P. 49-56.

УДК 372.853.53

А. М. Москальчук,

А. М. Кух, канд. пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ВИГОТОВЛЕННЯ І ВИКОРИСТАННЯ 3D ГОЛОГРАМ У НАВЧАЛЬНОМУ ПРОЦЕСІ

Одним з перспективних напрямків розширення можливостей подання відеоінформації є технологія 3d голографії. Голографія – набір технологій для точного запису, відтворення і переформатування хвильових полів, спосіб одержання об'ємних зображень предметів на фотопластинці (голограми) за допомогою когерентного випромінювання лазера. Голограма фіксує не саме зображення предмета, а структуру відбитої від нього світлової хвилі (її амплітуду та фазу). Для отримання голограми необхідно, щоб на фотографічну пластинку одночасно потрапили два когерентних світлових пучки: предметний, відбитий від об'єкта та опорний – що проходить безпосередньо від лазера. Світло обох пучків інтерферує, створюючи на пластинці чергування дуже вузьких темних і світлих смуг – інтерференційну картину[1].

Голограми поділяться на кілька видів, кожен з яких відповідає різним вимогам виробників. 3-D-голограми здатні передавати тривимірний ефект і глибину реальної моделі. При створенні даного виду голограм завжди використовують модель в масштабі 1:1. Таким чином, при сильному направленні промені світла буде створений приголомшливий оптичний ефект.

Інтернет рясніє повідомленнями про створення 3d голограм і пристроїв для їх відтворення. Користувачів вражає простота виготовлення, наприклад, піраміди для перегляду 3d голограм з iPhone чи планшету[2]. Однак, чи є це голограма? Розглянемо цю проблему докладніше. Для одержання зображення в просторі і створення ілюзії об'ємності в 3d піраміді використовується не принцип інтерференції, а принцип побудови зображення в плоскому дзеркалі. Він ґрунтується на тому, що зображення у дзеркалі віддалене від поверхні дзеркала на відстань, що рівна відстані від об'єкта до дзеркала. Для отримання зображення у вертикальній площині досить розмістити дзеркало під кутом 45° до об'єкта. Для створення повноцінної 3-х мірної ілюзії таких дзеркал (або стекол) беруть декілька (3-4) і розміщують з різних сторін.

Описаний вище спосіб одержання зображень не має нічого спільного із продекларованим принципом **голографічної телеприсутності** (holographic telepresence) – голографії, що змінюється зі сталою швидкістю перезапису зображення в реальному часі. Прогресу в розвитку цієї технології досягли професор Нассер Пейгамбарян (Nasser Peughambarian) і його колеги із університету Арізони. Вчені діяли в співробітництві із японською корпорацією Nitto Denko. Суть винаходу полягає у використанні спеціального матеріалу – полімеру що здатен фіксувати зображення з частотою 2 кадри за секунду[3].

Тим не менше, 3d голографія на основі побудови зображення в дзеркалі займає своє місце і в навчальному процесі. Розглянути деталі установок, приладів, 3d моделей, об'єктів, що не доступні безпосередньо, організація відеоеккурсій, віртуальних подорожей – ось далеко не всі галузі її використання.

Виготовлення відеороликів для проектування в піраміді розпочинається із відеозапису об'єкта. Далі відеозапис модифікуються програмою нелінійного монтажу, наприклад, Adobe Premier, Camtasia, After Effects. Виділивши необхідний елемент зображення та використовуючи операції Transform (Зміна), Flip (поворот) та Copy (копіювання) виготовляються копії зображення повернуті на 90°, 180°, 270°. Ці копії розміщуються на різних відеодоріжках, але суміщені в часі для одночасного відтворення. Після проведених операцій відео конвертується в один із відеоформатів. Зауважимо, що пропорції зображень для демонстрації на піраміді мають бути витримані 3x4, а фон має контрастувати до зображення.

Список використаних джерел:

1. Голографія. – Режим доступу: <https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%BE-%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D1%84%D1%96%D1%8F>.
2. Самостійне виготовлення голографічно-тривимірної піраміди. – Режим доступу: <http://majster-klas.pp.ua/114-samostyne-vigotovlennya-golografchnogo-trivimnoyi-pramdi.html>.
3. О новой технологии 3D-голографии в деталях. – Режим доступа: <http://www.nanonewsnet.ru/articles/2010/o-novoi-tekhnologii-3d-golografii-v-detalyakh>

УДК 371.134+378.147+004

Р. В. Моцик, канд. пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ВИМОГИ ДО ВЧИТЕЛЯ ПОЧАТКОВОЇ ШКОЛИ У ПРОЦЕСІ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ

Останнім часом багато науковців наголошують на тому, що сучасний учитель повинен володіти інформаційними технологіями навчання (ІТН) і використовувати їх у своїй професійній діяльності. Такі вимоги зумовлені тим, що на розвиток професійних якостей учителя в сучасних

умовах впливає процес інформатизації системи освіти та запровадження ІТН у навчальний процес.

Учені визначають такі основні завдання інформатизації освіти:

- формування інформаційної культури людини;
- забезпечення розвитку особистісних якостей людини, розкриття її творчого потенціалу;
- підвищення ефективності навчально-виховного процесу на підставі запровадження ІТН, надання діяльності творчого, дослідницького характеру;
- інтенсифікація методичної роботи та наукових досліджень.

Серед нагальних проблем інформатизації освіти в навчальному процесі виокремлюють такі:

- формування інформаційної культури вчителя;
- використання ІТН;
- формування в учителів навичок організації системної роботи з комп'ютерною технікою в конкретній предметній галузі;
- розробка ІТН, їх психолого-педагогічних і психофізіологічних засад;
- підготовка педагогічних кадрів;
- удосконалення управління освітою;
- ресурсне забезпечення інформатизації освіти.

Основою ІТН є комп'ютерні навчальні системи, які бувають двох типів: традиційна та інтелектуальна.

Характерною особливістю традиційної системи є наявність однієї навчальної програми, що керує всією навчальною діяльністю; систему другого типу називають допоміжною.

Умовою успішної професійної діяльності вчителя є його професійна компетентність в галузі використання комп'ютерних і телекомунікаційних технологій. Можемо визначити склад змісту інформаційної компетенції майбутнього вчителя початкових класів: знання та вміння. Знання: психолого-фізіологічних основ сприйняття аудіовізуальної інформації людиною; інформаційних комп'ютерних технологій (програмоване комп'ютерне навчання та контроль, гіпертекст, гіпермедіа, мультимедіа, комп'ютерне моделювання); комунікаційно-інформаційних технологій навчання (аудіо-, відеокурси, відео-телевізійні курси, відеокомп'ютерні курси, CD-Rom курси, електронна пошта, телеконференції, відеоконференції, електронні конференції); інтерактивних технологій навчання; дидактичних умов використання ІТН, зокрема у процесі вивчення та навчання іноземної мови; специфіки ДН та технологій організації самостійної роботи; особливостей організації та підтримки інформаційного середовища в закладі освіти.

Уміння: діяти відповідно до типових правил користування ІТН, працювати в глобальній і локальній мережах та з комп'ютерними програмами; використовувати сучасні джерела та засоби обробки інформації (електронні посібники, перекладачі, бази даних бібліотек, теле-відеоконференції, електронної пошти, пошукових систем, і як результат – вибір необхідної галузі

знань); уважно стежити за презентованою інформацією про сучасні технології; орієнтуватися в потоці інформації; користуватися послугами, що надаються світовою комп'ютерною мережею Internet; використовувати мультимедійні засоби в процесі навчання або підвищення рівня професійної компетентності; сприймати, визначити необхідні джерела інформації під час застосування довідкових джерел, знаходити і передавати (переробляти) нову інформацію; використовувати нові технології (знаходити інформацію в базах даних, гіпертекстах; оцінювати власний досвід використання ІТН; спостерігати за розвитком сучасних ІТН і брати в ньому участь як користувач; працювати в мережі Internet (формулювати пошуковий запит, знаходити необхідний документ, відсилати пошту, користуватися бібліотечними каталогами, довідковою інформацією, працювати з періодикою, брати участь у міжнародних телекомунікаційних конкурсах і проєктах, публікувати результати власних досліджень).

УДК 539.3

Р. С. Мусій*, д-р. фіз.-мат. наук,

Х. Т. Дрогомирецька*, канд. фіз.-мат. наук,

М. І. Сорокатий**, канд. фіз.-мат. наук

*Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів,

**Національна Академія сухопутних військ
ім. Гетьмана П. Сагайдачного, м. Львів

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОМЕХАНІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ШАРУ ЗА ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ДІЇ В РЕЖИМІ ЗГАСНОЇ СИНУСОЇДИ ЗА ВРАХУВАННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО РОЗСІЮВАННЯ ЕНЕРГІЇ

Розглянуто електропровідний неферромагнітний шар з плоскопаралельними межами за електромагнітної дії в режимі згасної синусоїди (РЗС). Шар віднесений до декартової системи координат x, y, z , площина xOy якої співпадає зі серединною площиною шару. Основи шару теплоізовані і вільні від силового навантаження. Фізико-механічні характеристики матеріалу шару вважаються сталими. Дана електромагнітна дія зумовлює в шарі нестационарні об'ємні джерела джоулевого тепла Q і пондеромоторні сили \vec{F} , що створюють нестационарне температурне поле T і механічні напруження, які описуються компонентами σ_{ij} ($i, j = x, y, z$) тензора динамічних напружень $\hat{\sigma}$. За врахування процесу термопружного розсіювання енергії, привнесеної в шар електромагнітною дією, температурне поле і поле деформацій є взаємопов'язаними. Тому розрахункова модель розглядуваної задачі складається з двох етапів. На першому етапі зі співвідношень Максвелла визначається нестационарне електромагнітне поле, яке описується дотичною компонентою H_y вектора напруженості магнітного поля \vec{H} та відповідні

йому джерела тепла $Q = 1/\sigma(\text{rot}\vec{H})^2$ і пондеромоторні сили $\vec{F} = \mu \cdot \text{rot} \vec{H} \times \vec{H}$, де σ – коефіцієнт електропровідності; μ – магнітна проникність матеріалу. На другому – з рівнянь зв'язаної динамічної задачі термомпружності в напруженнях [1] знаходяться температура T і компоненти σ_{ij} тензора динамічних напружень $\vec{\sigma}$.

За використання методики поліноміальної апроксимації шуканих функцій, якими є H_y , T і σ_{ij} , по товщині шару [1], знайдено загальний розв'язок даної задачі і чисельно проаналізовано температуру і напруження в шарі з нержавної сталі X18H9T за однорідної електромагнітної дії в РЗС залежно від амплітудно-частотних параметрів дії та параметра ε_* , що характеризує зв'язаність полів деформації і температури.

Використано частоту несучих електромагнітних коливань ω поза околom резонансних частот електромагнітного поля ω_{r_s} (s – порядок резонансної частоти) і рівних ω_{r_1} і ω_{r_2} .

Виявлено наступні нові закономірності у зміні теплових і механічних властивостей даного шару за розглядуваної електромагнітної дії в РЗС:

- значення напружень і температури за частот $\omega \neq \omega_{r_s}$ і $\omega = \omega_{r_s}$ ($s = 1, 2$) електромагнітної дії в РЗС тривалістю $t_i \leq 10^{-2}c$ за врахування термомпружного розсіювання практично не відрізняються від таких, знайдених без такого врахування (за врахування термомпружного розсіювання енергії максимальні значення температури приблизно на $1 \div 3\%$ більші);
- за неврахування термомпружного розсіювання ($\varepsilon_* = 0$) за частот $\omega \neq \omega_{r_s}$ і $\omega = \omega_{r_s}$ ($s = 1, 2$) режим власних коливань напружень досягається за час $t \geq 0, 3t_i$;
- за врахування термомпружного розсіювання ($\varepsilon_* \neq 0$) за частот $\omega \neq \omega_{r_s}$ і $\omega = \omega_{r_s}$ ($s = 1, 2$) напруження σ_{ij} зменшуються (практично до нуля) за час $t \leq 1, 0 \cdot 10^5 t_i$.

Висновок. За тривалості $t_i \leq 10^{-2}c$ дії РЗС вплив термомпружного розсіювання на максимальні значення температури і напружень неістотний і проявляється лише в подальшому згасанні амплітуди коливань цих величин. За цей час процес нагріву і деформування електропровідного шару має адіабатичний характер [2].

Список використаних джерел:

1. Гачкевич О.Р. Термомеханіка неферомагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди / О.Р. Гачкевич, Р.С. Мусій, Д.В. Тарлаковський. – Львів : СПОЛОМ, 2011. – 216 с.
2. Мусій Р.С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми / Р.С. Мусій. – Львів : РАСТР-7, 2010. – 216 с.

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОПРУЖНИХ
ПРОЦЕСІВ У КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ
ТІЛАХ ТА ОЦІНКА ЇХ НЕСУЧОЇ ЗДАТНОСТІ ЗА ДІЇ ІМПУЛЬСНИХ
ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ**

Елементами конструкцій сучасних машин і механізмів є кусково-однорідні електропровідні тіла (КОЕТ), які за експлуатації цих пристроїв зазнають впливу різних фізико-механічних полів, зокрема імпульсних електромагнітних полів (ІЕМП).

За дії ІЕМП в кожному p -му ($p = \overline{1, n}$) тілі КОЕТ виникають джоулеві тепловиділення $Q^{(p)}$ та об'ємні пондеромоторні сили $\vec{F}^{(p)}$, які створюють у ньому нестационарні температурне $T^{(p)}$ і механічні поля переміщень $\vec{U}^{(p)}$ та напружень $\vec{\sigma}^{(p)}$. Відповідні їм інтенсивності напружень $\sigma_i^{(p)}$ в складових p -их тілах можуть досягати значень, що перевищують межу пружної деформації $\sigma_{np}^{(p)}$ матеріалу p -го тіла або межу міцності $\sigma_M^{(p)}$ p -го контактного з'єднання p -го і $(p+1)$ -го складових тіл КОЕТ.

Вихідні співвідношення для опису параметрів, що характеризують електромагнітні, теплові та механічні процеси в КОЕТ, сформульовано за три етапи. На першому етапі записано рівняння для визначення параметрів ІЕМП та вирази для джоулевого тепла $Q^{(p)}$ і пондеромоторних сил $\vec{F}^{(p)}$ як функцій цих параметрів. За ключову функцію вибрано вектор напруженості магнітного поля $\vec{H}^{(p)}$, який в p -му тілі визначається зі співвідношень Максвелла $\Delta \vec{H}^{(p)} - \sigma_p \mu_p \frac{\partial \vec{H}^{(p)}}{\partial t} = 0$, $\text{div } \vec{H}^{(p)} = 0$. Питомі густини $Q^{(p)} = 1 / \sigma_p (\text{rot } \vec{H}^{(p)})^2$, $\vec{F}^{(p)} = \mu_p \cdot \text{rot } \vec{H}^{(p)} \times \vec{H}^{(p)}$, де σ_p – коефіцієнт електропровідності; μ_p – магнітна проникність матеріалів p -го тіла, t – час.

На другому етапі за розподілом джоулевого тепла $Q^{(p)}$ визначається температура $T^{(p)}$ в p -му тілі КОЕТ з рівняння теплопровідності $\Delta T^{(p)} - \frac{1}{\kappa_p} \frac{\partial T^{(p)}}{\partial t} = -\frac{Q^{(p)}}{\lambda_p}$, де κ_p , λ_p – коефіцієнти температуро- і теплопровідності матеріалу з урахуванням умов теплообміну на його зовнішніх поверхнях та умов ідеального теплового контакту між p -м і $(p+1)$ -м складовими тілами КОЕТ.

На третьому – за відомими виразами температури $T^{(p)}$ і пондеромоторної сили $\vec{F}^{(p)}$ з рівнянь динамічної термопружності в напруженнях

$$Def \left(\operatorname{div} \vec{\sigma}^{(p)} + \vec{F}^{(p)} \right) = \rho_p \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1 + \nu_p}{E_p} \vec{\sigma}^{(p)} + \left(\alpha_p T^{(p)} - \frac{\nu_p}{E_p} \sigma_*^{(p)} \right) \hat{I} \right]$$

або в переміщеннях

$$\left(\Delta + \frac{1}{1 - 2\nu_p} \operatorname{grad} \operatorname{div} \right) \vec{U}^{(p)} - \frac{2(1 + \nu_p) \rho_p}{E_p} \frac{\partial^2 \vec{U}^{(p)}}{\partial t^2} = \frac{\alpha_p E_p}{1 - 2\nu_p} \operatorname{grad} T^{(p)} - \frac{2(1 + \nu_p)}{E_p} \vec{F}^{(p)}$$

визначається термонапружений стан p -го тіла КОЕТ, який характеризується вектором переміщень $\vec{U}^{(p)}$ та тензором напружень $\vec{\sigma}^{(p)}$. Тут Def – деформатор, Δ – оператор Лапласа, α_p , ν_p – коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона, E_p – модуль Юнга, ρ_p – густина матеріалу p -го тіла. Далі обчислюється інтенсивність напружень в p -му тілі КОЕТ

$$\sigma_i^{(p)} = \sqrt{(3I_2(\vec{\sigma}^{(p)}) - I_1^2(\vec{\sigma}^{(p)})) / 2}.$$

Тут $I_j(\vec{\sigma}^{(p)})$ ($j = 1, 2$) – j -й інваріант тензора напружень у p -му тілі КОЕТ. Несуча здатність КОЕТ втрачається, якщо інтенсивність напружень $\sigma_i^{(p)} > \sigma_{np}^{(p)}$ хоча б в одному зі складових тіл. Якщо $\sigma_i^{(p)} < \sigma_M^{(p)}$, то властивості контактного з'єднання тіл зберігаються.

УДК 004.9

В. Є. Мухін, д-р. техн. наук,
А. П. Яковлєва, канд. фіз.-мат. наук,
Я. І. Корнага, канд. техн. наук,
Я. Є. Горбунов

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗМІЩЕННЯ ВИШОК МОБІЛЬНОГО ЗВ'ЯЗКУ НА ОСНОВІ ТЕХНОЛОГІЇ 5G

Вступ. З розвитком нових технологій мобільного зв'язку постало питання про оптимальне покриття ретрансляторами територій та заміни класичного кабельного з'єднання на бездротове, що стане можливим завдяки технології 5G, яка проходить випробування та показує швидкість передачі інформації до 7,5 Гбіт/с, що в порівнянні з звичайним дротовим з'єднанням (twisted pair), є більшою в кілька разів.

Основна частина. Для вирішення задачі покриття території вишками 5G та заміни дротового з'єднання на бездротове потрібно вирішити кілька задач:

1. Визначити кількість абонентів (комп'ютерів) на відповідній території.
2. Визначити кількість вишок мобільного зв'язку для підключення всіх абонентів (комп'ютерів).
3. Розташувати вишки мобільного зв'язку відповідно до розміщення абонентів на певній території, яка менша чим радіус її дії.
4. Розташувати вишки мобільного зв'язку відповідно до розміщення абонентів на певній території з урахуванням особливостей місцевості.
5. Заповнити вишками мобільного зв'язку території (задача заповнення «ранца»).

Розв'яжемо розташування вишки мобільного зв'язку відповідно до розміщення абонентів на певній території, яка менша за її радіус дії, що зводиться до розв'язання задачі знаходження рівновіддаленої точки на еліпсоїді.

Дана задача є задачею умовної оптимізації. Вона формулюється таким чином [1, 2]: нехай x^i , де $i = 1, 2, \dots, m$ – координати розміщення клієнтів мобільного зв'язку на певній території та $x^i = (x_1^i, x_2^i)$, де $(i = \overline{1, m}) \in R^2$ належить з наступною умовою [1, 2]:

$$D = \left\{ x \in R^2 : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} \leq 1, a_i \in R \right\}. \quad (1)$$

Необхідно знайти точку розміщення вишки мобільного зв'язку $x^0 \in R^2$ таку, що наступна функція $f(x) = \sum_{i=1}^m \|x - x^i\|^2$ прямує до мінімуму [1, 2].

В зв'язку з тим, що сигнал від вишок мобільного зв'язку розповсюджується у всі сторони однаково, то еліпсоїд який відповідає покриттю сигналом перетворюється на коло, тобто $a_1 = a_2 = 1$ та $D = \{x \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Дана задача має аналітичний розв'язок та формулюється так:

$$f(x) \rightarrow \min, g(x) = \|x\|^2 - 1 = 0. \quad (2)$$

Функція Лагранжа дає умову стаціонарності [1,2], з якої випливає, що:

$$x^0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x^i, \|x^0\|^2 = 1.$$

Таким чином точка мінімуму, тобто точка розміщення вишки мобільного зв'язку, знаходиться як:

$$y^0 = \frac{x^0}{\|x^0\|}, \text{ де } \|x^0\| = \sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}. \quad (3)$$

Ця задача з обмеженнями (1) може бути розв'язана за допомогою чисельних методів таких як, зокрема, метод проєкції градієнту або метод штрафних функцій [1-3].

Висновки. Після розв'язання задачі з оптимального розміщення вишок на певній території ми отримуємо точку в якій потрібно розмістити

ти вишку мобільного зв'язку. Проте дане розміщення не враховує особливості місцевості, зокрема розміщення будівель.

Список використаних джерел:

1. Васильев В.В. Численные методы решения экстремальных задач / В.В. Васильев. – М. : Наука, 1980. – С. 578.
2. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій / Ю.П. Зайченко. – К., 2001. – С. 688.
3. Бабина О.И. Разработка оптимизационной имитационной модели для поддержки процессов планирования складских систем / О.И. Бабина // Компьютерное исследование и моделирование. – 2014. – №2. – С. 295-307.

УДК 371.26:004

М. О. Мясковська, канд. пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПРОГРАМИ ДЛЯ АНАЛІЗУ ЯКОСТІ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

У процесі контролю знань студентів значна увага приділяється об'єктивним, ефективним і динамічним методам та засобам педагогічного контролю. Одним із популярних методів контролю знань студентів є тестування. Наразі є великий вибір комерційних і безкоштовних програмних засобів, які дають змогу здійснювати автоматизований тестовий контроль знань. Проте, можливість вибору програмних продуктів не забезпечує автоматизованого аналізу якості тестових завдань.

Загальноприйнятною у світі є система знань і технологій, що набула назву Rasch Measurement – система об'єктивованих педагогічних вимірів, що побудована за теорією Г. Раша. Ця теорія дозволяє встановити зв'язок між рівнем знань осіб, які проходять тестування, із результатами виконання тестів, що дозволяє в свою чергу визначити рівень знань незалежно від складності тестових завдань.

На моделі Г. Раша базуються спеціалізовані програми, які здійснюють математико-статистичний аналіз завдань тесту на відповідність вимогам цієї моделі. Таких спеціалізованих програм є багато, вони розрізняються за різними критеріями: кількістю математико-статистичних методів, обсягами вхідної інформації, обсягами (кількістю) результатних таблиць тощо. Існують як платні, так і безкоштовні програми. Вони дозволяють швидко опрацювати великі обсяги даних, розрахувати потрібні статистики, надати інформацію щодо формальних властивостей кожного тестового завдання і тесту в цілому, надійності та валідності результатів тестування, рівень та структуру підготовленості студентів, міри відповідності результатів студентів рівню складності завдань та ін. Такі програми можуть здійснювати шкалювання рівнів підготовки студентів та рівнів складності тестових завдань.

Розглянемо деякі з них. Статистичний пакет QUEST призначено для аналізу тестових завдань і питань соціологічних анкет. Обробка даних у ньому може проводитися як за теорією Г. Раша, так і за класичною теорією

єю педагогічних вимірів. Пакет RASCAL дозволяє шкалювати завдання та осіб, які проходять тестування, на основі одновимірної моделі Раша. Програма WINMIRA має широкий набір методів обробки даних на основі сучасної теорії тестів. Програма CONQUEST має засоби для проведення багатовимірних вимірів. Найбільш популярними програмними продуктами вважаються RUMM 2020 та WINSTEPS. Програма WINSTEPS є однією з сімейства програм, призначених для аналізу результатів тестування, побудовану на технології за теорією Г. Раша. Програма є платною, проте існує її безкоштовна версія, що називається MINISTER. Вона дозволяє використовувати усі можливості WINSTEPS, але має обмеження на кількість питань у тесті та кількість осіб. Програма має потужну довідку. Проте, ці програмні продукти мають англійський інтерфейс.

Розглянемо систему MOODLE, яка дозволяє проводити тестовий контроль, а також опрацьовувати результати тестування на основі математико-статистичних методів. Використовуючи цю систему, можна: створювати дистанційні курси для навчання; створювати, розподіляти, накопичувати та перевіряти завдання студентів; проводити аналіз тестових завдань та ін.

У системі MOODLE (версія 2.5.x) показники характеристик тесту є статистично обґрунтованими. Ця система використовує статистичні параметри, які обчислюються з використанням класичної та сучасної теорії тестів, зокрема: стандартне відхилення, медіана оцінок, значення ексцесу розподілу, значення асиметрії розподілу, коефіцієнт внутрішньої узгодженості, співвідношення помилок, стандартна помилка, оцінка навманія, успішність, ефективна вага, призначена вага, коефіцієнт дискримінації, індекс дискримінації. У вбудованій системі аналізу тестових завдань достатньо показників для забезпечення механізму покращення якості тестових завдань, підвищення точності об'єктивності тесту.

Розглянуті програмні продукти є важливим засобом підвищення ефективності та якості тестів. Використання цих програм дозволяє автоматизувати аналіз якості тестових завдань.

Список використаних джерел:

1. Сергієнко В.П. Використання вбудованої системи аналізу тестових завдань в LCMS Moodle / В.П. Сергієнко, Л.О. Кухар, О.В. Галицький, П.В. Микитенко // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2014. – Т. 41. – Вип. 3. – С. 196-208. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ITZN_2014_41_3_21.
2. Фетісов В.С. Програмні засоби для обґрунтування якості тестових завдань / В.С. Фетісов, Е.О. Чернишова // Наукові записки Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя. Серія: Психолого-педагогічні науки. – Ніжин, 2011. – Вип. 10. – С. 106-110.

О. П. Нечуйвігер, д-р фіз.-мат. наук,
К. В. Кейга

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

КУСКОВО-СТАЛА ІНТЕРЛІНАЦІЯ ПРИ ОБЧИСЛЕННІ 2 D ІНТЕГРАЛІВ ВІД ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Для наближеного обчислення інтегралу від функцій двох змінних

$$I(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \sin \omega g(x, y) dx dy$$

у випадку коли інформація про $f(x, y)$ та $g(x, y)$ задана слідами функцій на взаємно-перпендикулярних прямих, потребують окремого дослідження інтегралу від тригонометричних функцій, зокрема

$$J(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \sin \omega g(x, y) dx dy. \quad (1)$$

Означення. Під слідом функції $g(x, y)$ на лініях $x_k = k\Delta - \Delta/2$, $y_j = j\Delta - \Delta/2$, $k, j = \overline{1, \ell}$, $\Delta = 1/\ell$ розуміємо відповідно функції однієї змінної $g(x_k, y)$, $0 \leq y \leq 1$, $g(x, y_j)$, $0 \leq x \leq 1$.

В доповіді представлені кубатурні формули наближеного обчислення інтегралів виду (1) з використанням оператора кусково-сталої сплайн-інтерлінації [1]

$$Eg(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell} g(x_k, y) h_{0k}(x) + \sum_{j=1}^{\ell} g(x, y_j) H_{0j}(y) - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} g(x_k, y_j) h_{0k}(x) H_{0j}(y),$$

$$h_{0k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_k \\ 0, & x \notin X_k, \end{cases} \quad k = \overline{1, \ell}; \quad H_{0j}(y) = \begin{cases} 1, & y \in Y_j \\ 0, & y \notin Y_j, \end{cases} \quad j = \overline{1, \ell},$$

$$X_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], \quad Y_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}].$$

На класі диференційовних функцій отримані оцінки похибки наближення кубатурних формул.

Теорема 1. Нехай

$$\left| g^{(1,0)}(x, y) \right| \leq M_1, \quad \left| g^{(0,1)}(x, y) \right| \leq M_2, \quad \left| g^{(1,1)}(x, y) \right| \leq M,$$

тоді для кубатурної формули

$$\Phi_1(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \sin(\omega Eg(x, y)) dx dy$$

справедлива наступна оцінка похибки наближення

$$\left| J(\omega) - \Phi_1(\omega) \right| \leq \min \left(2; \frac{M\omega}{16} \Delta^2 \right).$$

Теорема 2. Нехай

$$\left|g^{(1,0)}(x,y)\right| \leq M_1, \quad \left|g^{(0,1)}(x,y)\right| \leq M_2, \quad \left|g^{(1,1)}(x,y)\right| \leq M,$$

тоді для кубатурної формули

$$\Phi_2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 E(\sin \omega g(x,y)) dx dy,$$

справедлива наступна оцінка похибки наближення

$$\left|J(\omega) - \Phi_2(\omega)\right| \leq \frac{\omega^2 M_1 M_2 + M \omega}{16} \Delta^2.$$

У першій кубатурній формулі функція $g(x,y)$ замінюється кусково-сталим інтерлінантом, в другій – кусково-сталим інтерлінантом замінюється вся підінтегральна функція. Теоретичні дослідження та проведений чисельний експеримент в системі комп'ютерної математики Mathcad показали, що за кубатурною формулою, де кусково-сталим інтерлінантом замінюється вся підінтегральна функція, обчислення є більш точними.

Список використаних джерел:

1. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування : у 2 т. : [монографія] / І.В. Сергієнко, В.К. Задірака, О.М. Литвин, С.С. Мельникова, О.П. Нечуйвітер ; Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. – К. : Наук. думка, 2011. – Т. 1. Алгоритми. – 447 с.

УДК 517.95

З. М. Нитребич*, д-р фіз.-мат. наук,
О. М. Маланчук**

* Національний університет «Львівська політехніка»,

** Львівський національний медичний університет ім. Д. Галицького

ОДНОРІДНА КРАЙОВА ЗАДАЧА У СМУЗІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА ЧАСОМ

Вивчається задача знаходження розв'язків однорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial t} + B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U = 0, \quad t \in (0, h), x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

що задовольняють однорідні крайові умови

$$a_1 U(0, x) + a_2 \frac{\partial U}{\partial t}(0, x) = 0, \quad b_1 U(h, x) + b_2 \frac{\partial U}{\partial t}(h, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

У рівнянні (1) $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – довільні диференціальні вирази загалом нескінченного порядку. Припускаємо, що символи $A(\nu)$, $B(\nu)$ відповідних диференціальних виразів для $\nu \in \mathbb{C}$ є цілими функціями. В умовах (2) $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{C}$, причому $|a_1|^2 + |a_2|^2 \neq 0$, $|b_1|^2 + |b_2|^2 \neq 0$.

Встановлено умови, за яких задача (1), (2) має лише тривіальний розв'язок, а також з'ясовано, коли ядро задачі є нескінченновимірним і визначається класом довільних цілих або неперервно диференційовних функцій.

Для досліджень використано диференціально-символьний метод [1].

Список використаних джерел:

1. Каленюк П.І. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод / П.І. Каленюк, З.М. Нитребич. – Львів : Вид-во НУ «Львівська політехніка», 2002. – 292 с.

УДК 517.91:532.2

О. М. Нікітіна, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький факультет Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГІБРИДНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації математично приводить до задач інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами [1-3].

Одним із ефективних методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень (ГПП). Основні положення теорії скінченних гібридних інтегральних перетворень (СГПП) закладено в роботі [4].

Розглянемо задачу побудови СГПП типу Лежандра-Бесселя-Фур'є на сегменті з двома точками спряження.

На множині $I_2 = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_3 < \infty\}$ побудуємо інтегральне перетворення, породжене гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\nu, \alpha}^{(\mu)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)a_1^2 \Lambda_{(\mu)} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 B_{\nu, \alpha} + \\ + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)a_3^2 d^2 / dr^2.$$

Тут $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [1], $\Lambda_{(\mu)}$ – узагальнений диференціальний оператор Лежандра [4]; $B_{\nu, \alpha}$ – диференціальний оператор Бесселя; d^2 / dr^2 – диференціальний оператор Фур'є другого порядку [2].

Мають місце теореми про дискретний спектр, про дискретну функцію, про зображення рядом Фур'є, про основну тотожність [5].

Ряд Фур'є визначає пряме $H_{\nu, \alpha}^{(\mu)}$ й обернене $H_{\nu, \alpha}^{-(\mu)}$ СГПП, породжене на множині I_2 ГДО $M_{\nu, \alpha}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[g(r)] = \int_0^{R_3} g(r) v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma(r) dr \equiv \tilde{g}_n, \quad (1)$$

$$H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r, \beta_n) \equiv g(r). \quad (2)$$

Основна тотожність СГПГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[g(r)]] = -\beta_n^2 \tilde{g}_n - \sum_{i=1}^3 k_i^2 \tilde{g}_{in} + (\alpha_{22}^3)^{-1} v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(R_3, \beta_n) g_R + \sum_{k=1}^2 d_k [Z_{\nu,\alpha;12}^{(\mu);k}(\beta_n) \omega_{2k} - Z_{\nu,\alpha;22}^{(\mu);k}(\beta_n) \omega_{1k}]. \quad (3)$$

Висновки. Одержані формули (1)-(3) складають математичний апарат для побудови інтегрального зображення точного аналітичного розв'язку відповідних крайових задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ. Вони можуть бути використані при вивченні стаціонарного стану композитів у випадку теплового або механічного миттєвого удару, при доведенні існування розв'язку мішаних задач математичної фізики неоднорідних середовищ тощо.

Список використаних джерел:

1. Коляно Ю.М. Методи теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно. – К. : Наук. думка, 1992. – 280 с.
2. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М.П. Ленюк. – К. : Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.
3. Конет І.М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці : Прут, 2004. – 276 с.
4. Комаров Г.М. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку / Г.М. Комаров, М.П. Ленюк, В.В. Мороз. – Чернівці : Прут, 2001. – 228 с.
5. Нікітіна О.М. Скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Лежандра-Бесселя-Фур'є на сегменті з двома точками спряження / О.М. Нікітіна, М.І. Шинкарик // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон : ХНТУ, 2015. – Вып. 3(54). – С. 47-51.

УДК 62-83

Н. С. Нікорюк*, канд. техн. наук,

В. М. Карпенко**, канд. техн. наук

*Донецький національний технічний університет, м. Донецьк,

**Національна акціонерна компанія «Нафтогаз України», м. Київ

АЛГОРИТМ ФОРМУВАННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ ДВИГУНА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ З ПОСЛІДОВНИМ ЗБУДЖЕННЯМ

У зв'язку з розвитком елементної бази та появою програмних засобів значно поширився інтерес до систем модального керування (СМК) зі спостерігачем стану (СС). Основу СС складає модель об'єкта. СС відно-

влює координати електропривода та заводять їх як сигнали зворотних зв'язків в середину тієї частини СМК, модель якої покладена в основу СС. Це не дозволяє в повній мірі використати можливості цих моделей. В [1] запропоновано використати математичні моделі об'єктів (СС) для формування перехідних процесів з керованим зростанням струму та практично з нульовим перерегулюванням. Розроблені моделі застосовуються лише для двигунів постійного струму з незалежним збудженням.

На рис. 1 приведена блок-схема моделі двигунів (СС), що визначає напругу живлення двигунів постійного струму з послідовним збудженням електропривода бурової лебідки ЛБ 650 Е за завданням зміни моменту двигунів $m(t)$. Модель побудована на підставі рівняння електричної рівноваги якірного кола двигунів з попереднім розрахунком координат електропривода.

На рис. 2 приведені результати розрахунку перехідних процесів пуску двигуна постійного струму з моделлю двигуна, що формує напругу живлення. Перерегулювання моменту, струму практично дорівнює нулю. Так для моменту перерегулювання становить:

$$\sigma = \frac{M_{\max} - M_{cm^*}}{M_{cm^*}} 100 = \frac{1,785 - 1,765}{1,765} 100 \approx 1,13\%,$$

де M_{\max}, M_{cm^*} результати розрахунків значень максимального та сталого моментів двигунів при пуску з максимальним навантаженням.

Таким чином, розроблена математична модель спостерігача стану (СС) двигуна постійного струму з послідовним збудженням дозволяє формувати перехідні процеси практично з нульовим перерегулюванням.

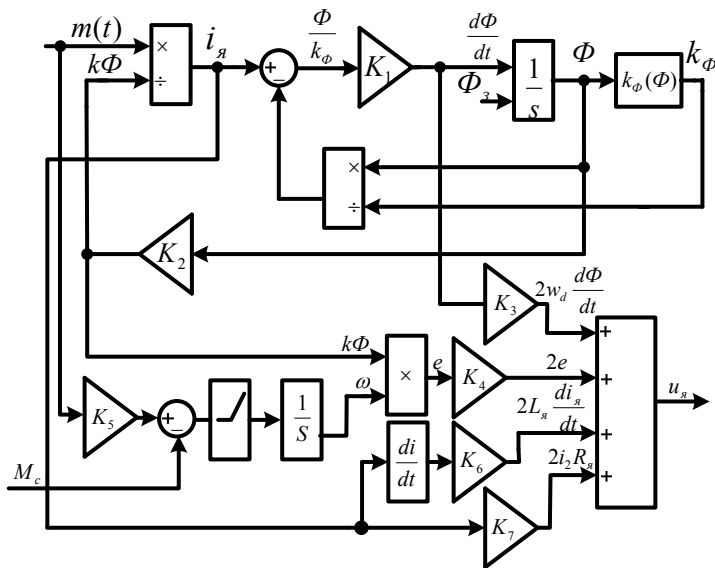


Рис. 1. Блок-схема моделі (СС) двигунів постійного струму

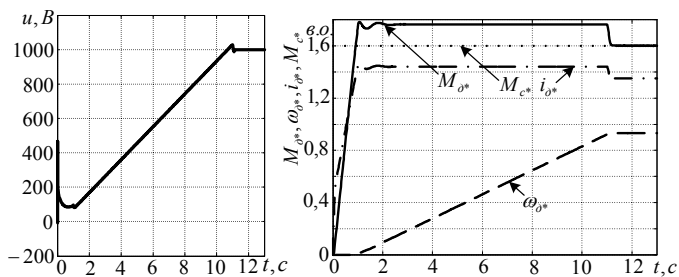


Рис. 2. Результати розрахунку перехідного процесу пуску двигуна постійного струму з послідовним збудження: а) напруги живлення, б) моменту двигуна (M_d), струму (i_d), кутової швидкості (ω_d), моменту опору M_c

Список використаних джерел:

1. Карпенко В.Н. Розробка алгоритму формування керуючого впливу системи автоматичного керування електропривода бурової лебідки ЛБ 650 Е / В.Н. Карпенко, В.А. Эсауленко, Н.С. Никорюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Технічні науки : зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет ім. І. Огієнка, 2012. – Вип. 7. – С. 155-165.

УДК 519.863:504.6

В. І. Ночвай, канд. техн. наук

Інститут проблем моделювання в енергетиці
ім. Г.Є. Пухова НАН України, м. Київ

ОПТИМІЗАЦІЯ ПРИРОДНО-ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ ВІДНОСНО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ СТАНДАРТІВ ЯКОСТІ ДОВКІЛЛЯ

Основні завдання оптимізації соціоекологічних систем пов'язані з умовами функціонування та розвитку природно-технічних систем. Основне коло задач охоплює моделювання стану навколишнього середовища, управління цим станом на основі оперативного регулювання технологічних режимів. Другий напрям системного моделювання для управління якістю довкілля – довгострокове прогнозування санітарно-гігієнічних та екологічних наслідків сценаріїв антропогенних впливів.

Розглядається структурна функція впливу на довкілля елементів природно-технічної системи. Взаємодія окремих підсистем визначається природними, технічними, а також антропогенними процесами, що відображають, як фундаментальні закони природи (закон збереження речовини або енергії, тепломасопереносу тощо), так і певні специфічні дії, зумовлені структурою системи.

Поширеними й характерними моделями, що описують взаємодію технічної системи і природного навколишнього середовища є системи диференціальних рівнянь [1] типу:

$$\dot{x} = f_{\sum_i} (x, t, p(t), q(t)),$$

де x – вектор, що описує фазовий стан системи, $x \in X_1$; t – час; $p(t)$ – вектор конструктивних (технологічних) параметрів $p(t) \in P$ (наприклад параметри забруднення); $q(t)$ – вектор випадкових параметрів, що характеризує зовнішні впливи природи (метеорологічні явища, біогеохімічні впливи) $q(t) \in W_{q(t)}$; $\Sigma_i \in \Sigma$ – структура природно-технічної системи.

Залежності типу джерело – рецептор стали важливою концепцією моделювання якості довкілля, яка описує чутливість «рецептора» у до зміни параметрів «джерела» антропогенного впливу x [2, 3]. Функцію «джерело-рецептор» в загальному випадку можна представити у вигляді функції чутливості

$$m^{ik} = \frac{\partial c_k}{\partial p_i},$$

яка може бути розрахована шляхом моделювання: $M: \Delta p \rightarrow \Delta c_k$.

Рецептором може бути середня концентрація забруднюючих речовин у повітрі, воді, ґрунті; чи інша величина, що кількісно характеризує вплив – захворюваність, кількість особин популяцій рослин та тварин, характер рослинності (біоіндикація) тощо. Джерело антропогенного впливу може бути локалізованим чи ні: точковим, площинним та об'ємним в просторі, миттєвим, короткочасним, тривалим чи постійним в часі.

Основні класи задач управління якістю довкілля представлені у вигляді багатокритеріальної соціоекологічної оптимізації моделей природно-технічних систем.

Список використаних джерел:

1. Ковальчук П.І. Моделювання і прогнозування стану навколишнього середовища / П.І. Ковальчук. – К. : Либідь, 2003. – 208 с.
2. Pragm L.P. Regional source quantification model for sulfur oxides in Europe / L.P. Pragm, K. Conradsen, L.B. Nielsen // Atmos. Env. – 1980. – Vol. 14. – P. 1027-1054.
3. Inverse modelling with a Lagrangian particle dispersion model: application to point releases over limited time intervals / [ed.] P. Seibert // Gryning and Schiermeier (eds.). s.l. : Air pollution modeling and its application XIX Plenum. – NY, 2001. – P. 381-389.

УДК 517.912

О. М. Омелян, канд. фіз.-мат. наук,

М. М. Сєрова, канд. фіз.-мат. наук

Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка, м. Полтава

ЛІНЕАРИЗАЦІЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ КОНВЕКЦІЇ-ДИFUЗІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ НЕЛОКАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

У роботі розв'язана задача застосування нелокальних перетворень еквівалентності для лінеаризації та знаходження нелокальних анзаців системи рівнянь конвекції-дифузії

$$U_t = \partial_x [F(U)U_x + G(U)], \quad (1)$$

$$\text{де } U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}, \quad G(U) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}, \quad u^a = u^a(t, x), \quad f^{ab} = f^{ab}(U),$$

$g^a = g^a(U)$ – довільні гладкі функції, $a, b = \overline{1, 2}$.

Методом, запропонованим в роботах [1-3], одержано систему нелінійних рівнянь конвекції-дифузії:

$$\begin{aligned} z_0^1 &= \partial_1 \left[\frac{\lambda_{11} + \lambda_{12} z^2}{(z^1)^2} z_1^1 - \frac{\lambda_{12}}{z^1} z_1^2 - \gamma_{12} z^2 \right], \\ z_0^2 &= \partial_1 \left[\frac{z^2 (\lambda_{11} + \lambda_{12} z^2) - (\lambda_{21} + \lambda_{22} z^2)}{(z^1)^3} z_1^1 + \frac{\lambda_{22} - \lambda_{12} z^2}{(z^1)^2} z_1^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{z^1} (\gamma_{21} + (\gamma_{22} - \gamma_{11}) z^2 - \gamma_{12} (z^2)^2) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

яка зводиться до лінійної системи вигляду

$$U_t = \Lambda U_{xx} + \Gamma U_x,$$

$$\text{де } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}, \quad \lambda_{ab}, \gamma_{ac} \in \mathbb{R}.$$

за допомогою перетворень:

$$t = t, \quad x = x, \quad u^a = v^a,$$

де $v^a = v^a(t, x)$ – нові невідомі функції.

$$t = x_0, \quad x = w^1, \quad v^1 = x_1, \quad v^2 = w^2,$$

де x_0, x_1 – нові незалежні змінні, $w^a = w^a(x_0, x_1)$ – нові залежні змінні,

$$x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad w_1^1 = z^1, \quad w_1^2 = z^2,$$

де $z^a = z^a(x_0, x_1)$ – нові залежні змінні.

Для системи (2) при конкретному значенні параметрів $\lambda_{ab}, \gamma_{ac}$, що визначаються матрицями:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix},$$

побудовані нелокальні анзаци, які не можливо одержати в рамках класичного методу Лі. Дані анзаци застосовано для редукції системи (2) до систем звичайних диференціальних рівнянь.

Зокрема, нелокальний анзак

$$\begin{aligned} z^1 &= e^{\frac{1}{4\lambda_1} x_0 \omega^2 + \frac{\gamma_1}{\lambda_1} \sqrt{x_0^2 + 1} \cdot \omega + \frac{\gamma_1^2}{2\lambda_1} x_0 + k_1 \arctg x_0} (x_0^2 + 1)^{\frac{1}{4}} (\varphi^1)^{-1}, \\ z^2 &= e^{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) x_0 \omega^2 + \left(\frac{\gamma_1}{\lambda_1} - \frac{\gamma_2}{\lambda_2} \right) \sqrt{x_0^2 + 1} \cdot \omega + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_1^2}{\lambda_1} - \frac{\gamma_2^2}{\lambda_2} \right) x_0 + (k_1 - k_2) \arctg x_0} \frac{\varphi^2}{\varphi^1}, \end{aligned}$$

$$\omega = (x_0^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \tau,$$

де $\varphi^a = \varphi^a(\omega)$, $\tau = \int z^{-1} dx_1$, редукує систему (2) до системи:

$$\ddot{\varphi}^1 + \left(\frac{\omega^2}{4\lambda_1^2} + \frac{k_1}{\lambda_1} \right) \varphi^1 = 0,$$

$$\ddot{\varphi}^2 + \left(\frac{\omega^2}{4\lambda_2^2} + \frac{k_2}{\lambda_2} \right) \varphi^2 = 0.$$

Розв'язавши редуковану систему та використавши відповідний анзац, можна знайти точні розв'язки системи (2).

Список використаних джерел:

1. Серов М.І. Лінеаризація систем нелінійних рівнянь дифузії за допомогою нелокальних перетворень / М.І. Серов, О.М. Омелян, Р.М. Черніга // Доп. НАН України. – 2004. – №10. – С. 39-45.
2. Серов М.І. Симетрійні властивості системи нелінійних рівнянь хемотаксису / М.І. Серов, О.М. Омелян. – Полтава : ПолтНТУ, 2012. – 238 с.
3. Tychynin V. A. Nonlocal symmetries and formulae for generation of solutions for a class of diffusion-convection equations / V.A. Tychynin, O.V. Petrova // J. Math. Anal. Appl. – 2011. – №382. – P. 20-33.

УДК 378.851

Н. М. Панасюк, канд. фіз.-мат. наук

Національний технічний університет України, «КПІ», м. Київ

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Спираючись на визначення акад. В.М. Глушковым інформаційних технологій як процесів пов'язаних з її переробкою – ці технології в освітньому процесі використовувалися завжди, бо будь-яка педагогічна технологія – інформаційна. Інформаційне забезпечення навчального процесу повинно оптимально розв'язувати дидактичні задачі на основі нових інформаційних технологій. Застосування таких ІТ в освіті є одним з основних напрямів її вдосконалення в країні. Застосування нових ІТ мають два аспекти – комп'ютер як інструмент навчання і як інформаційний елемент. Їх використання повинно забезпечити оптимальний відбір форм і методів викладання матеріалу. Зосередимося на застосуванні ІКТ. в технічному університеті при вивченні курсу вищої математики. Звичайно, в зв'язку із зростаючою обмеженістю коштів, що виділяються на освіту, виникають проблеми з обладнанням необхідної кількості спеціалізованих аудиторій. Да і ліміт аудиторних годин, відведених на курс, не сприяє широкому впровадженню ІКТ. Тому треба створювати нові форми позааудиторної роботи, стимулювати самостійну роботу студентів. Одним із безумовних здобутків впровадження нових ІКТ є індивідуалізація навчання. Так, використання ПК в самостійній роботі студентів, яким видаються набори індивідуальних завдань з певними методичними рекомендаціями і подальшим контролем викладача є. безумо-

вно корисним. Студенти полюбляють працювати в Інтернет, використовуючи його, в тому числі для списування. Ці устремління викладач може направити на розвиток, створюючи завдання в яких, наприклад треба завершити розв'язок, до готового розв'язку написати пояснення, математичні обґрунтування, в інших викласти логіку розв'язку, побудувати так звану блок-схему його. Це розвиває мислення студента, його логіку, допомагає засвоїти, також, і теоретичний матеріал. В наш час викладач повинен створювати авторські програмні засоби, що реалізуються, зокрема, в мультимедійній формі на CD, DVD – дисках, на сайтах та мережах Інтернет. Бажано впроваджувати в навчальний процес інтегровані заняття із застосуванням мультимедійних засобів. Навчаючі презентації є невід'ємною частиною навчання. Відсутність просторового мислення, глибокого розуміння поняття функції, зокрема як закону, що описує геометричний образ, спостерігала навіть у не самих слабких студентів. Точка рухається, описуючи криву, при цьому змінюються цифри, що є її координатами; обертаються, перетинаються різні геометричні образи, наприклад, перетинаються поверхні, утворюючи область інтегрування для повторних інтегралів Для їх створення можна використовувати як пакет Microsoft Office, так і безкоштовні аналоги Impress – для створення презентацій, Microsoft Mathematics для побудови різних графічних зображень, в тому числі поверхонь та їх перетинів. Треба відмітити також, що для виконання складних математичних розрахунків заслужену популярність мають інтегровані системи для їх автоматизації MathCAD, що прості в застосуванні завдяки зручному інтерфейсу і для роботи з ними достатньо елементарних навичок роботи з Windows – додатками. Тобто їх доцільно використовувати в навчальному процесі. Використання комп'ютерних програм, наприклад, в задачах математичної статистики і теорії ймовірності, деяких задачах лінійної алгебри, тощо є доцільним, але не можна виправдати рекомендації по застосуванню їх у вивченні курсу вищої математики при обчислення похідних та інтегралів, для якого треба знати, відповідно, таблицю похідних та інтегралів, правила диференціювання та методи інтегрування. Студент повинен мати активні базові знання, розвивати пам'ять, володіти технікою математичних перетворень.

Звернемося до питання дистанційної освіти. Інформаційні технології в дистанційному навчанні студентів повинні забезпечити як доставку основного об'єму матеріалу, що вивчається, так і інтерактивну взаємодію його з викладачем, а також оцінку знань, отриманих студентами в процесі навчання. При цьому необхідно створювати комплекси навчально-методичних матеріалів в тому числі – мультимедійні лекції, конспекти лекцій і практичних занять з відповідними методичними рекомендаціям, завдання для контролю і самоконтролю та ін. Студентів треба вчити самостійно працювати, стимулювати до самовдосконалення і самореалізації.

Впроваджувати ІКТ в навчальний процес треба дуже виважено, не забуваючи про діалогове навчання. Як показують психологічні дослідження запам'ятовування матеріалу, математичних термінів, розвинення мислення швидше відбувається саме при такому навчанні, при якому формується і монологічне спілкування самого з собою, тобто самостійне

мислення. Отже ми можемо загубити саму можливість формування творчого спеціаліста з його подальшим самостійним розвитком.

UDC 517.94:519.62

Ya. M. Pelekh, Ph. D.

National University Lviv Polytechnic, Lviv

AN APPROACH TO DEDUCING APPROXIMATE SOLUTIONS TO THE CAUCHY PROBLEM FOR NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

A new technique for the construction of numerical methods based on continued fractions is proposed. A characteristic feature of these algorithms is the fact that for certain values of the parameters it is possible to obtain both novel and traditional (explicit and implicit) numerical methods for the solution of the Cauchy problem for ordinary differential equations. Two-sided formulas are proposed by means of which it is possible to obtain on each integration step not only upper and lower approximations to the exact solution, but also information concerning the magnitude of the leading term of the error without the need for additional calculations of the right-hand side of the initial differential equation.

Problems involved in the construction and investigation of mathematical models of physicochemical, biological and economic processes, problems of multidimensional optimization, electronic, kinetics, etc lead to the need to solve nonlinear differential equations and systems of such equations of the form

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad 0 \leq x \leq X, \quad y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

Here $y(x)$ is a real m -component vector and f a real vector function of a dependent and an independent variable; moreover, it is assumed that the function f is differentiable as many times as necessary for numerical analysis.

Continued fractions and branches of continued that, under certain conditions, yield a high rate of convergence of the algorithms and two-side and monotone approximations have come to be widely uses in applied mathematics. Methods involving continued fractions process weak sensitivity to rounding error, and correctly represent the fundamental properties of the solutions of the particular type of problems that are under investigation . The process of calculating continued fractions is one of iteration and is easily programmed.

In the present article we propose approximate methods for the solution of problem (1) that are based on continued fractions. Without loss of generality, we will consider approximate formulas for determining the solution of problem (1) in the scalar case, inasmuch as they may be transferred component wise to systems of equations.

An approximate solution at the point $x_{n+1}, n = 0, 1, 2, \dots$, is to be found in the form

$$y_{n+1}^{[k, \ell]} = y_n / D_n, \quad (2)$$

$$\text{where } D_n = \sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \frac{d_{k,0}}{1 + \frac{d_{k,1}}{1 + \frac{d_{k,2}}{\ddots + \frac{d_{k,\ell-1}}{1 + d_{k,\ell}}}}}$$

The expressions for $d_{k,\ell}$ in the case $k + \ell = \overline{1,4}$ ($k = \overline{1,4}; \ell = \overline{0,3}$) have the form

$$\begin{aligned} d_{0,0} &= 1, \quad d_{i,0} = -\sum_{m=1}^i d_{i-m,0} \frac{\delta_m}{\delta_0}, \quad i = \overline{1,4}, \\ d_{0,1} &= -\frac{d_{\nu+1,0}}{d_{\nu,0}}, \quad \nu = 1, 2, 3, \quad d_{m,2} = d_{m+1,1} - d_{m,1}, \quad m = 1, 2, \\ d_{1,3} &= d_{2,1} \frac{d_{2,2}}{d_{1,2}}, \quad \sigma_0 = y_0 \neq 0, \quad \sigma_m = h \sum_{i=1}^q a_{mi} k_i, \quad (3) \\ k_i &= f \left(x_n + \alpha_i h, y_{n+h} \sum_{j=1}^q \beta_{ij} k_j \right), \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^q \beta_{ij}, \quad q = k + \ell. \end{aligned}$$

Here, h is the integration step ($h = x_{n+1} - x_n, n = 0, 1, 2, \dots$), $a_{ij}, \alpha_i, \beta_{ij}; i, j = \overline{1,4}$ – parameters.

Some approximate methods for nonlinear integro-differential equation of Volterra type were obtained and investigated.

Some of applied problems in physics, chemistry and mechanics were solved by numerical methods based on continued fractions.

УДК 519.62

Я. М. Пелех*, канд. фіз.-мат. наук,
С.М. Ментинський*,
Р. Я. Пелех**

*Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів,

**ПТ «Укрзалізниця», ПКТБ інформаційних технологій, м. Львів

НЕЛІНІЙНИЙ ДВОСТОРОННІЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРА ДРУГОГО РОДУ

Задачі будівельної механіки, електротехніки, автоматичного управління, хімічної кінетики, багатовимірної оптимізації і т.д. приводять до необхідності розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь. В обчислювальній

математиці знаходять широке застосування неперервні дробі, які при відповідних умовах дають високу швидкість збіжності алгоритмів, двосторонні і монотонні наближення, сприяють обмеженому накопиченню похибок заокруглення. Значне підвищення інтересу до ланцюгових дробів пов'язане ще й тим, що процес їх обчислень є циклічним і легко програмується.

Метою роботи є побудова нелінійних двосторонніх методів розв'язування інтегрального рівняння Вольтерра другого роду

$$f(x) = \int_a^x F[x, y, f(y)] dy, \quad x \in I_L, \quad (1)$$

де функція $F[x, y, f(y)]$ має необхідну для викладок гладкість. Розділимо інтервал $I_L: [a, b]$ на N частин довжини $h = \frac{b-a}{N}$ і позначимо $x_{i+1} = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots$), $f_i = f(x_i)$, причому $f(x_1) = 0$. Використовуючи апарат ланцюгових дробів та ідею побудови методів Рунге-Кутта наближений розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$Y_2^{[k,l]} = \frac{c_{0,0}}{\sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \frac{d_{k,0}}{1 + \dots + \frac{d_{k,l-1}}{1 + d_{k,l}}}} \quad (2)$$

Вирази для $c_{0,0}$, $d_{i,j}$ при $k+l=2$ ($k=1, 2; l=0, 1$) мають вигляд

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= h\delta_1, \quad d_{0,0} = 1, \quad d_{1,0} = \frac{\delta_2}{\delta_1}, \quad (\delta_i \neq 0), \\ d_{2,0} &= \frac{\delta_1\delta_3 + \delta_2^2}{\delta_1^2}, \quad d_{1,1} = \frac{d_{2,0}}{d_{1,0}}, \quad \delta_i = \sum_{j=1}^p a_{ij}k_j, \\ k_j &= F \left[a + \alpha_j h, a + \beta_j h, h \sum_{m=0}^{j-1} \gamma_{jm} k_m \right], \quad \gamma_{j0} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Параметри a_{ij} , α_i , β_i ($i, j = 1, 2$), γ_{21} визначимо з умови, щоб різниця між точним (f_2) і наближеним розв'язком $\left(Y_2^{(k,l)} \right)$ в точці $x_2 = x_1 + h$ мали вигляд:

$$f_2 - Y_2^{[k,l]} = \omega h^p \Psi(F) + O(h^{p+1}),$$

де h – крок інтегрування, $\Psi(F)$ – деякий диференціальний оператор, ω параметр двосторонності.

Теорема 1. Якщо $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = \frac{1}{2}$, $\gamma_{21} = \frac{1}{2}$, $a_{11} = 1 - a_{12}$, $a_{21} = 1 - a_{12} - \omega$, $a_{22} = a_{12} - 1 + \omega$, де a_{12} - довільне число, то

$$f_2 - Y_2^{[1,0]} = \omega h^2 f_1'' + O(h^3) \cong \omega h(k_2 - k_1).$$

Теорема 2. Якщо параметри приймають значення:

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_2 = \alpha_3 = 1, \beta_1 = 0, \beta_2 = \frac{2}{3}, \beta_3 = 0, \gamma_{21} = \frac{2}{3},$$

$$\gamma_{31} = -1, \gamma_{32} = 1, a_{11} = \frac{3}{2}(1 - \omega), a_{12} = \frac{3}{4}\omega, a_{13} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\omega,$$

$$a_{21} = \frac{3}{2}(1 + \omega), a_{22} = -\frac{3}{4}(1 + \omega), a_{23} = -\frac{3}{4}(1 + \omega),$$

$$a_{31} = -3\omega, a_{32} = \frac{3}{2}\omega, a_{33} = \frac{3}{2}\omega,$$

то $f_2 - Y_2^{[2,0]} = \omega h^3 \frac{(2F_x + F_y + FF_z)^2}{F} + O(h^4)$.

Для знаходження наближеного розв'язку рівняння (1) в наступних точках ($n \geq 3$) застосовуємо метод рухомого початку.

УДК 66.048.3

В. В. Петриченко

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ОПТИМІЗАЦІЯ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕКАЧУВАННЯ НАФТОПРОВОДАМИ СИСТЕМИ ЗБОРУ ПРОДУКЦІЇ НАФТОВИХ СВЕРДЛОВИН В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ЕКСПЛУАТАЦІЇ НАСОСНИХ СТАНЦІЙ

Добування нафти з надр землі здійснюється за рахунок енергії двох видів – природної енергії пласта та енергії, яка подається у свердловину. Фонтанний спосіб застосовується у початковий період експлуатації, коли пластовий тиск покладу досить великий. Фонтанний спосіб найбільш економічний.

У роботі [1. с.95-102] розглядається можливість оптимізації процесу перекачування на основі аналізу споживання електроенергії нафтопромислові дожимними насосними станціями (ДНС), що працюють на загальний нафтопровід. Показано, що в умовах невизначеності експлуатації ДНС, оптимізацію процесу перекачування доцільно проводити на основі аналізу циклограм роботи насосних агрегатів на загальний нафтопровід, що відображають технологічні режими і енергоємність транспортування продукції. Циклограми є періодичні функції у вигляді залежності тиску на виході кожного насосного агрегату від часу.

На підставі проведеного комплексу металографічних досліджень і обчислювальних експериментів [2. с.420-438] отримана залежність часу напрацювання на відмову робочого колеса насосного агрегату марки НК 210/200 від подачі при перекачуванні важких нафтопродуктів і розроблений алгоритм для оцінки часу напрацювання на відмову робочих коліс насосних агрегатів в умовах перекачування важких нафтопродуктів.

Список використаних джерел:

1. Кабиров М.М. Оптимизация процессов перекачки по нефтепроводам системы сбора продукции нефтяных скважин в условиях неопределенности эксплуатации насосных станций / М.М. Кабиров // Нефтегазовое дело. – 2011. – №2. – С. 95-102.
2. Закиричная М.М. Прогнозирование долговечности рабочих колес центробежных насосных агрегатов при перекачивании тяжелых нефтепродуктов / М.М. Закиричная // Нефтегазовое дело. – 2011. – №6. – С. 420-438.

УДК 517.946

Т. М. Пилипюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ З ОПЕРАТОРАМИ БЕССЕЛЯ, ФУР'Є, ЛЕЖАНДРА

Розглянемо задачу про структуру обмеженого на множині $D_2 = \{(t, r) : t > 0; r \in I_2 = (0; R_1) \cup (R_1; R_2) \cup (R_2; +\infty)\}$ розв'язку диференціальних рівнянь параболічного типу 2-го порядку

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - a_1^2 B_{\nu, \alpha}[u_1] + \gamma_1^2 u_1 &= f_1(t, r), \quad r \in (0; R_1), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - a_2^2 F[u_2] + \gamma_2^2 u_2 &= f_2(t, r), \quad r \in (R_1; R_2), \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} - a_3^2 \Lambda_{(\mu)}[u_3] + \gamma_3^2 u_3 &= f_3(t, r), \quad r \in (R_2; +\infty) \end{aligned} \quad (1)$$

з початковими умовами

$$\begin{aligned} u_1|_{t=0} &= g_1(r), \quad r \in (0; R_1); \\ u_2|_{t=0} &= g_2(r), \quad r \in (R_1; R_2); \\ u_3|_{t=0} &= g_3(r), \quad r \in (R_2; +\infty); \end{aligned} \quad (2)$$

крайовими умовами

$$u_1(t, r)|_{r=0} < +\infty; \quad u_3(t, r)|_{r=+\infty} < +\infty \quad (3)$$

та умовами спряження

$$\left(L_{j1}^k [u_k(t, r)] - L_{j2}^k [u_{k+1}(t, r)] \right) \Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t); \quad j, k = 1, 2, \quad (4)$$

де $B_{\nu,\alpha} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\alpha+1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu^2 - \alpha^2}{r^2}$ – диференціальний оператор Бесселя

[1], $F = \frac{\partial^2}{\partial r^2}$ – диференціальний оператор Фур'є [1],

$\Lambda_{(\mu)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + cthr \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1^2}{1-chr} + \frac{\mu_2^2}{1+chr} \right)$ – узагальнений диференці-

альний оператор Лежандра [1], $L_{jm}^k = \left(\alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}$;
 $j, m, k = 1, 2$.

Зауважимо, що тільки у випадку $\delta_{jm}^k = \gamma_{jm}^k \equiv 0$ умови (4) збігаються з класичними умовами спряження [2].

Інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку мішаної параболічної задачі спряження (1)-(4) побудовано методом гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя-Фур'є-Лежандра зі спектральним параметром [3].

Список використаних джерел:

1. Конет І.М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах / І.М. Конет, Т.М. Пилипюк. – Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2016. – 244 с.
2. Конет І.М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І.М. Конет. – Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2013. – 120 с.
3. Пилипюк Т.М. Гібридне інтегральне перетворення типу Бесселя-Фур'є-Лежандра на полярній осі зі спектральним параметром в умовах спряження / Т.М. Пилипюк // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : зб. наук. пр. – Чернівці : Прут, 2010. – Вип. 19. – С. 150-169.

УДК 519.85

О. С. Пічугіна, канд. фіз.-мат. наук

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

ПОЛІЕДРАЛЬНО-ПОВЕРХНЕВІ ПОДАННЯ ВЕРШИННО РОЗТАШОВАНИХ КОМБІНАТОРНИХ МНОЖИН ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Розглянемо наступну задачу оптимізації:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$h_i(x) = 0, \quad i \in J_l^0 = \{0, 1, \dots, l^0\}, \quad (2)$$

$$h_{l^0+i}(x) \leq 0, \quad i \in J_m^0, \quad (3)$$

$$x \in E \subset R^n : |E| < \infty . \quad (4)$$

Залежно від комбінації параметрів l', l'' і типу функцій, задача (1)-(4) буде умовною або безумовною, лінійною та нелінійною, опуклою тощо.

Додатково накладаємо умову на вершину розташування комбінаторної множини. Це означає її збіжність із множиною вершин своєї опуклої оболонки: $E = \text{vert } P$, $P = \text{conv } E$.

Ці множини цікаві тим, що утворюються в перетині комбінаторного многогранника P і описаної навколо опуклої поверхні S , відмінної від поверхні многогранника. Такі множини дозволяють наступні функціонально-аналітичні представлення:

$$E = S \cap P , \quad (5)$$

$$S = \left\{ x \in R^n : h_0(x) = 0 \right\}, \quad h_0(x) - \text{випукла}, \quad S \neq \Gamma P , \quad (6)$$

$$P = \text{conv } E = \left\{ x : Ax \leq b \right\} . \quad (7)$$

Пошук системи (6), (7) – це задача пошуку многогранно-поверхневого представлення комбінаторної множини. Представлення (5)-(7) цікаво тим, що дозволяє використовувати два типи неперервних релаксації (1), (4):

$$\underline{\text{Релаксація 1}} - f(x) \rightarrow \min_{x \in P}, \quad \underline{\text{Релаксація 2}} - f(x) \rightarrow \min_{x \in S} .$$

Однією з областей застосування многогранно-поверхневих представлень множин є умовні лінійні комбінаторні задачі. Припустимо, що $f(x), h_i(x) = 0$, $i \in J_{l'+l''}^0$, - лінійні,

$$n' = \dim(P'), \quad P' = \left\{ x \in P : x \text{ задовольняє (2), (3)} \right\} .$$

Для розв'язання (1)-(4) пропонується наступний ітераційний метод поверхневих відсікань (МПО), на кожному кроці якого послідовно розв'язуються дві підзадачі:

Підзадача 1. Розглядаємо релаксацію 1 і розв'язуємо умовну лінійну задачу на комбінаторному многограннику P' . Якщо розв'язок x^1 є допустимою точкою, вихідну задачу розв'язано, інакше переходимо до другого етапу.

Підзадача 2. Формуємо поверхневе відсікання, використовуючи релаксацію 2. Для цього вибираємо довільні n' ребер, що утворюють точку x^1 , і продовжуємо їх до перетину з описаною поверхнею, отримуючи n' пари точок на S . Вибираємо ті n' із них, що задають многогранний конус $K : \forall x \in K f(x) \geq f(x^1)$, і проводимо через них площину Π_1 . Формуємо правильне відсікання для x^1 , вибираючи відповідний підпростір, що обмежений площиною Π_1 .

Переходимо до другої ітерації і розв'язуємо релаксаційну задачу першого типу на більш жорсткому многограннику. Отримуємо нову точку x^2 і, відповідно, нову послідовність ребер і точок їх перетину з описаною поверхнею. Продовжуємо процедуру до отримання точки комбінаторної множини.

МПО є удосконаленням методу комбінаторних відсікань (МКО) [1]. На відміну від МКО, який ґрунтується на відсутності допустимих точок вершинно-розташованої множини E всередині P , МПО використовує відсутність точок E на більшій частині поверхні S . Перевагою МПО є те, що використання поверхневої релаксації дозволяє будувати поверхневі відсікання, що є більш жорсткими за комбінаторні [1].

Для застосування МПО необхідна побудова поверхні S , яка в ідеалі має обмежувати тіло максимального об'єму і при цьому щоб точки перетину довільної прямої з нею визначалися легко. Зручною в зазначеному сенсі поверхнею є сфера, оскільки точки перетину її з прямою визначаються явно, а її об'єм досить великий.

Серед вписаних в сферу евклідових комбінаторних множин з відомим аналітичним описом многогранника – загальна множина перестановок, деякі класи множин розміщень і сполучень та їх декартові добутки. Для них МПО може бути застосований безпосередньо. Для інших комбінаторних множин попередньо має бути розв'язано задачу пошуку представлення (5)-(7).

Список використаних джерел:

1. Ємець О.О. Відсікання в лінійних частково комбінаторних задачах евклідової комбінаторної оптимізації / О.О. Ємець, Є.М. Ємець // Доп. НАН України. – 2000. – №9. – С. 105-109.
2. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець. – К.: Ін-т системн. дослідж. освіти, 1993. – 188 с.

УДК 519.85

О. С. Пічугіна, канд. фіз.-мат. наук

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

ГРАФОВИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО СУМУ ПІДМНОЖИН

Розглянемо задачу про суму підмножин (the subset sum problem) в наступній постановці:

$$z = a \cdot x = \sum_{i=1}^n a_i x_i \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$x \in B_n = \{0, 1\}^n, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq A, \quad a > 0. \quad (3)$$

Задача (1)-(3) – NP-складна і є окремим випадком задачі про ранець, в якому корисність кожного елемента збігається з його вагою. Вона має застосування в багатьох практичних областях, зокрема в теорії розкладів, задачах упакування і розкрою, теорії складності алгоритмів, криптографії тощо.

Без обмеження загальності, можна вважати, що координати вектора a впорядковано за незростанням:

$$a_i \geq a_{i+1}, \quad i \in J_{n-1} = \{1, \dots, n-1\}.$$

Розв'язок (1)-(3) позначимо (x^*, z^*) і визначимо розмах значень цільової функції $z^* \in [z^{\min}, z^{\max}] = \left[0, \sum_{i=1}^n a_i\right]$.

Множину B_n представимо об'єднанням «шарів» із булевих векторів із фіксованою сумою координат: $B_n = \bigcup_{k=0}^n B_n(k)$,

$$B_n(k) = B_n \cap \Pi_k, \quad \Pi_k = \{x : x \cdot e = k\}, \quad k \in J_n^0. \quad (4)$$

Зауважимо, що при $k \in J_{n-1}$ (4) являє собою множину 0-1-перестановок із мультимножини $G_k = \{0^{n-k}, 1^k\}$.

Розглянемо мультимножину коефіцієнтів цільової функції:

$$G_a = \{a_i\}_{i \in J_n} = \{e_i^{n_i}\}_{i \in J_m} : e_i > e_{i+1}, \quad i \in J_{m-1}, \quad \sum_{i=1}^m n_i = n. \quad (5)$$

Знайдемо k^{\min}, k^{\max} – мінімальне і максимальне можливе число елементів оптимального ранця $x^* - k^* = \sum_{i=1}^n x_i^*$. З цією метою максимально завантажимо його найбільшими та найменшими елементами G_a , відповідно:

$$\sum_{i=1}^{k^{\min}} a_i \leq A, \quad \sum_{i=1}^{k^{\min}+1} a_i > A; \quad \sum_{i=1}^{k^{\max}} a_{n-i+1} \leq A, \quad \sum_{i=1}^{k^{\max}+1} a_{n-i+1} > A. \quad (6)$$

Виходячи з (6), маємо: $x^* \in B_n(k^*)$, $k^* \in [k^{\min}, k^{\max}]$, що можна представити додатковими обмеженнями на суму змінних. Отже, далі розглядаємо більш жорстку задачу (1)-(3),

$$k^{\min} \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq k^{\max}. \quad (7)$$

Визначимо, що при $k^{\min} = k^* = k^{\max}$ задача (2), (7) являє собою множину 0-1 n -перестановок $B_n(k^*)$; при $k^{\min} < k^{\max}$ - евклідову множину 0-1-розміщень $B_n(k^{\min}, k^{\max}) = E_{n+k^{\max}-k^{\min}, 2} \left(\left\{ 0^{n-k^{\min}}, 1^{k^{\max}} \right\} \right)$, що розкладається на сімейство множин 0-1-перестановок (4): $B_n(k^{\min}, k^{\max}) = \bigcup_{k=k^{\min}}^{k^{\max}} B_n(k)$.

При цьому можлива декомпозиція вихідної задачі на ряд умовних лінійних задач на множинах типу (4) – $z^* = \min_{k \in [k^{\min}, k^{\max}]} z^k$:

$$z^k = \min_{B_n^k} a \cdot x^k \rightarrow \max, \quad x^k = \left(x_i^k \right)_{i \in J_n} \in B_n(k), \quad a \cdot x^k \leq A. \quad (8)$$

Ми пропонуємо вирішити вихідну задачу за допомогою (8), будуючи для фіксованого k орієнтований граф $H_n(k, a) = (V, E)$ із коренем в $x^{\min k} = \arg \min_{B_n(k)} a \cdot x = (0^{n-k}, 1^k)$. Довільні дві його вершини $x, y \in V$ – суміжні ($\{x, y\} \in E$), якщо вони утворюються 0–1-транспозицією, $a \cdot x \neq a \cdot y$ і для них виконано впорядкування, зворотне до (5):

$$x_1 \leq \dots \leq x_{n_1}, \quad x_{n_1+1} \leq \dots \leq x_{n_1+n_2}, \dots, \quad x_{n-n_m+1} \leq \dots \leq x_n;$$

напрямок дуги $(x, y) \in E$ вибирається з умови $a \cdot x < a \cdot y$.

Граф будується доти, доки не буде знайдено точний розв'язок $z^* = A$ або не залишиться можливості покращення цільової функції ($\forall x \in V \ a \cdot x + \delta > A$).

УДК 517.977

Ю. К. Подлипенко*, д-р. фіз.-мат. наук,
М. Ю. Горбатенко**, канд. фіз.-мат. наук,
А. С. Перцов**, канд. фіз.-мат. наук

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ,

**Чернівецький національний університет
 імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПРО ЗНАХОДЖЕННЯ НАБЛИЖЕНИХ МІНІМАКСНИХ ОЦІНОК ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА ДЛЯ БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ

У роботі [1] було розглянуто проблему гарантованого оцінювання розв'язків крайової задачі для бігармонічного рівняння з граничними умовами типу Неймана.

Для систем, які описуються крайовими задачами для бігармонічного рівняння з граничними умовами типу Неймана, при сформульованих обмеженнях на невідомі дані цих задач, були отримані представлення для мінімаксних оцінок функціоналів від їх розв'язків, що спостерігаються, і похибок оцінювання через розв'язки однозначно розв'язних систем інтегро-диференціальних рівнянь спеціального вигляду.

Як розвиток цих ідей, в даній роботі вводиться поняття наближених мінімаксних середньоквадратичних оцінок значень лінійних неперервних функціоналів від розв'язків задачі Неймана для бігармонічного рівняння,

наведено вигляд та схему побудови таких оцінок. Доведено, що запропонована наближена мінімаксна оцінка збігається до точної мінімаксної оцінки.

Отримані результати можуть бути використані при розробці методів знаходження гарантованих оцінок станів систем, що описуються диференціальними рівняннями, розв'язки яких не визначені однозначно і існують лише коли дані цих задач задовольняють певним умовам сумісності.

Список використаних джерел:

1. Подлипенко Ю.К. Мінімаксне оцінювання розв'язків крайової задачі для бігармонічного рівняння з граничними умовами типу Неймана / Ю.К. Подлипенко, А.С. Перцов // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2008. – № 4. – С. 153-160.

УДК 66.012.1

М. С. Пожар

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МЕТОДІВ ВИГОТОВЛЕННЯ БІЛОЇ САЖІ

Залежно від способу отримання та обробки продукт містить більше або менше зв'язаної води, причому змінюється і форма зв'язку води з SiO_2 – від міцної хімічної та координаційної до слабкої адсорбційної. Білу сажу отримують двома основними методами: рідкофазним і газофазним.

Рідкофазний метод полягає в осадженні аморфної кремнекислоти з розчинів силікату натрію кислотними реагентами – соляною кислотою, вуглекислою та іншими при 70-90 °С зазвичай у присутності солей металів II або III групи. Отриманий продукт фільтрують, промивають і сушать. Сухий продукт піддають розмелюванню. Ступінь дисперсності і пористості частинок білої сажі залежить від природи агента розкладання – речовини, що розкладає силікат, і коагулянту, умов осадження, фільтрування та сушіння. При двох останніх операціях можливо агрегування частинок внаслідок подальшої конденсації полікремнієвих кислот. Тому умови фільтрації та сушіння ретельно регламентуються.

Газофазний метод отримання білої сажі типу аеросил полягає в гідролізі чотирихлористого або чотирифтористого кремнію водяною парою точніше гримучою сумішшю при 1000-1100 °С. Виходить малогідратований і дуже чистий продукт високої дисперсності і незначної пористості. Однак цей спосіб відрізняється великими витратами енергії, високою вартістю сировини і утворенням великої кількості побічного продукту HCl , який необхідно раціонально використовувати [1].

З двох основних способів для використання більш оптимальній перший, на якому ми і зупинились. Процес використовує менше енергії, потребує менше витрат на ту ж кількість виготовленої білої сажі. Та, на відміну від другого способу, не утворює великої кількості HCl , та використовує вторинно відфільтровану рідину [2].

Список використаних джерел:

1. Захарченко П.И. Справочник резинщика / П.И. Захарченко. – 1971. – С. 426-431.
2. Лукінюк М.В. Автоматизація типових технологічних процесів: технологічні об'єкти керування та схеми автоматизації : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл., які навчаються за напрямом «Автоматизація і комп'ютер.-інтегр. технології» / М.В. Лукінюк. – К. : НТУУ «КПІ», 2008. – 236 с. : іл.

УДК 330.36

Н. В. Поліщук, канд. фіз.-мат. наук

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ДЕЯКОЇ МОДЕЛІ РІВНОВАГИ З СУМАРНИМИ ВИТРАТАМИ

Розглядається модель рівноваги, в якій учасники виробництва мають можливість придбати додаткові ресурси і отримати кредит. В моделі функціонують m учасників. Учасник i має ресурси $x_i \in R_+^n$, $i = 1, \dots, m$, і може обміняти ресурси x_i на y_i при умові балансу:

$$\sum_{i=1}^m y_i = \sum_{i=1}^m x_i. \quad (1)$$

Кожен учасник має капітал $I_i \geq 0$, і також існує банк з загальним капіталом J , який може приймати вклади або давати кредити під процент $\alpha \geq 0$. Будемо вважати, якщо учасник бере кредит Δ_i , то $\Delta_i > 0$, і він повинен повернути банку $(1 + \alpha)\Delta_i$ грошових одиниць. Якщо учасник вкладає свій капітал в банк, то $\Delta_i < 0$. При цьому витрати на додаткові ресурси не повинні перевищувати загальний капітал i -го учасника:

$$(p, y_i - x_i) \leq I_i + \Delta_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

де $p \in R_+^n$ – ціни на ресурси, (\dots, \dots) – скалярний добуток векторів.

Сумарна позика банку не повинна перевищувати загальний капітал банку J :

$$\sum_{i=1}^m \Delta_i \leq J. \quad (3)$$

Витрати на виробництво учасника i складають величину $V_i(y_i)$, де $V_i(y_i): R_+^n \rightarrow R$ – неперервна функція. Якщо $V_i(y_i) < 0$, то $-V_i(y_i)$ розглядається як дохід i -го учасника.

Учасник i мінімізує свої сумарні витрати, які складаються з витрат на виробництво, на придбання додаткових ресурсів і на погашення позики:

$$V_i(y_i) + (p, y_i - x_i) + \alpha \Delta_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4)$$

Ціни p і відсотки за кредит α будемо називати рівноважними, якщо існують вектори $\{\tilde{y}_i, \tilde{\Delta}_i\}, i = 1, \dots, m$, які мінімізують сумарні витрати (4) кожного учасника при обмеженнях (1)-(3). Ці вектори будемо називати розв'язком моделі рівноваги.

Нехай виконані наступні умови.

1. Функції $V_i(y)$, $i = 1, \dots, m$, опуклі.
2. Капітал банку додатний: $J > 0$.
3. Існує розподіл ресурсів $\bar{y}_i \in R_+^n, i = 1, \dots, m$, такий, що

$$\sum_{i=1}^m \bar{y}_i < \sum_{i=1}^m x_i, \quad \bar{y}_i \leq x_i.$$
4. Для кожного ресурсу $j, j = 1, \dots, n$, знайдеться учасник i , для якого безкоштовне придбання цього ресурсу вигідно, тобто якщо $e_j - j$ -ий одиничний орт простору R^n , $p \in R^n$, $p^j = 0$, то $V_i(y + \lambda e_j) \leq V_i(y)$ для всіх $y \in D(V_i), i = 1, \dots, m$.

Доведено наступне твердження.

Теорема 1. Нехай виконані умови 1-4, тоді розв'язок моделі, рівноважні ціни і відсотки на кредит існують.

При доведенні теореми використана теорема Какутані [1] існування нерухомої точки для відображення $(p, \alpha) \rightarrow Q(p, \alpha)$, де $Q(p, \alpha)$ – множина векторів Куна-Таккера задачі

$$W_p(y, J) = \min_{\{y_i, \Delta_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^m V_i(y_i) : \sum_{i=1}^m y_i \leq y, \sum_{i=1}^m \Delta_i \leq J, \right. \\ \left. (p, y_i - x_i) \leq I_i + \Delta_i, y_i \geq 0, \Delta_i \geq I_i, i = 1, \dots, m \right\}. \quad (5)$$

Показано, що множина $Q(p, \alpha)$ опукла для всіх (p, α) ; існує замкнута обмежена опукла множина $Q \subset R^{n+1}$ така, що $Q(p, \alpha) \subset Q$; відображення $(p, \alpha) \rightarrow Q(p, \alpha)$ замкнуте.

При цих умовах існує нерухома точка відображення (5), що і доводить існування розв'язку моделі рівноваги.

Також має місце теорема

Теорема 2. Розв'язок моделі рівноваги $\{\tilde{y}_i\}, i = 1, \dots, m$, мінімізує сумарні витрати на виробництво:

$$\sum_{i=1}^m V_i(y_i).$$

Дійсно, з доведення теореми 1 випливає, що вектори $\{\tilde{y}_i, \tilde{\Delta}_i\}$ є розв'язком задачі (5), цільову функцію якої можна розглядати як сумарні витрати на виробництво.

Модель рівноваги з одним ресурсом. Будемо розглядати модель рівноваги з одним ресурсом і лінійними функціями витрат. Кожний учасник i , $i=1, \dots, m$, має один ресурс $x_i \geq 0$, який може обміняти на y_i при умові балансу (1). Дохід учасника i від використання ресурсу $y_i \geq 0$ складає $c_i y_i$, $c_i > 0$, тому функція витрат має вигляд:

$$V_i(y_i) = -c_i y_i, \quad i=1, \dots, m.$$

Нехай $c_1 < c_2 < \dots < c_m$. Кожний учасник мінімізує свої сумарні витрати

$$-c_i y_i + (p, y_i - x_i) + \alpha \Delta_i, \quad i=1, \dots, m,$$

при умовах (1)-(3).

Для цієї моделі побудований алгоритм знаходження розв'язку. Показано, що

$$p = c_m, \quad y_i = 0, \quad \Delta_i = -I_i, \quad i=1, \dots, m-1,$$

$$y_m = \sum_{i=1}^{m-1} x_i, \quad \alpha = 0, \quad \Delta_m = p \sum_{i=1}^{m-1} x_i - I_m.$$

З наведеного випливає, що учасники i , $i=1, \dots, m-1$, для яких ціна одиниці ресурсу перевищує дохід від його використання (тобто $p > c_i$), змушені продавати свої ресурси і вкладати капітали в банк. Ресурс і додатковий капітал отримує учасник m , який має найбільший дохід від реалізації одиниці ресурсу.

Існування розв'язків та рівноважних цін для динамічної моделі рівноваги на скінченному інтервалі часу без кредиту розглянуто в роботі [2]. Розглянута асимптотична поведінка розв'язків моделі. Наведені умови наближення оптимальних розв'язків моделі до магістральної траєкторії.

Список використаних джерел:

1. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика / Х. Никайдо. – М. : Мир, 1972. – 517 с.
2. Поліщук Н.В. Магістральні властивості оптимальних траєкторій деякої динамічної моделі / Н.В. Поліщук // Тези доповіді на XV міжнародній конференції ім. акад. М.Кравчука, 15-17 трав., 2014 р. : Матеріали конф. – К. : НУТУ «КПБ», 2014. – Т.2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. – 216 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА РЕОЛОГИИ ФРАКТАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ ГЕТЕРОГЕННЫХ ПЛАСТОВЫХ СИСТЕМ

Исследовано условие «гладкости» фронта раздела при взаимной фильтрации составляющих гетерогенных (многокомпонентных) систем на основании анализа «скачка» насыщенности компонент в функции Баклея-Лeverетта [1, с.355]. Показано, что «скачек» насыщенности отсутствует, а фронт раздела продвигается устойчиво и сохраняет «гладкость», если подвижность вытесняющей компоненты не превышает подвижность вытесняемой. Также показано, что нарушение «гладкости» фронта раздела приводит к фрактально-неоднородной структуре процесса реологии.

Возникновение фрактально-неоднородной структуры процесса реологии свидетельствует о значительных возмущениях фронта раздела компонент гетерогенной системы, что, формализовано, должно быть отражено в граничных условиях, поскольку последние определяют геометрию фронта раздела. Фрактальная структура представляет собой систему с *дробной размерностью* (именуемая, например [2], *фрактальной размерностью*), геометрически объединяющая *фрактальные кластеры* (или *агрегаты*). При этом фрактальный кластер представляет собой совокупность достаточно большого числа элементов, которые внутри данной совокупности сохраняют свою индивидуальность [3]. С точки зрения реологии гетерогенных систем, к фрактальному кластеру была отнесена совокупность «пальцев» вытесняющей компоненты на фронте раздела фильтрующихся компонент гетерогенной системы.

Если выполнить аппроксимацию фронта раздела в пределах одного «пальца» ломаной линией, то ее длину можно представить в следующем виде

$$L = a(R/a)^D, \quad (1)$$

где L – линейный размер «пальца» вытесняющей компоненты (по прямой); a – размер звена ломаной линии (усреднённый размер «зерна» порового пространства); R – размер фрактального кластера (радиус сферы, охватывающий «палец»); D – фрактальная размерность, обеспечивающая для кластера определенную область масштабов, в которой выполняется аппроксимация вида (1).

Разрешая (1) относительно фрактальной размерности D

$$D = [\ln(L) - \ln(a)] / [\ln(R) - \ln(a)] \quad (2)$$

можно получить численные значения фрактальной размерности фронта раздела для реологического процесса, развивающегося в реальных геологических условиях.

Предложена математическая модель фрактально-неоднородной гетерогенной (многокомпонентной) системы в классе вариационных неравенств, представленная следующим выражением динамики

$$\forall \tilde{P}, v \in K : \left[\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t}, (v - \tilde{P}) \right] - A \left[\tilde{P}, (v - \tilde{P}) \right] - j(v) + j(\tilde{P}) \geq \left[Q, (v - \tilde{P}) \right] \quad (3)$$

с начальными и граничными условиями вида

$$\tilde{P}(0, z) \Big|_{z \in \Omega} = \tilde{P}_0(z), \quad \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \eta} \right) \Big|_{L \in \Gamma}, \quad (4)$$

где \tilde{P} – распределенная функция пластового давления на возмущенной части фронта раздела; v – пробная функция, оптимальное значение которой соответствует условию $v^* = \tilde{P}$; $A[\cdot]$ – билинейная форма, отвечающая параболическому оператору относительно функций \tilde{P} и v ; $j(\tilde{P})$ и $j(v)$ – функционалы, определяющие качественное протекание реологического процесса (суть – ограничения на функции \tilde{P} и v); Ω – пространственная область развития реологического процесса с границей Γ ; η – нормаль к границе Γ ; t и z – независимые временная и пространственная переменные.

Адекватность математической модели вида (3), (4) подтверждена сравнением численных решений (полей давлений \tilde{P}), полученных с её помощью, и «забойных» давлений, измеренных в системе эксплуатационных скважин реальных нефтяных пластов, разрабатываемых в водонапорном режиме.

Список использованной литературы:

1. Верлянь А.Ф. Математическое моделирование аномальных диффузионных процессов / А.Ф. Верлянь, С.А. Положаенко, Н.Г. Сербов. – К. : Наука, 2011. – 416 с.
2. Гийон Э. Фракталы и перколяция в пористой среде / Э. Гийон, К. Д. Минтеску, Ж.П. Юлен, С. Ру // Успехи физических наук. – 1991. – Т. 161, №10. – С. 121-128.
3. Katz A.J. Fractal Sandstone Pores: Implications between for Conductivity and Pore Formation / A.J. Katz, A.H. Thompson // Physical Review Letters. – 1985. – Vol. 54. – P. 1325-1332.

УДК 372.853.53

О. Є. Просандєєв,

А. М. Кух, канд. пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ТЕХНОЛОГІЯ КОНСТРУЮВАННЯ ТЕСТУ

Вибір форми та виду тестового завдання залежить від навчального матеріалу і знань, що тестуються. Вибирається такий тип завдання, який вимірює запланований результат навчання найприйнятніше. Стандартним завданням, яке підходить до більшості видів навчального матеріалу та запитань, є тип завдань з множинним вибором.

Критерії для вибору завдань:

1. Зрозумілість. Оберіть ту форму завдання, яка, вірогідно, буде більш зрозумілою.
2. Надайте перевагу тій формі завдань, яка запобігає випадковому розпізнаванню правильних відповідей.
3. Компактність. Оберіть ту форму, в якій запитання формується найбільш стисло.
4. Стежте за тим, щоб форма завдання (варіанти відповідей, списки для відновлення відповідності) не розкривала відповіді на інші завдання.
5. Якщо завдання рівною мірою ефективні, оберіть той вид завдань, який найменше поданий у тесті.
6. Розробіть тестові завдання заздалегідь, щоб згодом їх можна було переглянути та за потреби модифікувати.
7. Розробіть більше тестових завдань, ніж це передбачено планом тесту. Це дасть змогу відкинути слабкі або недоречні завдання та спростити тест.

Під час відбору завдань для тесту необхідно **особливу увагу звернути на такі моменти:**

по-перше, тест має містити таку кількість тестових завдань, що є достатньою для забезпечення відповідної точності методу вимірювання;

по-друге, часто джерелом помилок в тестах спеціальних здібностей і досягнень є втома, оскільки такі завдання вимагають зусиль з концентрації, зосередженості уваги. Тому довжина тесту в 20-30 завдань є оптимальною, а різноманітність форм та видів тестових завдань, можливо, зробіть тест менш монотонним;

по-третє, завдання в тесті необхідно розташовувати в порядку складності. Це робиться для запобігання випадків, коли той хто тестується надто багато часу витрачає на завдання, яке не може розв'язати і, таким чином, позбавляє себе можливості виконати інші завдання.

Форма подання тестових завдань, з яких складається тест, **повинна задовольняти певним рекомендаціям діагностів:**

- тестові завдання однакової форми мають супроводжуватись однією інструкцією з їх виконання;
- текст інструкції повинен відрізнятися від основного тексту іншим шрифтом або активним кольором та відокремлюватися від тестових завдань двокрапкою;
- тестові завдання нумеруються арабськими цифрами, нумерація тестових завдань різної форми наскрізна по всій довжині тесту;
- тестові завдання можуть містити формули, графічні зображення тощо;
- запитальна частина тестового завдання виділяється великими літерами, курсивом або активним кольором;
- запитальна частина тестових завдань та можливі відповіді не відокремлюються будь-яким знаком;
- елементи відповіді мають окрему індексацію, як правило, буквену;
- відповіді розташовуються під запитальною частиною симетрично.

Вважаємо, що врахування описаних вище чинників сприятиме створенню більш ефективних тестів і якості освіти

Список використаних джерел:

1. Технологія розробки тестів для педагогічних працівників (методичні рекомендації) / укл. В.Ю. Наумова. – К., 2006.
2. Сергієнко В.П. Методичні рекомендації зі складання тестових завдань / В.П. Сергієнко, Л.О. Кухар. – К. : НПУ, 2011. – 41 с.
3. Кух А.М. Тематичні завдання еталонних рівнів з фізики 7-11 класи / А.М. Кух, П.С. Атаманчук. – Кам'янець-Подільський : КПДУ, 2003. – 90 с.

УДК 658.911.6

О. Б. Розумовська

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПОБУДОВА ТА ОЦІНКА ПРОГНОЗНОЇ МОДЕЛІ НА ОСНОВІ ЛІНІЙ ТРЕНДУ В MS EXCEL

Особливе місце серед економічних задач займають задачі прогнозування. До них можна віднести задачі завбачення майбутніх прибутків, тенденцій продажу, раціонального підбору культур для посіву, оцінки ризиків банківського кредитування, тощо. Для вирішення таких питань на сьогодні існує багато математичних методів. Але часто такі методи досить громіздкі для практичної реалізації. Серед різних способів економічного прогнозування можна виділити метод прогнозного моделювання на основі ліній тренду з використанням програмного забезпечення, зокрема програмного продукту MS Excel. MS Excel пропонує в якості лінії тренду використовувати різноманітні типи апроксимуючої залежності: лінійну, логарифмічну, поліноміальну, степеневу, експоненціальну, лінійну фільтрацію. Однак, спроба реалізувати запропоновані моделі призводить до значно різних чисельних результатів, які до того ж, часто мають різний напрямок розвитку. Це призводить нас до потреби здійснити оцінку можливості використання тієї чи іншої моделі прогнозування і формулювання критеріїв вибору.

Основою для побудови прогнозованої моделі на основі ліній тренду виступає сукупність даних фактичного ряду. Одним із питань, що виникають на цьому етапі, стає питання щодо мінімальної та максимальної кількості даних спостережень, які потрібні для побудови оптимальної моделі. Якщо фактичний ряд недостатньо наповнений, то в результаті прогнози можуть виявитися хибними. При дуже значній кількості даних є ймовірність появи циклічності, яка в певній мірі теж може спотворювати результати прогнозування. Крім того, важливо проаналізувати фактичні дані, оскільки при наявності від'ємних значень окремі апроксимуючі залежності використати неможливо.

Після побудови ліній тренду на базі придатних залежностей, кожний результат пропонується оцінити шляхом ранжування за кількома критеріями, які характеризують достовірність, відповідність, надійність та інші параметри прогнозу.

Для визначення достовірності прогнозу можна використати значення похибки апроксимації R^2 . Обрана модель достатньо точно відображає тенденцію розвитку, якщо значення R^2 прямує до 1. Це дає можливість довіряти результатам прогнозування. При ранжуванні за цим критерієм моделі з максимальним значенням похибки апроксимації присвоюється мінімальний ранг і т.д.

Побудова ліній тренду в MS Excel дозволяє отримати також одне або декілька прогнозованих майбутніх значень.

Розглянемо ряд урожайності соняшника протягом 8 років в СТОФ ВФ «Мрія» Кам'янець-Подільського району:

| Роки | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 |
|-------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Урожайність, ц/га | 26,1 | 25,7 | 24,9 | 27,3 | 24,6 | 25,8 | 25,6 | 28,4 |

Використовуючи інструменти MS Excel, будемо лінії тренду з визначенням значення похибки апроксимації R^2 (рис. 1).

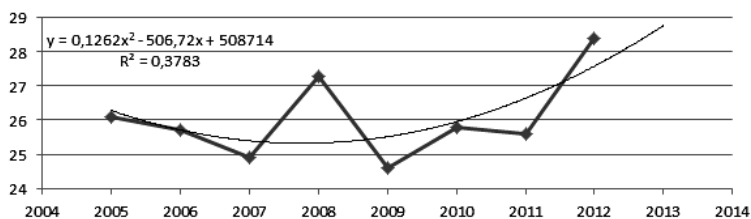


Рис. 1. Динаміка врожайності соняшника протягом 2005-2012 рр.

Важливим моментом є порівняння декількох апроксимаційних залежностей і вибір серед них тієї, що дає R^2 найбільш наближеним до 1. При побудові ліній тренду відповідно до наведеного фактичного ряду найбільше значення R^2 отримується при поліноміальній апроксимації 3 ступеню ($R^2 = 0,496$). Тоді прогнозне значення врожайності на 2013 рік перевищує 31 ц/га. А на наступні кілька років ріст врожайності досить стрімкий, що мало ймовірно. Це дає підстави розглядати іншу апроксимаційну залежність з меншим значенням R^2 . Оцінити оптимальніший варіант апроксимації можна на основі аналізу середнього значення фактичного ряду та прогнозованого значення. В розглянутій моделі оптимальнішою виявилася поліноміальна апроксимація 2 ступеню. Хоча значення $R^2=0,378$ і менше, та відхилення прогнозованого значення та середнього вказує на те, що цей результат є більш ймовірнішим. Аналіз реально отриманої врожайності в 2013 та 2014 роках підтверджує застосовність в цьому випадку саме поліноміальної апроксимації 2 ступеню.

Розглянутий приклад наочно вказує на потребу здійснення оцінки прогнозування за кількома критеріями, які характеризують достовірність, відповідність, надійність та інші параметри прогнозу.

Ю. О. Романенков, канд. техн. наук,

В. М. Вартанян, д-р техн. наук,

Т. Г. Зейнієв

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут», Харків

ГРАФОАНАЛІТИЧНИЙ ЗАСІБ ІНТЕРВАЛЬНОГО ОЦІНЮВАННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ БІЗНЕС-ПРОЦЕСІВ ОРГАНІЗАЦІЇ

Система бізнес-процесів організації може бути охарактеризована набором векторів ефективності n бізнес-процесів організації $X_1 = [x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1l_1}]$, $X_2 = [x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2l_2}]$, ..., $X_n = [x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nl_n}]$, кожен з яких складається з компонент відносних показників ефективності відповідного бізнес-процесу, а також вектором-стовбцем інтервальних коефіцієнтів відносної значущості компонент бізнес-процесу $[A_i] = [[\alpha_{i1}], [\alpha_{i2}], \dots, [\alpha_{il_i}]]^T$, $i = \overline{1, n}$, $[\alpha_{ij}] = [\underline{\alpha}_{ij}, \overline{\alpha}_{ij}] \subset [0, 1]$.

Природа інтервальної форми коефіцієнта $[\alpha_{ij}]$ обумовлюється механізмом його отримання, а саме процедурою експертного оцінювання. Поряд з узгодженою точковою оцінкою на різних етапах дослідження може бути використана оцінка інтервальна. Ідея використання даних такого типу полягає в природному бажанні дослідника врахувати невизначеність, виражену таким чином, у вирішенні завдання. При цьому ширина інтервалів передбачається несуттєвою в порівнянні з серединою відповідних інтервалів.

Якщо відомі інтервальні оцінки відносних показників значущості i -го бізнес-процесу $[\beta_i] = [\underline{\beta}_i, \overline{\beta}_i]$, $[\beta_i] \subset [0, 1]$, $i = \overline{1, n}$, то інтервальну оцінку комплексної відносної ефективності бізнес-процесів в організації можна знайти у вигляді:

$$[E] = [\underline{E}, \overline{E}] = \sum_{i=1}^n [\beta_i] X_i [A_i]. \quad (1)$$

Таким чином, значення комплексної відносної ефективності бізнес-процесів в організації можна представити не точковий, а в інтервальной формі, що дозволить врахувати невизначеність експертного оцінювання.

Набір доданків (1) представимо у вигляді нормованої діаграми для інтервальних оцінок (рис. 1).

Інтервальна оцінка комплексної відносної ефективності бізнес-процесів в організації, згідно (1), обмежена зліва площею фігури \underline{E} (сума площ заштрихованих прямокутників на рис. 1) і справа площею фігури \overline{E} (сума площ заштрихованих прямокутників на рис. 1). Саме ця оці-

нка може виступати функціоналом в задачі лінійного програмування, яку в даному випадку можна формалізувати в стандартній формі.

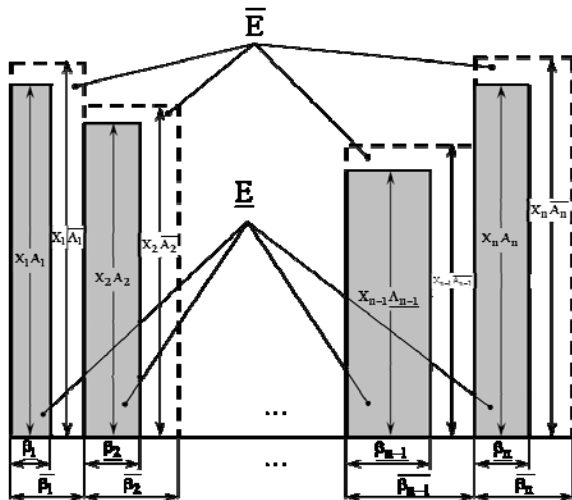


Рис. 1. Нормована діаграма інтервальної оцінки ефективності бізнес-процесів в організації

УДК 004.32

В. С. Савіч, аспірант

Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ФІЛЬТРАЦІЇ В ГЕТЕРОГЕННИХ СИСТЕМАХ З ПРОМІЖНИМ «АГЕНТОМ»

Виконано дослідження сталості фронтального витіснення для гетерогенних (багатокомпонентних) пластових систем, які представлено рідинами, що фільтруються та не змішуються. Причому, ці рідини можуть являти собою як ньютонівські (або ідеальні), так і неньютонівські (або аномальні) рідини. Типовим прикладом фільтрації такого типу гетерогенних систем може слугувати витіснення водою (ньютонівська рідина) парафіністої нафти (неньютонівська рідина). При цьому просування фронту розділу компонент гетерогенної системи характеризується суттєвим відхиленням від гладкості фронту – тобто утворенню «пальців» невідфільтрованої нафти на границі Γ області фільтрації Ω і, навіть, «застійних» зон в середині Ω . Таку картину витіснення зумовлено наявністю граничного градієнта тиску G у аномальної компоненти (через в'язкопластичність), що визначає для неї нульову швидкість фільтрації $\varpi = 0$, якщо пластовий тиск P приймає значення $P < G$.

Вперше показано, що дослідження гладкості границі розділу компонент гетерогенної системи, що фільтрується, може бути використано при розв'язанні задачі на утворення «застійних зон», в тому числі і для компонент, які мають аномальний характер, а їх фільтрація характеризується законом з граничним градієнтом [1, с.47; 2, с.24]. За умову, що визначає границю розділу компонент гетерогенної системи, яка фільтрується, розглянуто «стрибок» насиченості в функції Баклея-Лeverетта [2, с.355]

$$J(S) = \frac{k_1^0(S_1)}{\mu_1 k_1^0(S_1) + \mu_2 k_2^0(S_2)}, \quad (1)$$

де $k_1^0(S_1)$ та $k_2^0(S_2)$ – відносні фазові проникності для компонент гетерогенної системи, що фільтрується; μ_1 та μ_2 – їх в'язкості; S_1 та S_2 – насиченості пористого середовища компонентами гетерогенної системи, відповідно.

Використовуючи рівняння «стрибка» насиченості виду (1) та відомі рівняння динаміки процесу двофазної фільтрації з граничним градієнтом G , що описують фільтрацію при відхиленні від закону Дарсі [2, с.14], отримано математичну модель «поршневого» витіснення з проміжним «агентом». При цьому, в якості «поршня», виступає проміжний «агент», наприклад, піна або полімер, що закачується між аномальною та ідеальною компонентами гетерогенної системи. Проміжний «агент» («поршень») є хорошим витіскачем, внаслідок чого забезпечується гладкість границі Γ області фільтрації Ω і, як результат, збільшується нафтовіддача. Математичну модель представлено у вигляді варіаційних нерівностей

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial S_l}{\partial t}(v - S_l) - \int_{\Omega} J(S_l) \left\{ \Psi_l \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial S_l}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial (v - S_l)}{\partial z_i} \right] dz \right\} + \\ & + \int_{\Omega} J(S_l) \left\{ \Psi_l \left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2} |v| \right] \right\} dz - \int_{\Omega} J(S_l) \left\{ \Psi_l \left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2} |S_l| \right] \right\} dz \geq (f, v - S_l), \\ & l = \overline{1,3}; \Psi_1 = (1 - S_1), \Psi_2 = 1, \Psi_3 = (1 - S_3); \forall v, S_l \in K \end{aligned} \quad (2)$$

з початковими та граничними умовами

$$S_l(0, z) = S_{l_0}(z), \quad l = \overline{1,3}; \quad (\partial P / \partial \eta) = 0. \quad (3)$$

У виразах (2), (3) позначено: v – пробну функцію; f – примушуючу функцію; t, z – незалежні часову та просторову змінні, відповідно; η – нормаль до границі Γ ; індексами $l = \overline{1,3}$ – аномальну ідеальну рідину та проміжний «агент», відповідно.

Для кожної з границь «ідеальна рідина – проміжний «агент» та «проміжний «агент» – аномальна рідина» виконано формальні заміни $S_2 = (1 - S_3)$ і $S_1 = (1 - S_3)$, що дало можливість еквівалентно замінити систему трьох варіаційних нерівностей виду (2), (3) на дві системи двох варіаційних нерівностей («аномальна рідина – проміжний «агент» та «проміжний

«агент» – ідеальна рідина»), які можна розв'язувати незалежно одну від іншої, що значно спрощує чисельну реалізацію вихідної задачі.

Список використаних джерел:

1. Бернадинер М.Г. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей / М.Г. Бернадинер, В.М. Ентов. – М. : Наука, 1975. – 199 с.
2. Верлань А.Ф. Математическое моделирование аномальных диффузионных процессов / А.Ф. Верлань, С.А. Положаенко, Н.Г. Сербов. – К. : Наукова думка, 2011. – 416 с.

УДК 539.3:519.6

Я. Г. Савула, д-р. фіз.-мат. наук

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ГЕТЕРОГЕННЕ РІЗНОМАСШТАБНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серед нових підходів до комп'ютерного моделювання об'єктів і процесів у сучасній науці велика увага присвячується гетерогенному різномасштабному моделюванню (Heterogeneous Multiscale Modeling). Це пояснюється тим, що майже всі проблеми в науці та в інженерії є різномасштабними. Вони містять компоненти, які мають розміри від нанометрів до метрів і характеризуються процесами, які тривають від секунд до років. Здебільшого така різномасштабна структура об'єктів і процесів не є перешкодою для створення математичних моделей на макорівні, проте у ряді випадків, зокрема пов'язаних із нанотехнологіями та наноконструкціями для створення математичних моделей, важливим є одночасне врахування властивостей об'єктів і процесів на різних рівнях масштабу. Такий підхід до математичного моделювання називають різномасштабним моделюванням. Термін гетерогенне стосовно до різномасштабного моделювання означає, що для компонент різного масштабу використовуються різні математичні моделі, які описуються різними математичними засобами.

Відомою є класифікація різномасштабних проблем, згідно з якою значну групу гетерогенного різномасштабного моделювання (ГРМ) становлять проблеми моделювання об'єктів, що містять ізольовані дефекти або особливості такі, як тріщини, дислокації, тонкі вклучення, покриття, лінії ударів, чи лінії контактів, тощо. У цьому випадку ефективний підхід до моделювання передбачає використання у різних частинах області різних математичних моделей, що описуються диференціальними рівняннями різної вимірності, і зв'язування їх спеціальними граничними умовами.

Для ілюстрації основних ідей зазначеного підходу ГРМ використано результати наукових робіт [1-8], виконаних на кафедрі прикладної математики Львівського національного університету імені Івана Франка під керівництвом автора, починаючи з 1987 року. У цих роботах розглянуто проблему побудови математичних моделей, числових методів та алгоритмів для дослідження задач, теорії пружності для тіл, які містять тонкі та масивні елементи. Математична модель тут базується на сумісному використанні рівнянь

теорії пружності та теорії оболонок типу С.П. Тимошенка. В рамках цієї моделі ключові рівняння є рівняннями математичної фізики, що мають різну вимірність за просторовими змінними (3D та 2D або 2D та 1D). Вони об'єднані в систему рівнянь умовами спряження на поверхнях оболонки. Розглянуто також проблему математичного моделювання процесів адвекції-дифузії у середовищах з тонкими покриттями і включеннями. Тут рівняння моделі тонкого включення отримано шляхом усереднення з вагами рівнянь, що описують процес адвекції-дифузії за малими товщинами включень.

Список використаних джерел:

1. Савула Я.Г. Применение комбинированной модели для расчета напряженно-деформированного состояния пространственных конструкций / Я.Г. Савула, И.И. Дьяк, А.В. Дубовик // Прикл. механика. – 1989. – Вып. 25, №9. – С. 62-67.
2. Savula Ya.H. Numerical analysis of advection-diffusion in the continuum with thin canal / Ya.H. Savula, V.M. Koukharskyj, Ye.Ya. Chaplia // Numerical Heat Transfer, Part A. – 1998. – №33(3). – P. 341-351.
3. Savula Ya. Coupled boundary and finite element analysis of a special class of two-dimensional problems of the theory of elasticity/ Ya. Savula, H. Mang, I. Dyyak, N. Pauk // Computer and Structures. – 2000. – №75. – P. 157-165.
4. Savula Y.H. Analysis of shells reinforced by massive stiffening ribs / Y.H. Savula, K.Jarmai, I.S. Mukha // International Applied Mechanics. – New York : Springer, 2008. – Vol. 44, №11. – P. 1309-1318.
5. Мандзак Т.І. Математичне моделювання і числовий аналіз адвекції-дифузії у неоднорідних середовищах / Т.І. Мандзак, Я.Г. Савула // Центр математичного моделювання Ін-ту Прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача. НАН України. – Львів : Сплاین, 2009. – 148 с.
6. Vynnytska L. Mathematical modeling and numerical analysis of elastic body with thin inclusion / L. Vynnytska, Y. Savula // Computational Mechanics. – 2012. – Vol. 49, №5. – P. 565-575.
7. Dyyak I. Numerical investigation of plain strain state for a body with thin cover using domain decomposition / I. Dyyak, Ya. Savula, A. Styahar // Journal of Numerical & Applied Mathematics. – 2012. – №3(109). – P. 23-33.
8. Styahar A. On the convergence of domain decomposition algorithm for the body with thin inclusion / A. Styahar, Ya. Savula // Acta Mechanicaet Automatica. – 2015. – Vol. 9, №1(31). – P. 27-32.

УДК 519.633.6

Я. Г. Савула, д-р. фіз.-мат. наук,
Ю. І. Турчин

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ У СТІНЦІ СУДИНИ

У роботі досліджується процес масоперенесення препарату, що являє собою сукупність наночастинок, кожна з яких містить інкапсульовані біоактивні речовини, у стінці судини. Математична модель описана початково-крайовою задачею адвекції-дифузії: необхідно знайти та-

кі $c_1, c_2 : \bar{\Omega} \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ – невідомі концентрації наночастинок та ліків, відповідно, що задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial c_1}{\partial t} + \nabla \cdot (Vc_1) - \nabla \cdot (K_1 \cdot \nabla c_1) + \sigma_1 c_1 = 0; \\ \frac{\partial c_2}{\partial t} + \nabla \cdot (Vc_2) - \nabla \cdot (K_2 \cdot \nabla c_2) + \sigma_2 c_2 = c_1 f, \end{cases}$$

а також початкові та граничні умови:

$$\begin{cases} c_i(x, 0) = 0 \\ c_2(x, 0) = 0 \end{cases} \text{ в } \bar{\Omega}; \quad \begin{cases} n \cdot (K_1 \cdot \nabla c_1) + \lambda_1 (c_1 - c_{1,\infty}) = \psi_1 \\ n \cdot (K_2 \cdot \nabla c_2) + \lambda_2 (c_2 - c_{2,\infty}) = \psi_2 \end{cases} \text{ на } \Gamma \times (0, T).$$

За результатами числового експерименту виявлено, що застосування методу скінченних елементів із лінійними та квадратичними базисними функціями, у випадку значної переваги коефіцієнтів адвекції над коефіцієнтами дифузії [1], призводить до втрати стійкості розв'язку.

Запропоновано модифікацію методу скінченних елементів розв'язування сформульованої задачі із використанням заміни:

$$c(x, t) = u(x, t) \exp\left(-\frac{Vx}{2K} - \frac{t}{4K} V^2\right).$$

За результатами числових експериментів встановлено, що запропонована модифікація долає вищезгаданий недолік.

Список використаних джерел:

1. Турчин Ю. Комп'ютерне моделювання процесу перенесення ліків у живих тканинах / Я. Савула, Ю. Турчин, Н. Кіт // Вісник ЛНУ ім. І. Франка. Серія прикл. матем. – 2013. – Вип. 19. – С. 93-98.

УДК 519.17

М. Ф. Семенюта*, канд. фіз.-мат. наук,

А. Я. Петренко**, д-р фіз.-мат. наук

*Кіровоградська льотна академія Національного авіаційного університету, м. Кіровоград,

**Кіровоградський технічний національний університет, м. Кіровоград

РОЗМІТКИ ГРАФА ЯК МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СИСТЕМ

Розмітки графів виступають моделями для широкого діапазону задач в різних галузях науки, таких як рентгенівська кристалографія, теорія кодування, криптографія, астрономія, схемотехніка, мережеве планування. Серед практичних застосувань можна відмітити такі напрямки, як кодування радарних імпульсів, мережеве планування, управління базами даних, астрономія. Під розміткою звичайного графа $G = (V, E)$ розуміємо відображення множини його елементів на скінченну множину, що складається з натуральних чисел. Одержані образи називають мітками. Вершинам або ребрам постави-

мо у відповідність ваги (суми міток), які визначаються за певним правилом. Для вершинних (реберних) розміток областю значень є множина вершин V (ребер E), а для тотальних – множина $V \cup E$.

За останні 20 років виникло багато різних типів і підтипів розміток, з якими можна ознайомитися в електронному журналі Д. Галліана [1]. В даній роботі йдеться про (a, d) – дистанційну антимагічну розмітку, яку ввели С. Арумугам і Н. Камачі в 2012 році і одержали декілька базових результатів [2]. Встановили необхідну умову існування (a, d) – дистанційної антимагічної розмітки графа, довели, що цикл C_n буде (a, d) – дистанційним антимагічним графом лише коли n – непарне і $d = 1$, а граф $C_{2n}^+ \in (2n + 2, 1)$ – дистанційним антимагічним графом. Також запропонували дослідити основні класи графів на наявність даної розмітки. Наступний крок зроблено в роботі [3, с.99-117], де досліджуються на дистанційну антимагічність ланцюги P_n при $2 \leq n \leq 15$, диз'юнктивне об'єднання ізоморфних копій циклу C_n та графі з порядком меншим ніж 6. Задачі, що розв'язуються в [2-3] можна поділити на два типи. До першого віднесемо задачу знаходження умов існування розмітки, а до другого – задачу визначення аналітичного опису розмітки, який дозволяє знайти її безпосередньою побудовою. Ми розглядаємо ці задачі для графа F_n і циркулянтних графів.

Під вагою $w(u)$ вершини u графа $G = (V, E)$, при вершинній розмітці f , розуміємо суму міток вершин, суміжних з u .

(a, d) – дистанційною антимагічною розміткою графа $G=(V, E)$ порядку n називається така бієкція $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, що множина всіх ваг вершин утворює арифметичну прогресію $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 1)d$ з першим членом a і різницею d , де a, d – фіксовані невід'ємні цілі числа і $a \geq 1, d \geq 0$. Граф G , що допускає таку розмітку, називають (a, d) – дистанційним антимагічним графом.

Голландський n – вітряк F_n утворюють n копій циклу порядку три, кожні два з яких перетинаються тільки в одній, спільній для всіх циклів, вершині. Цей граф і його розмітки розглядалися в зв'язку з оптимальним плануванням радіоантен для сканування видимих областей небосхилів. Результати відносно його дистанційної антимагічності представлені в теоремі 1.

Теорема 1. Граф F_n допускає (a, d) – дистанційну антимагічну розмітку тоді і тільки тоді, коли $d = 1$ і $n = 1$ або $n = 2$.

В теоремі 2 розпочато дослідження циркулянтних графів. Вони знайшли застосування в проектуванні обчислювальних мереж, мережі передачі даних і розподільних обчисленнях.

Нехай s_1, s_2, \dots, s_m, n – натуральні числа, такі, що $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_m < n$. Неорієнтований граф $C_n(s_1, s_2, \dots, s_m)$ з множиною вершин $V = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ і ребрами (u_i, u_{i+s_j}) , для $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$, де $i + s_j$ береться за модулем n , називають циркулянтним графом, а m – його розмірністю.

Теорема 2. Циркулянтний граф $C_n(s)$, де $s \leq (n - 1)/2 \in (a, 1)$ – дистанційним антимагічним, якщо n – непарне і $a > 1$. Циркулянтний граф $C_n(n/2) \in (1, 1)$ – дистанційним антимагічним.

Поняття (a, d) – дистанційної антимагічної розмітки виникло порівняно недавно, в 2012 році, тому цей напрямок містить багато відкритих проблем [2, с.283; 287; 3, с.102]. Результати даної роботи є початком їх розв’язку.

Список використаних джерел:

1. Gallian J.A. A dynamic survey of graph labeling, Electron / J.A. Gallian // The electronic journal of combinatorics. – 2015. – Vol. 18. – P. 157-163.
2. Arumugam S. On $(a; d)$ -distance antimagic graphs / S. Arumugam, N. Kamatchi // Australasian journal of combinatorics. – 2012. – Vol. 54. – P. 279-287.
3. Nalliah M. Antimagic labelings of graphs and digraphs: Ph. D. Thesis / M. Nalliah. – The National Centre for Advanced Research in Discrete Mathematics, University of Kalasalingam, 2014 – 135 p.

УДК 518.25

Л. М. Семчишин, канд. фіз.-мат. наук,

О. Б. Павелчак-Данилюк, канд. техн. наук

Чортківський навчально-науковий інститут підприємництва і бізнесу,

Тернопільський національний економічний університет, м. Чортків

ТЕСТУВАННЯ АЛГОРИТМІВ РОЗВ’ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ТИПІВ РОЗРІДЖЕНИХ ЧИСЛОВИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо розріджену числову систему лінійних алгебричних рівнянь та її опис тестування функції `FC_Three_Diag_Sys`.

Для перевірки алгоритму розв’язання трьохдіагональних систем лінійних алгебричних рівнянь методом ланцюгових дробів була використана система рівнянь наступного вигляду[1]:

$$\begin{pmatrix} 1.5 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1.5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1.5 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Це несиметрична система рівнянь, без діагонального домінування із середнім значенням спектрального числа обумовленості.

Для розв’язання систем лінійних алгебричних рівнянь з числовими елементами в середовищі `MatLab` написана і протестована функція `FC_Three_Diag_Sys`. Ця функція реалізує алгоритм розв’язування систем лінійних алгебричних рівнянь методом ланцюгових дробів і написана за допомогою об’єктно-орієнтованої макромови `MatLab`.

Для спрощення її можливого використання поданий текст разом з блоком формуванням системи лінійних алгебричних рівнянь, яка має описану матрицю.

```

function [] =FC_Three_Diag_Sys ( )
% Розв'язування трьохдіагональних систем ліній-
них алгебричних рівнянь
% Ax=b
% за допомогою матричних ланцюгових дробів
clc
n=25;
% формування тестової системи лінійних рівнянь
for i=1 : n
    for j=1: n
        A(i,j)=0;
        if (i==j) A(i,j)=1.5; end
        if (i==j+1) A(i,j)=-1; end
        if (j==i+1) A(i,j)=1; end
    end
    b(i)=0;
end;
b(1)=3;
%, обчислення X(1) і решти невідомих
D(n)=A(n,n);
i=n;
while (i>1);
    i = i-1;
    D(i)=A(i,i)-A(i+1,i)*A(i,i+1)/D(i+1);
end;
x(1)=b(1)/D(1);
i=1;
while (i<n)
    i=i+1;
    x(i)=-A(i,i-1)*x(i-1)/D(i);
end
x
end

```

Результати тестування функції FC_Three_Diag_Sys для $n = 25$ скопійовані з вікна MatLab і подані в наступній таблиці

| Значення n | Значення невідомих x_i | | | | | | |
|--------------|--------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 25 | 1.5000 | 0.7500 | 0.3750 | 0.1875 | 0.0938 | 0.0469 | 0.0234 |
| | 0.0117 | 0.0059 | 0.0029 | 0.0015 | 0.0007 | 0.0004 | 0.0002 |
| | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | | | |

Нескладна перевірка показує високу точність запропонованого методу розв'язання трьохдіагональних систем методом ланцюгових дробів.

Список використаних джерел:

1. Недашковський М.О. Обчислення з λ -матрицями / М.О. Недашковський, О.Я. Ковальчук. – К. : Наук. думка, 2007. – 294 с.

ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ІНТЕРВАЛІВ

В [1] введені нові об'єкти дослідження – функціональні інтервали, арифметичні, та теоретико-множинні операції над ними. Функціональні інтервали є узагальненням числових інтервалів та інтервальних розширень функцій. В [2] доведено, що множина лінійних функціональних інтервалів, визначених на одному й тому ж проміжку X аргументу, при означенні у [1] арифметичних операціях, є квазілінійним простором. Квазілінійний простір інтервалів є частинним випадком квазілінійного простору лінійних функціональних інтервалів. Тому, вищий рівень абстракції простору лінійних функціональних інтервалів та отримані в [1; 2] висновки дають можливість на основі математики функціональних інтервалів будувати і досліджувати ефективні методи розв'язування широкого кола задач.

В цій роботі запропоновані алгоритми розв'язування алгебраїчних та трансцендентних рівнянь і нерівностей, двохсторонньої апроксимації функцій на заданому інтервалі нелінійними сплайнами, задач оптимізації тощо.

Запропоновані алгоритми не мають проблеми початкового наближення. Після локалізації інтервалів, де є, або можуть бути розв'язки поставленої задачі, далі пошук її розв'язків продовжуємо за відповідним запропонованим алгоритмом окремо в кожному з цих інтервалів. Розв'язки поставленої задачі отримуємо у вигляді інтервалів, які містять їх із заданою точністю.

Результати проведених числових експериментів підтверджують високу ефективність запропонованих алгоритмів.

Список використаних джерел:

1. Сеньо П.С. Арифметика лінійних функціональних інтервалів / П.С. Сеньо // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2014. – Вип. 21. – С. 38-57.
2. Сеньо П.С. Топологія простору лінійних функціональних інтервалів / П.С. Сеньо // Мат. та комп. моделювання. Серія: фіз.-мат. науки. – 2014. – Вип. 11. – С. 209-223.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАСОБІВ СТАНДАРТИЗОВАНОГО ПЕДАГОГІЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

З появою революційної моделі данського математика Георга Раша наприкінці 50-х років минулого століття стало можливим говорити про вимірювання різних соціальних та психічних явищ, яке має ознаки фізичного

вимірювання. Вдалося побудувати інтервальну шкалу вимірювання, схожу на температурні шкали. З самого моменту появи модель Раша отримала як палких прибічників, так і запеклих критиків, які по-різному сприймають суть математичного моделювання та вимірювання. Серед дослідників у природничій сфері переважає підхід, коли математичну модель намагаються вдосконалити, аж поки вона належним чином не відповідатиме залежностям, що спостерігаються в експерименті. Тут такий підхід цілком виправданий, бо закони природи не залежать від дослідника. У суспільних науках, зокрема у педагогічних вимірюваннях за допомогою стандартизованого тестування, інструментом є вся організація експерименту, що знаходиться в руках дослідника (від розробки тесту до його закриття). Тут можливий підхід, коли вдосконалити потрібно не теорію, а сам інструмент (тобто, тест).

Відповідно до моделі Раша $\text{logit}(p_i(\theta)) = \ln\left(\frac{p_i(\theta)}{1 - p_i(\theta)}\right) = \theta - b_i$, де

$p_i(\theta)$ – ймовірність того, що учасник з рівнем підготовки θ правильно відповість на дихотомічне завдання складності b_i . Для оцінювання θ та b_i використовують «сирі» бали учасників та завдань, які у даному випадку є достатніми статистиками для вказаних параметрів, що гарантує існування відповідної умовної статистики, яка не залежить від оцінюваного параметра. Ця властивість достатніх статистик покладена в основу методу умовної максимальної вірогідності, який дозволяє отримати оцінки рівнів підготовленості учасників незалежно від оцінок складностей завдань, що у свою чергу забезпечує виконання однієї з основних властивостей вимірювання – інваріантності. Таку ж властивість мають усі моделі сімейства Раша для політомічних завдань, зокрема, модель рейтингових шкал (D. Andrich, 1978) та часткових кредитів (G. Masters, 1982). Модель Раша усе частіше використовується у різних областях поведінкових наук. За даними Google Scholar кількість її згадувань у англomовному середовищі за перше десятиліття XXI століття збільшилось майже у 7 разів: від трохи більше 500 до майже 3500.

Модель Раша дала поштовх для розвитку сучасної теорії тестів IRT (ItemResponseTheory), яка стала потужною альтернативою та одночасно доповненням до класичної теорії, що домінувала у тестуванні до середини минулого століття. У рамках IRT розроблено багато моделей, найбільш уживаними з яких є дво- та трипараметрична моделі А. Бірнбаума, до яких уведено параметр роздільної здатності завдання a_i та параметр угадування c_i . Результатом такого вдосконалення була краща відповідність даних побудованій моделі, але ціною була втрата властивості інваріантності отриманих оцінок. Саме тому варто завжди пам'ятати про різницю між моделюванням та вимірюванням, обираючи одну з моделей для обробки результатів тестування. Якщо за мету ставиться розробка якісного інструменту вимірювання, його вдосконалення, варто обирати модель Раша. Якщо метою є одноразове оцінювання, то для забезпечення вищої точності краще обрати вдосконалені моделі. Для завдань політомічного типу також розроблено ряд моделей, які не відносяться до сім'ї моделей Раша. Наприклад, узагальнена модель част-

кових кредитів з різною роздільною здатністю завдань (E. Muraki, 1992), модель порогів (F. Samejima, 1969), у якій впорядковані категорії розглядаються як граничні точки, що розділяють деяку неперервну область, номінальна модель (R. Bock, 1972), у якій заздалегідь не визначена залежність між порядком категорій та рівнем прояву ознаки. Усі вище згадані моделі побудовано з урахуванням припущення про одновимірність конструкту та про локальну незалежність завдань, через які вони найчастіше критикуються. У доповіді планується обговорити можливості виконання цих припущень та способи перевірки.

Якщо у Великій Британії та Європі у 70-80-х роках точились гарячі дискусії щодо можливості використання моделей IRT, зокрема моделі Раша, у державних масштабах, у США та Австралії ці моделі широко застосовувались (включаючи широкомасштабні дослідження типу TIMSS чи PISA), у Росії була спроба їх використання при шкалюванні ЄДЕ, то в Україні зацікавленість ними тільки пробуджується завдяки появі та утвердженню ЗНО. Відомі розрізнені дослідження Диховичного О.О., Алексєєвої І.В., Лісової Т.В., Ковальчука Ю.О., Жука Ю.О. та ін. На жаль, власна школа освітніх вимірювань ще перебуває у стадії формування. Варто також зазначити, що використання моделей для оцінювання учасників не завжди має бути самоціллю. У рамках цих моделей простіше та надійніше вирішується багато супутніх проблем, як то: змістове тлумачення оцінок шкали; вирівнювання результатів тестування різних сесій, років; виявлення упередженого оцінювання певних груп з індивідуальними особливостями тощо.

УДК 517.95

М. І. Сєров*, д-р. фіз.-мат. наук,
Т. О. Карпалюк**

*Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка, м. Полтава,

**Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ГАЛІЛЕЇВСЬКА ІНВАРІАНТНІСТЬ ДВОВИМІРНОЇ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Розглядається система рівнянь конвекції-дифузії

$$U_0 = \Delta U + F^i(U)U_i, \quad (1)$$

де $U \in R^3$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in R^2$, $F^i(U)$ – довільні функціональні матриці розмірності 3×3 , $i = \overline{1, 2}$.

Розв'яжемо стосовно класу систем (1) задачу виділення таких систем, які інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея.

Справедливі наступні твердження.

Лема. Група вигляду

$$\dot{x}'_0 = 2\sigma x_0 + \sigma_0, \dot{x}'_i = \sigma x_i + q_{ij}x_j + d_i x_0 + \sigma_i, u^{a_i} = k_{ab}u^b + l_a \quad (2)$$

де $\sigma, \sigma_0, \sigma_i, d_i, k_{ab}, l_a, q_{ji} = -q_{ij} - \text{const}$, $a, b = \overline{1, 3}$, $i, j = \overline{1, 2}$ є групою неперервних перетворень еквівалентності системи (1).

Реалізація узагальненої алгебри Галілея для $\bar{x} \in R^2$ наступна:

$$\partial_0, \partial_i, G_i = x_0 \partial_i + Q_i, J_{12} = x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1 + Q_3, \quad (3)$$

$$D = 2x_0 \partial_0 + x_i \partial_i + Q_4, \Pi = x_0^2 \partial_0 + x_0 x_i \partial_i + x_i Q_i + x_0 Q_4 + Q_5,$$

де оператори Q_j задовольняють комутаційні співвідношення:

$$\begin{aligned} [Q_1, Q_2] = 0, [Q_1, Q_3] = Q_2, [Q_2, Q_3] = -Q_1, [Q_i, Q_4] = -Q_i, [Q_3, Q_4] = 0, \\ [Q_i, Q_5] = [Q_3, Q_5] = 0, [Q_4, Q_5] = 2Q_5, i = 1, 2. \end{aligned}$$

Теорема. З точністю до перетворень еквівалентності (2) система (1) інваріантна відносно алгебри (3) тоді і тільки тоді, коли вона набуває одного з наступних виглядів:

$$\bar{u}_0 + (\bar{u} \bar{\nabla}) \bar{u} = \Delta \bar{u}, \quad (4)$$

$$u_0^3 + (\bar{u} \bar{\nabla}) u^3 = \Delta u^3 + u^3 \left(\frac{s}{2} (u_1^1 - u_2^2) + l u_2^2 + \lambda \bar{\nabla}^{\perp} \bar{u} \right),$$

коли $Q_i = \partial_{u^i}$, $Q_3 = u^1 \partial_{u^2} - u^2 \partial_{u^1} + s u^3 \partial_{u^3}$, $Q_4 = -I_{12} + l u^3 \partial_{u^3}$, $Q_5 = 0$, $l \neq 0$;

$$\bar{u}_0 + (\bar{u} \bar{\nabla}) \bar{u} = \Delta \bar{u},$$

$$u_0^3 + (\bar{u} \bar{\nabla}) u^3 = \Delta u^3 + \lambda \bar{\nabla}^{\perp} \bar{u} + \sin \sin \left(\frac{2}{s} \ln \ln u^3 \right) \bar{D} \bar{u} + \cos \cos \left(\frac{2}{s} \ln \ln u^3 \right) \bar{D}^{\perp} \bar{u}, \quad (5)$$

коли $Q_i = \partial_{(u^i)}$, $Q_3 = u^1 \partial_{u^2} - u^2 \partial_{u^1} + s u^3 \partial_{u^3}$, $Q_4 = -I_{12}$, $Q_5 = 0$;

$$\bar{u}_0 + (\bar{u} \bar{\nabla}) \bar{u} = \Delta \bar{u} + (u^3)^{-\frac{2}{s}-1} \left(\lambda_1 \bar{\nabla} u^3 + \lambda_2 \bar{\nabla}^{\perp} u^3 \right), \quad (6)$$

$$u_0^3 + (\bar{u} \bar{\nabla}) u^3 = \Delta u^3 + u^3 \left(\frac{s}{2} \bar{\nabla} \bar{u} + \lambda_3 \bar{\nabla}^{\perp} \bar{u} \right),$$

коли $Q_i = \partial_{(u^i)}$, $Q_3 = u^1 \partial_{u^2} - u^2 \partial_{u^1}$, $Q_4 = -I_{12} + s u^3 \partial_{u^3}$, $Q_5 = 0$;

$$\bar{u}_0 + (\bar{u} \bar{\nabla}) \bar{u} = \Delta \bar{u}, \quad (7)$$

$$u_0^3 + (\bar{u} \bar{\nabla}) u^3 = \Delta u^3 + \psi \bar{\nabla}^{\perp} \bar{u},$$

коли $Q_i = \partial_{(u^i)}$, $Q_3 = u^1 \partial_{u^2} - u^2 \partial_{u^1}$, $Q_4 = -I_{12}$, $Q_5 = 0$;

$$\bar{u}_0 + (\bar{u} \bar{\nabla}) \bar{u} = \Delta \bar{u} + e^{-2u^3} \left(\lambda_1 \bar{\nabla} u^3 + \lambda_2 \bar{\nabla}^{\perp} u^3 \right), \quad (8)$$

$$u_0^3 + (\bar{u} \bar{\nabla}) u^3 = \Delta u^3 + \frac{1}{2} \bar{\nabla} \bar{u} + \lambda_3 \bar{\nabla}^{\perp} \bar{u},$$

коли $Q_i = \partial_{(u^i)}$, $Q_3 = u^1 \partial_{u^2} - u^2 \partial_{u^1}$, $Q_4 = -I_{12} + \partial_{u^3}$, $Q_5 = 0$;

$$\bar{u}_0 + (\bar{u}\bar{\nabla})\bar{u} = \Delta\bar{u}, \quad (9)$$

$$u_0^3 + (\bar{u}\bar{\nabla})u^3 = \Delta u^3 + \frac{s}{2}\bar{\nabla}\bar{u} + \lambda\bar{\nabla}^\perp\bar{u},$$

коли $Q_i = \partial_{u^i}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1} + \partial_{u^3}$, $Q_4 = -I_{12} + s\partial_{u^3}$, $Q_5 = 0$;

$$\bar{u}_0 + (\bar{u}\bar{\nabla})\bar{u} = \Delta\bar{u}, \quad (10)$$

$$u_0^3 + (\bar{u}\bar{\nabla})u^3 = \Delta u^3 + \lambda\bar{\nabla}^\perp\bar{u} + \sin\sin 2u^3\bar{D}\bar{u} + \cos\cos 2u^3\bar{D}^\perp\bar{u},$$

коли $Q_i = \partial_{u^i}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1} + \partial_{u^3}$, $Q_4 = -I_{12}$, $Q_5 = 0$;

$$\bar{u}_0 + (\bar{u}\bar{\nabla})\bar{u} = \Delta\bar{u} + \bar{L}\omega, \quad (11)$$

$$u_0^3 + (\bar{u}\bar{\nabla})u^3 = \Delta u^3 + \left(\bar{u}\bar{L}\right)\omega - \omega\bar{\nabla}\bar{u},$$

коли $Q_i = \partial_{u^i} + u^i\partial_{u^3}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}$, $Q_4 = -I - u^3\partial_{u^3}$, $Q_5 = 2\partial_{u^3}$.

У системах (4)-(11) $\omega = u^3 - \frac{\bar{u}^2}{2}$, $\bar{u} = (u^1, u^2)$, $\bar{L} = \lambda_1\bar{\nabla} + \lambda_2\bar{\nabla}^\perp$,

$\bar{\nabla} = (\partial_1, \partial_2)$, $\bar{\nabla}^\perp = (\partial_2, -\partial_1)$, $\bar{D} = (\bar{c}\bar{\nabla}^\perp, \bar{c}\bar{\nabla})$, $\bar{D}^\perp = (\bar{c}\bar{\nabla}, -\bar{c}\bar{\nabla}^\perp)$, $\bar{c} = (c_1, c_2)$

$c_i, \lambda_a, \lambda, l, s \neq 0$ – довільні сталі, $\psi = \psi(u^3)$ – довільна гладка функція, $i \in \{1, 2\}$, $a = \bar{1}, \bar{3}$.

Знайдені системи (4)-(11), інваріантні відносно вказаних алгебр, у силу своїх симетрійних властивостей можуть бути використані при моделюванні реальних фізичних процесів.

Список використаних джерел:

1. Фушич В.И. Симметричный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики / В.И. Фушич, В.М. Штелень, Н.И. Серов. – К. : Наук. думка, 1989. – 339 с.
2. Лагно В.І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу / В.І. Лагно, С.В. Спічак, В.І. Стогній // Праці Інституту математики НАН України : Матка та її застосування. – К., 2002. – Т. 45. – 359 с.

М. І. Сєров, д-р. фіз.-мат. наук,

О. Г. Плюхін, канд. фіз.-мат. наук

Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка, м. Полтава

НЕКЛАСИЧНІ СИМЕТРІЇ І РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ РЕАКЦІЇ-ДИFUЗІЇ

Розглянемо (1+1)-вимірну систему рівнянь реакції-дифузії

$$u_{xx} = \lambda_1 u_t + F(u, v),$$

$$v_{xx} = \lambda_2 v_t + G(u, v),$$

де $u = u(x), v = v(x), x \in R^2, u, v \in R$, нижні індекси t, x означають диференціювання за змінними t, x відповідно.

Будемо шукати оператори Q -умовної симетрії [1] вигляду

$$Q = \partial_t + \xi(u, v)\partial_x + \eta^1(u, v)\partial_u + \eta^2(u, v)\partial_v,$$

відносно яких інваріантна система рівнянь реакції-дифузії.

Наведемо одну з таких систем з відповідним оператором

$$u_{xx} = \lambda_1 u_t + v(g(\omega) - \lambda_1) + h(\omega), \omega = \beta u - v + \tau \ln(v), \beta \neq 0,$$

$$v_{xx} = \lambda_2 v_t + \beta(v)(g(\omega) - \lambda_2),$$

$$Q = \partial_t + (v - \tau)\partial_u + \beta v\partial_v.$$

Побудувавши анзац, провівши редукцію, вибравши параметри $\lambda_1, \lambda_2, \beta, \tau$ і функції $g(\omega), h(\omega)$, одержимо розв'язок

$$u = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} e^{-3t} \cos\left(\sqrt{\frac{7}{2}}x\right), v = e^{-3t} \cos\left(\sqrt{\frac{7}{2}}x\right)$$

нелінійної системи рівнянь реакції-дифузії спеціального вигляду

$$2u_t = u_{xx} + u\left(-2 + \frac{v}{3}\right) + \frac{v^2}{9} + 1,$$

$$v_t = v_{xx} + v\left(1 - u - \frac{v}{3}\right),$$

яка є деяким різновидом моделі Лотки-Вольтерра. Такі системи описують взаємодію між біовидами типу «хижак-жертва».

Колектив авторів вдячний проф. Р.М. Чернізі за постановку задачі.

Список використаних джерел:

1. Фушич В.И. Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики / В.И. Фушич, В.М. Штелень, Н.И. Серов. – К. : Наук. думка, 1989. – 336 с.

М. І. Сєров, д-р. фіз.-мат. наук,

Ю. В. Приставка

Полтавський національний технічний університет

імені Юрія Кондратюка, м. Полтава

НЕЛОКАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Більшість математичних моделей фізики, біології, хімії та інших природничих наук, а також економіки, фінансової математики тощо, формулюється з використанням диференціальних рівнянь. Тому невід'ємною складовою частиною згаданих наук є дослідження спеціальних класів диференціальних рівнянь і побудова їх точних розв'язків.

Найбільш широко вживаним методом побудови точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь є метод симетрійної редукції, який запропонував Софус Лі наприкінці минулого сторіччя. Основною ідеєю цього методу є редукція диференціального рівняння з частинними похідними до диференціальних рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних за допомогою спеціальних підстановок – анзаців.

Розглянемо систему дифузії-конвекції

$$U_t = \partial_x [F(U)U_x + G(U)], \quad (1)$$

$$\text{де } U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}, \quad G(U) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}, \quad u^a = u^a(t, x), \quad t - \text{часова}$$

змінна, x – просторова змінна, $f^{ab} = f^{ab}(U)$, $g^a = g^a(U)$ – коефіцієнти дифузії та конвекції відповідно, $a, b = \overline{1, 2}$.

Розглянемо сукупність трьох перетворень:

$$t = t, x = x, u^a = v_x^a, \quad (2)$$

де $v^a = v^a(t, x)$ – нові невідомі функції,

$$t = x_0, x = w^1, v^1 = x_1, v^2 = w^2, \quad (3)$$

де x_0, x_1 – нові незалежні змінні, $w^a = w^a(x_0, x_1)$ – нові залежні змінні,

$$x_0 = x_0, x_1 = x_1, w_1^a = z^a, \quad (4)$$

$z^a = z^a(x_0, x_1)$ – нові залежні змінні.

Теорема 1. Перетворення (2)-(4) є перетвореннями еквівалентності системи (1).

Розглянемо систему рівнянь Ван-дер-Ваальса

$$\begin{aligned} u_t^1 &= \lambda_1 u_{xx}^1 - u^1 u_x^1 + \mu u^2 u_x^2, \\ u_t^2 &= \lambda_2 u_{xx}^2 - u^1 u_x^2 - u^2 u_x^1, \end{aligned} \quad (5)$$

де $x = (x_0, x_1)$, $u^a = u^a(x)$, λ_1 – коефіцієнт кінематичної в'язкості, λ_2 – коефіцієнт дифузії, μ – коефіцієнт конвекції, $a \in \{1, 2\}$.

Система Ван-дер-Ваальса входить до класу систем рівнянь конвекції-дифузії. Вона широко застосовується у молекулярно-кінетичній теорії газів та рідин.

Застосувавши до системи (5) перетворення (2)-(4) отримаємо систему

$$Z_0 = \partial_1 \left[\frac{1}{(z^1)^3} \begin{pmatrix} \lambda_1 z^1 & 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_2) z^2 & \lambda_2 z^1 \end{pmatrix} Z_1 - \frac{1}{2(z^1)^2} \begin{pmatrix} (\mu(z^2)^2 - 1) z^1 \\ (\mu(z^2)^2 + 1) z^2 \end{pmatrix} \right]. \quad (6)$$

Побудувавши лівські анзаци для системи (5) та подіявши на них перетвореннями (2)-(4), знаходимо нелокальні анзаци для системи (6). Один із таких анзацив має вигляд

$$z^1 = \frac{(x_0^2 + 1)\psi^1}{\sqrt{x_0^2 + 1 + \tau x_0 \psi^1}}, \quad z^2 = \frac{(x_0^2 + 1)\psi^2}{\sqrt{x_0^2 + 1 + \tau x_0 \psi^1}}, \quad \omega = -\frac{1}{2} \frac{\tau^2 x_0}{x_0^2 + 1}, \quad \tau_1 = z^1. \quad (7)$$

Він редукує систему (6) до системи звичайних диференціальних рівнянь. Розв'язавши редуковану систему та використавши анзак (7), знаходимо розв'язок системи (6), записаний в параметричному вигляді:

$$x_1 = \frac{1}{2} \frac{x_0 \tau^2}{x_0^2 + 1} - \lambda_2 \ln \tau, \quad z^1 = \frac{(x_0^2 + 1)\tau}{x_0 \tau^2 - \lambda_2 (x_0^2 + 1)},$$

$$z^2 = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{\tau^2 + \sqrt{\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} (x_0^2 + 1)}{x_0 \tau^2 - \lambda_2 (x_0^2 + 1)}.$$

УДК 517.957

М. І. Скров, д-р. фіз.-мат. наук,

І. В. Рассоха, канд. фіз.-мат. наук

Полтавський національний технічний університет

імені Юрія Кондратюка, м. Полтава

ГАЛІЛЕЙ-ІНВАНТНТЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА З ДЕРИВАТИВНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Симетрійні властивості рівняння Шредінгера в різний час вивчались багатьма авторами. Так в роботі [1] досліджено інваріантність рівнянь вигляду

$$i\psi_0 = A_{ab}(\psi, \psi^*)\psi_{ab} + B(\psi, \psi^*, \psi, \psi^*)$$

відносно алгебри Галілея з оператором маси.

Нами сформульована і доведена наступна теорема.

Теорема. N -вимірне рівняння

$$i\psi_0 = -\frac{1}{2m}\Delta\psi + \left[\alpha^a(\psi, \psi^*)\psi_a + \beta^a(\psi, \psi^*)\psi_a^* + \gamma(\psi, \psi^*) \right] \psi$$

інваріантне відносно алгебри Галілея вигляду

$$\langle \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, G = x_0\partial_a - mx_a i(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}), J = i(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}),$$

$$D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - \frac{n}{2}(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}),$$

$$P = x_0^2\partial_0 + x_0x_a\partial_a - \frac{m\bar{x}^2}{2}i(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) - \frac{nx_0}{2}(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}),$$

де $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}$, $\partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}$, $\partial_\psi = \frac{\partial}{\partial \psi}$, $\partial_{\psi^*} = \frac{\partial}{\partial \psi^*}$, $\mu = \overline{0, n}$, $a, b = \overline{1, n}$, тоді і

тільки тоді, коли воно має наступний вигляд

$$i\psi_0 = -\frac{1}{2m}\Delta\psi + \left[\lambda_a \left(|\psi|^{\frac{2}{n}} \right)_a + \lambda \left| \psi \right|^{\frac{4}{n}} \right] \psi.$$

Список використаних джерел:

1. Фуцич В.И. Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения. I / В.И. Фуцич, Р.М. Чернига // Укр. мат. журн. 1989. – Т. 41, №10. – С. 1349-1357.

УДК 372.06

О. О. Ситник, канд. техн. наук,

С. Ю. Прогасов, канд. техн. наук,

К. М. Ключка, канд. техн. наук

Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси

БАГАТОКРОКОВІ АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЗАДАЧІ ВІДНОВЛЕННЯ СИГНАЛІВ

Задача відновлення сигналів має важливе значення для систем вимірювань, контролю і керування. Ефективне її розв'язання забезпечує істотне підвищення якості процесів функціонування вказаних систем.

Розглянемо лінійне інтегральне рівняння I роду типу Вольтера

$$\int_0^x K(x, t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x \in \beta = [0, T] \quad (1)$$

із ядрами

$$K(x, x) \neq 0, \quad \forall x \in \beta \text{ і } f(0) = 0, \quad (2)$$

та

$$K(x, x) \equiv 0, \quad K'_x(x, x) \neq 0, \quad \forall x \in \beta, \quad f(0) = f'(0) = 0. \quad (3)$$

Відомо [1] із теорії інтегральних рівнянь, якщо права частина $f(x)$ і ядро $K(x, t)$ задовольняють визначеним умовам гладкості, то існує єдиний розв'язок задачі (1) $\varphi(x)$ і, відповідно, задача (1) коректна за спеціально вибраній парі просторів. Однак задача розв'язання рівняння (1) за наближено заданими функціям $\tilde{f}(x)$, $\tilde{K}(x, t)$ є некоректною.

Відомі різні регуляризуючі алгоритми для стійкого розв'язку рівняння (1). У роботі [2] розглядається підхід, пов'язаний із апроксимацією розв'язку початкового рівняння та розв'язанням деяких допоміжних рівнянь Вольтера II роду. Оскільки задача чисельного розв'язку рівняння (1) пов'язана із знаходженням каркасів наближених розв'язків, тому процедура дискретизації може відігравати істотну роль при розв'язанні задачі. У [3] показано, що при використанні однокрокових методів, заснованих на простих формулах прямокутників, створюються регуляризуючі алгоритми, в яких параметром регуляризації є крок дискретизації. Проте однокрокові методи мають низький порядок збіжності. Задача побудови стійких методів високого порядку точності є нетривіальною. При вивченні методів порядку вище двох показано [3], що застосування класичних інтерполяційних формул (типу Сімпсона, Грегорі I і II порядку) призводить до розбіжних методів, якщо їх застосувати для розв'язання задачі (1), (2). Проте, як показано в [4], навпаки, методи засновані на цих формулах, придатні для розв'язку задачі (1), (3). У роботі [4] для чисельного розв'язку задачі (1), (2) запропонована загальна схема побудови лінійних багатокрокових методів, яка заснована на використанні формул типу Адамса. Взявши за основу роботу [4], у доповіді більш детально розглядається задача стійкої побудови каркасів наближених інтегральних рівнянь Вольтера I роду.

Список використаних джерел:

1. Верлань А.Ф. Интегральное уравнение: Методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К. : Наукова думка, 1986. – 542 с.
2. Денисов А.М. О приближенном решении уравнения Вольтерра I рода / А.М. Денисов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1975. – Т. 15. – №4. – С. 1053-1056.
3. Апарцин А.С. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм / А.С. Апарцин, А.В. Бакушинский // Дифференциальные и интегральные уравнения. – Иркутск, 1972. – Вып. 1. – С. 248-258.
4. Тент Мен Ян. Линейные многошаговые методы для численного решения Вольтерра I рода / Тент Мен Ян // Методы оптимизации и исследование операций. – Иркутск : СЭМ СО АН СССР, 1984. – С. 254-257.

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СКЛОВАРНОЇ ПЕЧІ

Технологічний процес виготовлення скла енерговитратна область виробництва. Скловарні печі являють собою дуже складні технологічні об'єкти. Виконувати процес синтезу систем керування безпосередньо на технологічних апаратах практично неможливо. Для проведення відповідних досліджень необхідно виконати математичне моделювання об'єкту керування, в якості об'єкту керування розглядають ванну печі.

У роботі [1, с.141-152] приведено принцип структурного моделювання об'єкту керування, для прикладу фізично не однорідної системи при ідеальному тепловому контакті двох дотичних поверхнями тіл, з різними теплофізичними властивостями. У випадку виробництва скла це контакти скломаса-кладка, скломаса-газ, газ-кладка. Для відповідних розрахунків постала задача виводу передатних функцій елементів скловарної печі та виводу результуючої передатної функції ванни печі. Були отримані відповідні передатні функції $W_{ск}(x,p)$, $W_{кл}(p)$, $W_i(p)$, де x – товщина шару скломаси (від 0 до h) [2, с. 101-105]. Наступним кроком було виконане структурне моделювання ванни печі та за допомогою спрощень виведено результуючу передатну функцію, $W_{ванни}(p)$, що безпосередньо спираються на попередні дослідження [3, с.131-136]

Отриманий результат являє собою складну структуру, що для подальших досліджень підлягає спрощенню за допомогою апроксимації по перехідній характеристиці.

Інший підхід в моделюванні базується на дослідженні скломаси та кладки дна в поперечному розрізі, на результат впливають наступні параметри: товщина шару скломаси та кладки відповідно, поточне значення глибини шару, коефіцієнт теплообміну між газом та верхньою поверхню скломаси, T_g – температура газу, крок по координаті довжини шару, число шарів на яке розбивається скломаса та стінка. Створюється система диференціальних рівняння теплопровідності для скломаси та кладки, граничні умови на поверхні контакту газу та скломаси, умови ідеального теплового контакту між скломасою та кладкою, ідеальної теплової ізоляції на нижній поверхні кладки [4, с.93-96].

В результаті виведені передатні функції для каналів «температура газу – температура скломаси» та «температура газу – температура кладки». Особливістю даної моделі по відношенню до першого дослідження досліджень є те, що розглядається теплопередача між скломасою та кладкою дна, на відміну від попередніх досліджень, де враховувалась кладка бокових стінок печі. Постає задача на подальші дослідження співставити результати отриманих моделей, виявити більш адекватну і оптимальну модель, що буде задовольняти вимоги синтезу системи керування.

Список використаних джерел:

1. Рапопорт Э.Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами / Э.Я. Рапопорт. – М. : Высшая школа, 2003. – С. 299.
2. Жученко А.І. Отримання передатних функцій елементів скловарної печі / А.І. Жученко, О.В. Ситніков // Хімічна інженерія, екологія та ресурсозбереження. – 2011. – №1(7). – С. 101-105.
3. Кубрак А.І. Вивід передатної функції ванни скловарної печі, як об'єкту керування / А.І. Кубрак, О.В. Ситніков // Хімічна інженерія, екологія та ресурсозбереження. – 2012. – №2(10). – С. 131-136.
4. Кубрак А.І. Побудова математичної моделі ванни скловарної печі / А.І. Кубрак, О.В. Ситніков // Хімічна інженерія, екологія та ресурсозбереження. – 2013. – №1(11). – С. 93-96.

V. S. Sikora, cand. of ph.-math. sciences

Yurij Fedkovich Chernivtsy National University, Chernivtsy

METASYMMETRICAL GROUPS OF INFINITE RANK AND THEIR ORDER

As is well known, the supernatural number is a formal product $\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{k_i}$,

where $\{p_1, p_2, \dots\}$ is a set of prime numbers, $x_i \in \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$, $i \in N$. The divisibility ratio is introduced on the set of supernatural numbers. This ratio is a partial order. Such partially-ordered set is a complete lattice. The transition to supernatural numbers gives a chance to expand a order concept from finite groups onto profinite groups [1]. One of the standard examples of profinite groups are metasymmetrical groups of infinite rank and infinite iterated wreast products of symmetrical groups of a symmetrical degree [2]. The aim of the abstracts is a calculation of an order for such groups.

Let $\bar{k} = \langle k_1, k_2, \dots \rangle$ is a infinite sequence of natural numbers, such that $k_i \geq 2$ for all $i = 1, 2, \dots$; $S(\bar{k})$ is a metasymmetrical group of metadegree \bar{k} , i.e.

$S(\bar{k}) = \prod_{i=1}^{\infty} S_{k_i}$ is a wreast product of a symmetrical groups S_{k_1}, S_{k_2}, \dots [2]. The

$S(\bar{k})$ group is a profinite group. Thus, the order of this group is some supernatural number [3]. In case of a boundedness of the sequence \bar{k} we denote with the help of the symbol $i(\bar{k})$ the maximum of k_i numbers, which appear in \bar{k} infinitely many; the symbol $f(\bar{k})$ – the maximum of k_i numbers, which appear in \bar{k} finitely; $n(\bar{k})$ is a number of last entry of the number $f(\bar{k})$ into \bar{k} ; $l_{\bar{k}}(p)$ is a number p exponent (where p is a prime number, which be a member of a canonical decomposition of the number

$n(\bar{k})$
| $\prod_{i=1} S_{k_i}$ |).

Theorem. Let \bar{k} is an arbitrary infinite sequence on the set $N \setminus \{1\}$; p_1, p_2, \dots is a sequence of all prime numbers in the natural order; $S(\bar{k})$ is a metasymmetrical group of the metadegree \bar{k} . Then 1) if the sequence \bar{k} is unbounded, then $|S(\bar{k})| = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\infty}$; 2) if the sequence \bar{k} is bounded and $i(\bar{k}) \geq f(\bar{k})$, then $|S(\bar{k})| = \prod_{i=1}^{i(\bar{k})} p_i^{\infty}$; 3) if the sequence \bar{k} is bounded and $i(\bar{k}) < f(\bar{k})$, then $|S(\bar{k})| = \prod_{i=1}^{i(\bar{k})} p_i^{\infty} \cdot \prod_{i=i(\bar{k})+1}^{f(\bar{k})} p_i^{l_i(p_i)}$.

References:

1. John S. Wilson. Prefinits groups / S. John. – Oxford : Clarendon Press, 1998. – 283 p.
2. Kaluzhnin L.A. Krantzproducte / L.A. Kaluzhnin, P.M. Beleckij, V.Z. Feinberg. – Leipzig : Teulner Verlag, 1987. – 168 p.
3. Sushchansky V.I. Orders of metasymmetrical groups of infinite rank / V.I. Sushchansky, V.S. Sikora // 6-th International Algebraic Conference in Ukraine (Ukraine, Kamyanets-Podilsky, July 1-7, 2007) : Abstracts. – Kamyanets-Podilsky, 2007. – P. 199-200.

УДК 539.3

О. В. Слободянюк, канд. техн. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

МЕТОДИКА ОЦІНКИ ЯКОСТІ ВІДЕО ДЛЯ СТАНДАРТУ ВИСОКОЕФЕКТИВНОГО ВІДЕОКОДЕКУ HEVC

Галузь кодування відео зараз переживає череду по-справжньому якісних змін. Так в середині 90-х років ХХ століття поява стандарту кодування MPEG-2 (H.262) призвела до стрімкого розвитку цифрового відео. З'явилися цілі класи пристроїв для обробки відео даних. Поява даного стандарту розпочало процес зникнення з ринку аналогових систем обробки відео. Поява у середині 2000-х років наступного стандарту AVC (H.264) завершила цей процес і зробила можливим широке просування цифрового відео у телекомунікаційних мережах, системах та засобах розповсюдження медіа контенту. По суті він перетворив мережу Інтернет із текстово орієнтованого на повноцінне мультимедійне середовище із високим рівнем інтерактивності та умінням реагувати на потреби й побажання кінцевих споживачів.

У 2013 році організаціями MPEG (Moving Picture Experts Group) та VCEG (Video Coding Experts Group) був розроблений та затверджений новий стандарт кодування відео H.265. 15 лютого 2015 року було випущено його версію 2.0. HEVC (The High Efficiency Video Coding), а саме таку назву він отримав, здатний забезпечити такий же рівень суб'єктивної якості як і AVC, але при цьому генерує вдвічі менший швидкісний потік передачі бітів. Перша версія підтримує сервіси, які використовують звичайне (одношарове) кодування у форматі 4:2:0-семпльованого відео з 8- або 10-бітною точністю.

Друга ревізія із окремим доповненням розширюють стандарт для підтримки додатків із підтримкою інструментів, які підтримують 4:2:2 та 4:4:4 дискретизацію відео формату, а також 12- і 16-бітну точність, а також удосконалене багатозарове кодування для ефективної масштабованості. Ще одне доповнення, що в даний час розробляється, призначене забезпечити більш ефективне кодування відео, що захоплюється з екрану монітора із великою кількістю графіки та текстових даних.

В зв'язку з тим, що основні алгоритми нового стандарту стиснення суттєво відрізняються від тих, що використовувалися у всіх його попередниках виникає необхідність розробки нової методики оцінки якості обробленого відео та ефективності роботи відеокодека в цілому.

В класичному варіанті оцінка якості відео структурно складається із об'єктивної та суб'єктивної оцінки. Перший компонент включає в себе обчислення таких статистичних величин як пікове відношення сигнал-шум (PSNR) та середньоквадратичне відхилення (MSE). Для відеопотоків, які складаються з трьох колірнорізницевих компонент слід використовувати оцінку за відношенням сигнал-шум для кожної з цих компонент. Наприклад, для формату 4:4:0-семпльованого відео буде справедливим наступний вираз $PSNR_{vid} = (6 \cdot PSNR_Y + PSNR_{CB} + PSNR_{CR}) / 8$.

Суб'єктивна оцінка якості проводиться згідно рекомендацій ITU-T Rec. P.910 та ITU-RRec. BT.500. В якості основного методу оцінки пропонується використовувати метод оцінки погіршення категорії якості (DCR) [3]. Для обчислення якості за цим методом рекомендується використовувати 11-рівневу шкалу оцінки (від 0 до 10 у напрямку збільшення якості). Інтерпретація отриманих результатів проводиться за величиною середнього рейтингу тобто методу середніх суб'єктивних оцінок (MOS).

Крім вищезазначених підходів до визначення якості відео слід також проводити оцінку ефективності кодування. Так при розробці методики слід визначати наскільки бітовий потік при кодуванні HEVC менший порівняно із AVC при суб'єктивно однаковій якості відео. Для оцінки ефективності процесу кодування використовується метод Бйонтегарда [1].

Розробка методики оцінки кодування нового методу високоєфективного кодування відеоданих HEVC дозволить оцінити його переваги над існуючими відеокодеками та виявити можливі існуючі недоліки.

Список використаних джерел:

1. Bjøntegaard G. Improvements of the BD-PSNR Model, document VCEG-A111, ITU-T SG 16/Q6 / G. Bjøntegaard // 35th VCEG Meeting. – Berlin, Germany, Jul. 2008.
2. Flynn D. Overview of the range extensions for the HEVC standard: Tools, profiles and performance / D. Flynn // IEEE Trans. Circuits Syst. Video Technol. – Vol. 26, №1.
3. Methodology for the Subjective Assessment of the Quality of Television Picture, ITU-R Rec. BT.500, ITU-R, Jan. 2012.
4. Subjective Video Quality Assessment Methods for Multimedia Applications, ITU-T Rec. P.910, ITU-T, Apr. 2008.

УДК 004.4:[373+377+378]

О. А. Смалько, канд. пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ВИКОРИСТАННЯ БЕЗПЛАТНИХ ПРОГРАМНИХ ЗАСТОСУНКІВ У РОБОТІ СУЧАСНОГО ВИКЛАДАЧА

Повсякденні завдання, які повинен вирішувати сучасний викладач, що працює у системі загальноосвітньої середньої, професійно-технічної чи вищої освіти, так чи інакше стосуються використання комп'ютерних програмних засобів різноманітного призначення. Серед потрібних викладачу програмних інструментів – текстові процесори, графічні редактори, системи презентаційної графіки, пошукові системи, засоби електронного поштового зв'язку, мережевого спілкування і співробітництва, а також програмні застосунки для створення сайтів, блогів, тестів, відео тощо. Переважними для викладачів, звісно, є такі програмні рішення, які є досить функціональними, але при цьому розповсюджуються на безоплатній основі.

На сучасному ринку програмних засобів можна знайти чимало потрібних застосунків, що функціонують під різні операційні системи і поширюються за привабливими ліцензійними угодами (наприклад, за дозвільними або пермісивними, безкоштовними чи іншими ліцензіями на вільне та відкрите програмне забезпечення). Також останнім часом створено багато хмарних сервісів, які пропонують комп'ютерним користувачам можливість використання досить функціонального інструментарію відповідного призначення (у тому числі безплатно).

Для того щоб викладач, який працює в ІКТ-насиченому освітньому середовищі сучасної школи (загальноосвітньої середньої, професійно-технічної чи вищої), був конкурентоспроможним, він повинен бути здатним успішно забезпечувати освітній процес. А для цього йому потрібні прогресивні інструментальні засоби, у тому числі корисні для його роботи різноманітні сучасні комп'ютерні програмні середовища, якими він повинен уміло володіти і вміти доцільно використовувати як впродовж підготовки до занять, так і під час їх проведення.

УДК 372.853.53

Р. І. Сочинський,

А. М. Кух, канд. пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПРОЕКТ ІНТЕРАКТИВНОГО КОНСТРУКТОРА УРОКІВ

Впровадження в практику роботи школи технологій діяльнісного підходу тривалий і трудомісткий процес, який супроводжується колом проблем, пов'язаних з організацією навчальної діяльності, спрямованої на самоосвіту і саморозвиток кожного учня.

Використання будь-якої технології обмежено або особливостями навчального предмета, або матеріально-технічними проблемами, або неготовністю вчителя змінити роль ведучого, керуючого на роль менеджера, партнера в освітньому процесі. Досвід апробацій та впровадження технологій компетентнісно-орієнтованого підходу показав, що перші кроки вчитель-експериментатор починає з організації уроку в контексті тієї чи іншої технології.

Перехід до нових технологій вимагає від учителя не тільки знання і розуміння основних принципів системно-діяльнісного підходу в освіті, а й активних дій щодо його впровадження в навчальний процес. Так з'явилася ідея розробити конструктор сучасного уроку, який дозволив би будь-якому вчителю вибудувати структуру навчального заняття в контексті діяльнісного підходу.

Пропонований проект конструктора містить наступні розділи:

- Системно-діяльнісний підхід – опис вимог, що пред'являються до сучасного уроку в контексті системно-діяльнісного підходу.
- Таблиця-конструктор – опис основних етапів-модулів уроку і набір педагогічних прийомів і технік, які дозволять організувати навчальну діяльність учнів.
- Ситуаційна задача – опис ідеї використовувати ситуаційні завдання з додатком конструктора Л.С. Іллюшина і прикладами ситуаційних завдань.
- Винахідницька задача – опис ідеї використовувати винахідницькі завдання з докладним алгоритмом рішення і прикладами використання на уроці.
- Метод інтелект-карт – опис ідеї використання інтелект-карти на уроці з додатками додаткових матеріалів, а так само практичної роботи.
- Прийоми і техніки – опис всіх перерахованих в таблиці прийомів з посиланнями на приклади використання.
- Практика – розділ, який містить розробки уроків із застосуванням конструктора, приклади навчальних завдань.
- Корисні посилання – вказані посилання на Інтернет-ресурси, які можна використовувати для розробки уроків.

Продана збірка допоможе вчителю спроектувати будь-який урок відповідно до концепції системно-діяльнісного підходу і вимог стандартів.

Педагогічні прийоми технології розв'язання винахідницьких завдань (ТРВЗ) і стратегії технології розвитку критичного мислення (ТРКМ) допомагають активізувати мисленнєву діяльність на різних етапах уроку.

Конструктор ситуаційних завдань допомагає будь-яке питання і завдання в підручнику перевести в розряд проблемної або навчального завдання.

Метод інтелект-карт може бути розглянуто як спосіб організації контролю знань або як спосіб систематизації вивченого матеріалу на уроці.

Представлена таблиця педагогічних прийомів і технік динамічна, тобто може наповнюватися кожним педагогом своїми авторськими при-

йомами або авторськими підходами до організації навчальної діяльності дітей на різних етапах і типах уроків.

Таким чином, інтерактивний конструктор уроків може бути цікавий як молодим учителям, які розпочинають свою практику в школі, так і вчителям зі стажем. Особливо корисний цей матеріал тим, хто ще не готовий здійснити апробацію або впровадження технології системно-діяльнісного підходу в освітній процес, а організувати навчальну діяльність необхідно.

Список використаних джерел:

1. Електронний конструктор уроків. – Режим доступу: <http://osnova.com.ua/news/78>
2. Схема для конструювання уроків різних типів. – Режим доступу: <http://matematika.moy.su/load/konstr/3>

УДК 519.237(045)

М. А. Стадник

Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя, м. Тернопіль

ОЦІНЮВАННЯ ІНФОРМАТИВНИХ ПАРАМЕТРІВ УСТАЛЕНИХ ЗОРОВИХ ВИКЛИКАНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Для дослідження діяльності зорової системи людини в комплексі використовують сучасний метод зорових викликаних потенціалів (ЗВП), які є електричними відповідями зорових відділів мозку на стимули. В залежності від частоти стимуляції їх поділяють на фазові (1-4 Гц) та усталені (5-30 Гц).

Якість будь-якої діагностичної системи в основній мірі залежить від правильно обраних інформативних параметрів, на базі яких виконується діагностика. Найпоширенішою в офтальмології є методика вимірювання та аналізу амплітудно-часових характеристик екстремумів отриманих реалізацій ЗВП, що є достатньо суб'єктивним методом. Тому, виникає задача оцінки інформативних параметрів, які би забезпечили діагностику із найменшою похибкою і максимальною завадостійкістю.

У статті [1] математична модель усталеного ЗВП (уЗВП) – лінійний періодичний випадковий процес (ЛПВП) $\xi(t), t \in (-\infty; \infty)$ і зображується у наступному вигляді:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) d\pi_1(\tau), t \in (-\infty, \infty) \quad (1)$$

де $\pi_1(\tau), \tau \in (-\infty, \infty), P\{\pi_1(0) = 0\} = 1$ – узагальнений неоднорідний пуассонівський процес; $\varphi(\tau, t)$ – ядро ЛВП $\varphi(\tau, t) = 0$ при $t < \tau$ і $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(\tau, t) d\tau < \infty, \forall t$, а також $\varphi(\tau, t) = \varphi(\tau + T, t + T)$, де $T > 0$ – період процесу (1).

Моментні функції ЛПВП (1) є також є періодичними за сукупністю аргументів. Зокрема, для математичного сподівання $M\xi(t)$ та кореляційної функції $R(t_1, t_2)$ такого процесу виконуються наступні співвідношення [2]: $M\xi(t) = M\xi(t + T)$, $R(t_1, t_2) = R(t_1 + T, t_2 + T)$.

Для оцінювання математичного сподівання використовувався відомий метод x_k -серій [3]. x_k -серії є сукупністю впорядкованих за часом відліків процесу $\xi(t)$, взятих через період T представляють собою стаціонарні та стаціонарно зв'язані випадкові послідовності.

Метод ортогонального розкладу T -періодичного сигналу за певним заданим базисом застосовується для знаходження інформативних параметрів. Коефіцієнти розкладу, що формують спектр досліджуваного сигналу і вносять у повну енергію сигналу більший вклад, використовуватимуться в якості інформативних параметрів.

З метою отримання діагностичних параметрів було опрацьовано реалізації уЗВП із частотами стимуляції 7, 10, 12 Гц. Для дослідження використовувався інформаційно-вимірвальний комплекс DX-NT-32 (м. Харків, Україна). Електроди накладалися згідно міжнародної системи 10-20. Протокол дослідження виконувався згідно стандарту із залученням 20 людей (8 чоловіків, 12 жінок) віком від 18-23 років.

На основі отриманих реалізацій уЗВП з різними частотами стимуляції виконувалась оцінка коефіцієнтів розкладу по ортогональним функціям дискретного аргументу Чебишева, Кравчука, Лагера. Таблиця 1 відображає необхідну кількість складових ортогонального розкладу для відновлення 99% енергії сигналу.

Таблиця 1

Кількість складових ортогонального розкладу для відновлення 99% енергії сигналу уЗВП із різною частотою стимуляції

| Ортогональні функції дискретного аргументу | Частота стимуляції при реєстрації уЗВП, Гц | | |
|--|--|----|----|
| | 7 | 10 | 12 |
| Чебишева | 9 | 7 | 7 |
| Кравчука | 27 | 20 | 21 |
| Лагера | 17 | 17 | 18 |

Результати, що є наведеними у таб.1 демонструють доцільність використання методу ортогонального розкладу за функціями Чебишева в якості інформативних параметрів для подальшої діагностики зорової системи людини із використанням уЗВП.

Список використаних джерел:

1. Fryz M. Justification of mathematical model of the steady-state visual evoked potential in a form of the linear random process / M. Fryz, M. Stadnyk. – К. : Electronics and control systems, 2013. – №1(35). – P. 100-106.
2. Марченко Б.Г. Побудова моделі та аналіз стохастично періодичних навантажень енергосистем / Б.Г. Марченко, М.В. Приймак // Праці інституту електродинаміки Національної академії наук України. – 1991. – Вип. 1. – С. 129-153.

3. Фриз М.С. Лінійний періодичний випадковий процес як математична модель усталеного зорового викликаного потенціалу / М.С. Фриз, М.А. Стадник. – К : Моделювання та інформаційні технології : зб. наук. пр. – 2014. – №72. – С. 36-43.

УДК 51-77

O. M. Stepanchenko, Candidate of Engineering,

P. M. Martyniuk, Doctor of Engineering

The National University of Water and Environmental Engineering, Rivne

MATHEMATICAL MODEL OF AN INFORMATION WAR

In the article [1] it has been proposed to describe the process of information distribution via social online networks in correspondence to the diffusion processes of chemical substances. In the next article [2] the following differential equation of the information distribution process was offered:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = d \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + f(I, x, t),$$

where $I(x, t)$ – the amount of the information spread (or the density of the users drawn, which is, according to the author just the same); $f = f(I, x, t)$ – the given information generation intensity; $J(x, t) = -d \frac{\partial I}{\partial x}$ – information stream; d – «diffusion coefficient», the content of which lies in the popularity of the information.

Still, in our opinion the authors of the already mentioned articles did not set a very important question – the aim of the information distribution among the users. As for the aim of such an influence we suggest «an informational destruction» of a social community. Social community – is a group of people, united by an idea and believes, and that can possess a certain physical location $\Omega_x \subset E^2$. The change in believes of a certain amount if individuals that opposes the common ones, and leads to an exclusion of those individuals from the society we suggest to call an informational destruction.

Let's add Ω_y – the area of individuals' believes, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \Omega_y$. Here y_i ($i = \overline{1, m}$) is an axis of addiction to certain belief, where $y_i \in [-1; 1]$, $y_i = -1$ – means absolutely negative, $y_i = 1$ – absolutely positive view. The cyberspace of the information distribution in the researched problem is $\Omega = (\Omega_x, \Omega_k, \Omega_y)$, where Ω_x , $(x, y) \in \Omega_x$, – the physical location of the community; Ω_k , $K = (k_1, k_2, \dots, k_l) \in \Omega_k$ – the space of the information channels (social media, television, etc) and is characterized by cyberdistances. Hence Ω consists of vectors $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. The information distribution can be described by the following equation:

$$\frac{\partial I(X,t)}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla I) + f(X,t),$$

where D – is the tensor of the information distribution coefficients, which consists of D_x , D_k , D_y – the tensors of the information distribution coefficients in the territorial dimension, in the informational channels, and in the believes area accordingly.

The modeling of an «information war», or an alteration in number of individuals in a certain believes area can be done in analogy to an inner mechanical suffusion accordingly to the diffusion model [3]. In this case we get:

$$\frac{\partial s(X,t)}{\partial t} = \nabla \cdot (D_s \nabla s) - u \nabla s + F(I, s, X, t),$$

where D_s – the tensor of the believes «diffusion» coefficients; $s(X,t)$ – the relative number of individuals in a certain point of cyberspace; u – the speed of the people's mindset alteration, that is influenced by the information circulation.

For example, in analogy to a the mechanical suffusion, $u = \alpha (\nabla I - G)_+$, where α – the affectivity of the informational influence coefficient; G – the critical gradient of the informational pressure, applied to an individual, φ_+ – function cut.

For the formation of a mathematical model, the abovementioned equations need to be completed by the initial and extreme conditions.

References:

1. Wang H. Modeling Information Diffusion in Online Social Networks with Partial Differential Equations [Internet resource] / H. Wang, F. Wang, K. Xu. – 2013. – Access to the resource: <http://arxiv.org/pdf/1310.0505.pdf>.
2. Characterizing Information Diffusion in Online Social Networks with Linear Diffusive Model [Internet resource] / [F. Wang, H. Wang, K. Xu etc]. – 2013. – Access to the resource: <http://www.public.asu.edu/~kxu01/papers/2013/ICDCS2013.pdf>.
3. Martyniuk P.M. Mathematical model of soils filtration consolidation taking into account multi-grade suffosion / P.M. Martynjuk, O.V. Goroshko // Kyiv University Visnyk for the Physico-Mathematical Science. – 2013. – №4. – P. 136-141.

УДК 519.718.2

Т. О. Стефанович, канд. техн. наук,

С. В. Щербовських, д-р. техн. наук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

АНАЛІЗ ПРИЧИН НЕПРАЦЕЗДАТНОСТІ НАСОСНОГО ВУЗЛА ІЗ ПОЛЕГШЕНИМ КОВЗНИМ РЕЗЕРВУВАННЯМ

На підприємствах харчової, хімічної та переробної промисловості використовують насосні вузли, призначені для перекачування робочого середовища. Для підвищення надійності насосних вузлів застосовують ковзне резервування. В цьому випадку група основних насосів резервується одним

чи декількома насосами, кожний з яких може замінити будь-який із насосів основної групи у випадку його відмови. У даній роботі розроблено математичну модель надійності насосного вузла із полегшеним ковзним резервуванням. Такий вузол складається із основної і резервної груп елементів (рис. 1).

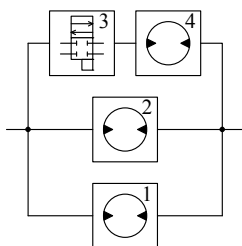


Рис. 1. Функціональна схема насосного вузла

До основної групи входять насоси 1 та 2, які з'єднані між собою паралельно. До резервної входять розподільник 3 та насос 4, які сполучені між собою послідовно. Подача усіх трьох насосів 1, 2 та 4 однакова. Насоси 1 і 2 перекачують робоче середовище, поділяючи сумарну подачу порівну, а розподільник 3 і насос 4 у цей час перебувають у резерві. У такому режимі навантаження насосів 1 і 2 номінальне, розподільника 3 полегшене, а насоса 4 відсутнє. Втрата працездатності системи може розвиватись двома шляхами. Перший шлях полягає у тому, що відбувається відмова одного із насосів основної групи, внаслідок якої розподільник вмикає резервний насос. У такому режимі навантаження працездатного насоса із основної групи, а також навантаження обох елементів резервної групи номінальне. Другий шлях полягає у тому, що відбувається відмова розподільника, яка унеможливає подальше вмикання резервного насоса. У такому режимі навантаження обох насосів із основної групи залишається номінальним, а резервного насоса – відсутнє. Якщо у першому чи другому випадку до завершення ремонтування непрацездатного елемента настає відмова ще одного елемента, то це викликає відмову усієї системи. Надійність насосного вузла математично описано динамічним деревом відмов (рис. 2), в якому задано логічні умови зміни навантаження елементів системи. У системі відбувається два процеси зміни навантаження гідравлічного розподільника та резервного насоса залежно від стану елементів основної групи.

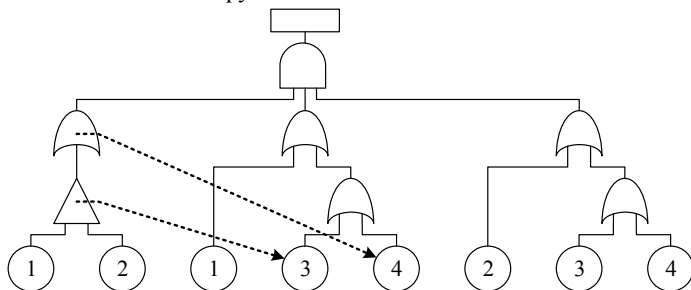


Рис. 2. Динамічне дерево відмов насосного вузла

Для опису цих процесів в структуру дерева введено блок, який є повторювачем логічного сигналу, і задано у ньому, а також у сусідньому блоці логічні умови зміни навантаження. Напрацювання до відмови усіх елементів насосного вузла розподілено за законом Вейбулла, а тривалість ремонтування – експоненціально.

На основі динамічного дерева відмов системи складено граф станів і переходів. Він містить дев'ять станів, із яких чотири відповідають працездатності, та чотирнадцять подій, із яких вісім спричиняють катастрофічну відмову. Для даної системи є п'ять незалежних причин непрацездатності, кожна із яких відповідає окремому непрацездатному стану. На основі тензорних виразів розщеплення простору станів, які подано у праці [1], граф станів і переходів перетворено у однорідну марковську модель, яка містить 144 диференціальних рівняння. На основі марковської моделі обчислено ймовірнісні характеристики причин непрацездатності системи. Побудовано сімейство кривих ймовірнісних характеристик для різних значень коефіцієнта навантаження розподільника для режиму очікування. Показано, що зі збільшенням коефіцієнта навантаження непрацездатність системи внаслідок відмови одного із насосів основної групи та розподільника із другорядної причини стає домінуючою.

Список використаних джерел:

1. Щербовських С.В. Математичні моделі та методи для визначення характеристик надійності багатотермінальних систем із урахуванням перерозподілу навантаження: монографія / С. В. Щербовських. – Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2012. – 296 с.

УДК 517.5

М. А. Сухорольський, д-р фіз.-мат. наук,
І. В. Андрусяк, канд. фіз.-мат. наук,
Л. І. Коляса, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

СИСТЕМИ СТЕПЕНІВ КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ТА СПРЯЖЕНІ ДО НИХ СИСТЕМИ ФУНКЦІЙ

Системи аналітичних функцій, біортогональні на замкнутих кривих у однозв'язних областях комплексної площини, задають базиси у просторах функцій, аналітичних у цих областях [1-4]. Розвинення аналітичних функцій у ряди за системами многочленів (Фабера, Бернуллі, Ейлера та інших) досліджено з використанням контурного інтегрування та конформних перетворень у роботах [1, 3-6].

Побудовано біортогональні системи функцій з використанням конформних відображень однозв'язних областей на круг. Досліджено умови розвинення аналітичних функцій у заданих областях за цими системами.

Нехай:

$$w = \varphi(z) \quad (1)$$

конформне відображення однозв'язної області D розширеної комплексної площини z на круг $K: |w| < 1$ комплексної площини w ; $\varphi(0) = 0$; $\lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z)/z = 1$; $z = h(w)$ – обернене відображення; границя $L = \partial D$ відображається на коло $C: |w| = 1$.

Введемо системи функцій

$$\left\{ g_n(z) = \varphi^n(z) \right\}_{n=0}^{\infty}, \left\{ g_n^*(z) = \frac{1}{n+1} \frac{d}{dz} \varphi^{n+1}(z) \right\}_{n=0}^{\infty}, \quad z \in D. \quad (2)$$

Функції $g_n(z)$ і $g_n^*(z)$ аналітичні в околі нульової точки, внаслідок аналітичності функції $\varphi(z)$ в D , і їх розвинення у ряди Маклорена не містять членів з від'ємними степенями змінної.

Доведена наступна теорема.

Теорема. Нехай $w = \varphi(z)$ – конформне відображення (1) і $|z| < l$ – найбільший круг, в якому збігається ряд Маклорена цієї функції і який лежить в області D . Тоді системи функцій (2) бази у просторі E_r , $0 < r < l$, функцій, аналітичних в крузі $|z| < r$.

Список використаних джерел:

1. Дзядык В.К. Введение в теорию приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М. : Наука, 1977. – 512 с.
2. Леонтьев А.Ф. Последовательности полиномов из экспонент / А.Ф. Леонтьев. – М. : Наука, 1980. – 384 с.
3. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций / А.И. Маркушевич. – М. : Наука, 1968. – Т. 2. – 624 с.
4. Смирнов В.И. Конструктивная теория функций комплексного переменного / В.И. Смирнов, Н.А. Лебедев. – М. : Наука, 1964. – 440 с.
5. Сухорольський М.А. Розвинення аналітичних функцій за системами поліномів типу Мелліна / М.А. Сухорольський // Вісник національного університету «Львівська політехніка». Серія фізико-математичні науки. – 2005. – №346. – С. 111-115.
6. Сухорольський М.А. Розвинення функцій за системою поліномів, біортогональних на замкненому контурі з системою регулярних у нескінченно віддаленій точці функцій // М.А. Сухорольський // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 62, №2. – С. 238-254.

М. А. Сухорольський, д-р. фіз.-мат. наук,

І. М. Зашкільняк, канд. фіз.-мат. наук,

О. Г. Орищин, канд. фіз.-мат. наук,

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ АКУСТИКИ

Розглянемо плоску задачу про поширення хвиль у безмежному акустичному середовищі за наявності в ньому абсолютно жорсткого циліндричного включення. Спочатку розглянемо задачу про поширення хвиль у середовищі, обмеженому круговим циліндром. Рівняння акустики [1, с.479] з використанням комплексних змінних $w = u + iv$, $\bar{w} = u - iv$ запишемо у вигляді

$$\partial_u^2 U = 4a^2 \partial_{\bar{w}\bar{w}}^2 U - p, \quad (w, t) \in K \times (0, \infty), \quad (1)$$

де $K: |w| < 1$; $U = U(w, \bar{w}, t)$; u, v, t – лінійні та часова координати; $p = p(w, \bar{w}, t)$ – інтенсивність джерел. Розв'язок рівняння в циліндрі $K \times (0, \infty)$ за умови $U|_{|w|=1} = 0$ і однорідних початкових умов можна подати [2] за системою функцій

$$\left\{ J_m \left(\lambda_{k(m)} w, \lambda_{k(m)} \bar{w} \right) \right\} \quad (m = 0, \pm 1, \dots, k = 1, 2, \dots),$$

де $J_{-m} \left(\lambda_{k(m)} w, \lambda_{k(m)} \bar{w} \right) = J_m \left(\lambda_{k(m)} \bar{w}, \lambda_{k(m)} w \right)$; $J_m(w, \bar{w}) = w^m |w|^{-m} J_m(|w|)$; $J_m(w, w) = J_m(w)$ – функції Бесселя 1-го роду; $\lambda_{k(m)}$ ($k = 1, 2, \dots$) – додатні корені рівняння $J_m(\lambda) = 0$. Введені величини є [1, с.392] власними числами і власними функціями такої граничної задачі: $4\partial_{\bar{w}\bar{w}}^2 U + \lambda^2 u = 0$, $U|_{|w|=1} = 0$. Отже, якщо

$$p = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_{m,k}(t) J_m \left(\lambda_{k(m)} w, \lambda_{k(m)} \bar{w} \right),$$

то узагальнений [1, с.492] розв'язок задачі знайдемо операційним методом,

$$U(w, \bar{w}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m \left(\lambda_{k(m)} w, \lambda_{k(m)} \bar{w} \right)}{a \lambda_{k(m)}} \int_0^t \sin a \lambda_{k(m)} (t - \tau) p_{m,k}(\tau) d\tau.$$

Тепер розглянемо задачу про поширення хвиль у безмежному середовищі за наявності циліндричного включення. Вважаємо, що напрямна циліндра – замкнена жорданова лінія L , наприклад, еліпс з осями $2a = 1 + c$, $2b = 1 - c$, $0 \leq c < 1$. Нехай $w = \varphi(z)$ – конформне відображення області \bar{D}

(зовнішності еліпса, якщо $w = z + \sqrt{z^2 - c}$) на круг \bar{K} і $z = h(w)$ - обернене відображення. Крива $L = \partial D$ відображається на коло ∂K . Перейдемо в рівнянні (1) до нових змінних $z = h(w)$, $\bar{z} = \overline{h(w)}$, одержимо рівняння

$$\partial_{\bar{z}}^2 U = 4a^2 |\varphi'(z)|^{-2} \partial_{\bar{z}}^2 U - p, \quad (z, t) \in D \times (0, \infty), \quad (2)$$

а з відповідних крайових умов такі умови:

$$U_{z \in L} = 0, \quad t \geq 0; \quad U|_{t=0} = 0, \quad \partial_t^1 U|_{t=0} = 0, \quad z \in \bar{D}. \quad (3)$$

Система власних функцій відповідної задачі $|\varphi'(z)|^{-2} \partial_{\bar{z}}^2 u + \lambda^2 u = 0$, $u|_{z \in L} = 0$ має вигляд $\left\{ \Phi_{m,k(m)}(z, \bar{z}) = J_m \left(\lambda_{k(m)} \varphi(z), \lambda_{k(m)} \overline{\varphi(z)} \right) \right\}$ і вона ортогональна по області.

Вважаємо, що функція $p(z, \bar{z}, t)$ зображується збіжним рядом

$$p(z, \bar{z}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_{m,k}(t) \Phi_{m,k(m)}(z, \bar{z}),$$

$$\text{де } p_{m,k}(t) = \left\| \Phi_{m,k(m)} \right\|^{-2} \iint_D p(z, \bar{z}, t) \Phi_{m,k(m)}(\bar{z}, z) |\varphi'(z)|^2 dx dy.$$

Тоді узагальнений розв'язок задачі (2), (3) одержимо у вигляді

$$p(z, \bar{z}, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_{m,k(m)}(z, \bar{z})}{a \lambda_{k(m)}} \int_0^t \sin a \lambda_{k(m)}(t - \tau) p_{m,k}(\tau) d\tau.$$

Наявність ненульових початкових умов не створює принципових труднощів для розв'язання задачі.

Список використаних джерел:

1. Владимиров И.С. Уравнения математической физики / И.С. Владимиров. – М. : Наука, 1981. – 512 с.
2. Сухорольський М.А., Достойна В.В. Системи розв'язків рівняння Гельмгольца у комплексній області / М.А. Сухорольський, В.В. Достойна // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2015. – Вип. 13. – С. 122-126.

УДК 378.147.146

В. П. Татауров

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

SMART СИСТЕМИ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

Класична форма навчання в вузах, яка передбачає особисте спілкування студентів з викладачем на лекціях і семінарах, де педагог є єдиним ініціативно-дійовою особою навчального процесу, не відповідає потре-

бам і запитам сучасного суспільства. Використання класичних методик подачі навчального матеріалу має свої недоліки незважаючи на те що, лектор має високий рівень компетентності. Лекція не дозволяє враховувати різний рівень знань і навиків студентів, швидкість подачі матеріалу визначається для всієї групи в цілому. Ефективність навчання при такому підході спирається на цілий ряд факторів: компетентність викладача, його вміння викликати інтерес до досліджуваного матеріалу, здатність чітко і ясно викласти тему та інші.

В останнє десятиліття широке поширення набула дистанційна форма навчання. Дистанційна форма заснована на проведенні навчання та викладання за допомогою специфічних засобів інтернет-технологій або іншими засобами, що передбачають інтерактивність.

Першим і головним мінусом дистанційного навчання є відсутність особистого спілкування студента з викладачами і з іншими студентами. Недоступність людини, яка змогла бемоційно забарвити знання, є значним недоліком для цього процесу навчання.

Smart education є концепцією, яка передбачає комплексну модернізацію всіх освітніх процесів, а також методів і технологій, що використовуються в цих процесах. Концепція Smart в освітньому розрізі тягне за собою появу таких технологій, як розумна дошка, розумні екрани, доступ в Інтернет з будь-якої точки. Кожна з цих технологій дозволяє по-новому побудувати процес розробки контенту, його доставки і актуалізації. Навчання стає можливим не тільки в класі, але і вдома і в будь-якому місці: громадських місцях. Основним же елементом, що зв'язує освітній процес, стає активний освітній контент, на базі якого створюються єдині репозиторії, що дозволяють зняти часові та просторові рамки.

Концепція SMART в освіті виникла слідом за проникненням в наше життя різноманітних розумних пристроїв, що полегшують процес професійної діяльності та особистому житті (смартфон, розумний будинок, смарткар – інтелектуальний автомобіль, смартборди – інтерактивна інтелектуальна електронна дошка, SMART-система самодіагностики жорсткого диска комп'ютера). SMART має на увазі підвищення рівня інтелектуальності пристроїв, які формують навколишнє середовище для того чи іншого виду діяльності. Перенесення даної концепції на освіту знаходиться в початковій стадії, терміни і основні поняття проходять процес формування. Розуміння SMART стосовно сфери освіти коливається від використання смартфонів і інших аналогічних пристроїв для доставки знань учням до формування інтегрованої інтелектуальної віртуального середовища навчання, в тому числі з використанням пристроїв категорії SMART.

Стало нормою проведення навчальних занять з використанням мультимедійних презентацій, зроблених в таких програмних пакетах, як Microsoft PowerPoint або Macromedia Flash. Однак, поряд зі звичними презентаційними технологіями, в сферу освіти проникають нові, так звані, інтерактивні технології, які дозволяють уникнути презентації у вигляді слайд-шоу.

Нова форма подачі матеріалу за допомогою інтерактивного устаткування (інтерактивні дошки, інтерактивні дисплеї) являє собою презента-

цію, створювану доповідачем під час свого виступу – презентацію, створювану тут і зараз. На інтерактивних дошках можна писати спеціальним маркером, демонструвати навчальний матеріал, робити письмові коментарі над зображенням на екрані. При цьому все написане на інтерактивній дошці передається учням, зберігається, роздруковується, надсилається електронною поштою відсутнім на занятті студентам. Навчальний матеріал, створений під час лекції на інтерактивній дошці, записується вбудованим відеорекордером і може бути багаторазово відтворений.

Під час роботи на інтерактивних дошках поліпшується концентрація уваги в учнів, швидше засвоюється навчальний матеріал, і в результаті підвищується успішність кожного з учнів.

Впровадження нових технологій в сферу освіти веде за собою перехід від старої схеми репродуктивної передачі знань до нової, креативної форми навчання. Одна з головних завдань сучасної освіти – це створення стійкої мотивації студентів до отримання знань, інша – пошук нових форм та інструментів освоєння цих знань за допомогою творчих рішень.

УДК 517.9

Ю. В. Теплінський*, д-р. фіз.-мат. наук,

Н. А. Марчук**, канд. фіз.-мат. наук

*Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,

**Подільський державний аграрно-технічний університет,
м. Кам'янець-Подільський

ПРО ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Добре відомо, що різницеві рівняння мають широке застосування у технічних науках, у вивченні дискретних динамічних та імпульсних систем, систем, що містять цифрові обчислювальні пристрої, у чисельному розв'язуванні диференціальних рівнянь тощо.

Тут нами обговорюється питання існування та побудови періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь другого порядку в абстрактному банаховому просторі.

Розглянемо рівняння

$$\Delta^2 x_n = f_n(x_n, x_{n+1}), \quad (1)$$

де Z – множина цілих чисел, W – банахів простір, $x_n \in W$, $f_n(x, y): W \times W \rightarrow W \forall n \in Z, W \times W$ – декартів добуток, функція $f_n(x, y)$ періодична відносно Z на множині з періодом N (N -періодична), N – натуральне число, $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$.

Наступні умови назовемо умовами **(V)**:

- а) функція $f_n(x, y)$ визначена в області $D_2 = Z \times D \times D$, де $D = \{x \in W \mid \|x\| \leq R\}$ причому в цій області $\|f_n(x, y)\| \leq M$ та $\|f_n(x, y) - f_n(\bar{x}, \bar{y})\| \leq K_1 \|x - \bar{x}\| + K_2 \|y - \bar{y}\|$, де M, R, K_1, K_2 – додатні сталі, що не залежать від $n \in Z$ та $\{x, \bar{x}, y, \bar{y}\} \subset D$;
- б) $\bar{D}^f = \left\{ x \in D \mid \|x\| \leq R - \frac{(N^2 M)}{4} \right\} \neq \emptyset$ та $\gamma = \frac{N^2}{4} (K_1 + K_2) < 1$.

Теорема 1. Нехай виконуються умови (V) і $x_0 \in \bar{D}^f$. Для того, щоб рівняння (1) мало N -періодичний розв'язок $x_n = x(n, x_0, x_1)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність $f_v(\bar{x}_v(x_0), \bar{x}_{v+1}(x_0)) = 0 \in W$. Якщо вказаний розв'язок $x(n, x_0, x_1) \in N$ -періодичним і $x_1 \neq x_1^*$, то розв'язок $x_n^* = x(n, x_0, x_1^*)$ цього рівняння не може бути N -періодичним.

Теорема 2. Нехай виконуються умови (V) та, окрім того:

- 1) $\forall n \in Z_n$ функція $f_n(x, y)$ диференційовна за Фреше, причому $\forall \{x, y, x_1, y_1\} \subset D_\rho = \{x \in W \mid \|x\| < R + \rho\}$

$$\left\| \frac{df_n(x, y)}{d(x, y)} \right\| \leq P, \left\| \frac{df_n(x, y)}{d(x, y)} \right\|_{(x, y)}^{(x, y)} \leq L_0 \max \{ \|x - x_1\|, \|y - y_1\| \}$$

де P і L_0 – додатні сталі, $N^2 P < 4$;

- 2) існує точка $x^0 \in D^f = \{x \in D \mid \|x\| \leq R - \frac{N^2 M}{4}\}$, в якій

$$\left\| \frac{dD(x^0)}{dx^0} - E \right\| \leq l_0 = \text{const} < 1 \text{ де } E - \text{тотожний оператор};$$

Тоді при деяких додаткових стандартних для застосування методу Ньютон-Канторовича умовах існує така замкнена куля з центром в точці x^0 , що містить єдину точку x^* , породжуючу N -періодичний розв'язок $\bar{x}_n(x^*), \bar{x}_0(x^*) = x^*$ рівняння (1).

При цьому збіжну до x^* послідовність $\{x_p\}_{p=1}^\infty$ визначено рекурентним співвідношенням

$$x_0 = x^0, x_{p+1} = x_p - \left[\frac{d\Delta(x^0)}{dx^0} \right]^{-1} \Delta(x_p), p \in Z^+.$$

Окремо розглянуто випадок, коли банахів простір співпадає з простором m обмежених числових послідовностей. Розглянуто рівняння виду (1), в якому

$$x_n = (x_n^1, x_n^2, x_n^3, \dots) \in m,$$
$$f_n(x, y) = \left\{ f_n^{(1)}(x, y), f_n^{(2)}(x, y), f_n^{(3)}(x, y), \dots \right\} : m \times m \rightarrow m$$

при всіх $n \in \mathbb{Z}$.

Зауважимо, що проведені міркування стосуються побудови періодичних розв'язків розглянутих вище рівнянь на множині Z_0^+ , однак за періодичністю ці розв'язки легко можна розповсюдити і на множину від'ємних цілих чисел $Z^- = \mathbb{Z} \setminus Z_0^+$.

У проведених дослідженнях використано ідеї чисельно-аналітичного методу А.М. Самойленка відшукування періодичних розв'язків диференціальних рівнянь, методу Ньютона-Канторовича розв'язування операторних рівнянь та методу укорочення злічених систем диференціальних рівнянь К.П. Персидського.

УДК 519.816

Н. К. Тимофієва, д-р. техн. наук

Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем НАН та МОН України, м. Київ

ЗАДАЧА РОЗМІЩЕННЯ МОДУЛІВ НА ПОВЕРХНІ ТА ВЛАСТИВІСТЬ СИМЕТРІЇ

Вступ. В задачі розміщення модулів можна спостерігати явище, коли для послідовності значень цільової функції, які змінюються від максимуму до мінімуму, існує симетрична послідовність розв'язків, значення яких змінюються від мінімуму до максимуму. Така властивість пов'язана з тим, що множині комбінаторних конфігурацій, які є аргументом цільової функції, характерна симетрія.

Основна частина. В комбінаториці розглядають симетрії розбиття n -елементної множини на підмножини та групи симетрії на перестановках. В комбінаторній оптимізації ця властивість проявляється завдяки симетрії комбінаторних множин, які є аргументом цільової функції. Але закономірність зміни значень цільової функції в залежності від симетрії комбінаторних множин в літературі не аналізується.

Для множини перестановок із усіх видів симетрії виділимо ту, яка описується законами евклідової геометрії. В цьому разі вважатимемо, що перестановка симетрична, якщо вона збігається сама із собою при русі без деформацій. Існує єдиний спосіб перемістити симетричну послідовність так, щоб вона збіглася з початковою. Це – її поворот на 180^0 . Уведемо таке означення.

Означення. Інверсією перестановки $w = (1, 2, \dots, n-1, n)$ назвемо перестановку $\tilde{w} = (n, n-1, \dots, 2, 1)$, тобто $w \in W$ та $\tilde{w} \in W$ симетричні одна відносно другої, де W – множина перестановок.

Нижче розглянемо найпростішу задачу із класу розміщення – задачу розміщення одногабаритних модулів. Вона формулюється так. Множину одногабаритних модулів необхідно розмістити в задані установочні позиції таким чином, щоб змодельована за заданими критеріями цільова функція набувала оптимального значення, а віддалі між модулями дорівнювала певній величині. Аргументом цільової функції в ній є перестановка. Змодельуємо вхідні дані, які задано матрицями, функціями натурального аргументу $\varphi(j)|_1^m$ та $f(j)|_1^m$, одна з яких комбінаторна $\beta(f(j), w)|_1^m$, де m – кількість елементів заданої матриці (для симетричної матриці m – кількість наддіагональних елементів). Наведемо таку теорему.

Теорема. Якщо $\beta_j(f(j), w) \in R$, $\varphi(j) \in R$, а цільова функція для $w^* \in W$ набуває найбільшого значення, то найменше її значення для перестановки $w^{**} \in W'$ дорівнює $F_{\min}(w^{**}) = F_{\max}(w^*) - \sum_{l=1}^{\zeta} \varepsilon_l(w^*) \varepsilon_l$.

Якщо $\beta_j(f(j), w) \in R$, $\varphi(j) \in R$, а цільова функція для $w^{**} \in W$ набуває найменшого значення, то найбільше її значення для перестановки $w^* \in W$ дорівнює $F_{\max}(w^*) = F_{\min}(w^{**}) + \sum_{l=1}^{\zeta} \varepsilon_l(w^*) \varepsilon_l'$, де $\zeta = \lfloor m/2 \rfloor$, R – множина дійсних чисел. $\varepsilon_l(w^*) = \left| \beta_t(f(t), w^*) - \beta_s(f(s), w^*) \right|$, $\beta_t(f(t), w^*)$, $\beta_s(f(s), w^*)$ – значення, які операцією транспозиції помінялися місцями в $\beta(f(j), w^*)|_1^m$; $\varepsilon_l' = \left| \varphi(t) - \varphi(s) \right|$, $\varphi(t)$, $\varphi(s)$ – значення, які перемножуються на $\beta_t(f(t), w^*)$, $\beta_s(f(s), w^*)$ функції $\beta(f(j), w^*)|_1^m$.

Висновок. Аналіз зміни значень цільової функції в залежності від транспозиції перестановок (відповідно значень комбінаторних функцій) показує, що послідовність розв'язків для задачі розміщення одногабаритних модулів від більшого до меншого $(F_{\max}(w^*), F(w'), \dots, F(w''), F_{\min}(w^{**}))$, $F(w') \geq F(w'')$, має свою симетрію $(F_{\min}(w^{**}), F(w''), \dots, F(w'), F(w^*))$, яка утворена однією і тією ж кількістю транспозицій однакових значень комбінаторної функції $\beta(f(j), w^*)|_1^m$. Отримані результати можна використовувати для аналізу зміни значень цільової функції в залежності від симетрії комбінаторних конфігурацій в задачах комбінаторної оптимізації різних класів.

О ПРИМЕНЕНИИ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ В СИСТЕМАХ РЕГУЛИРОВАНИЯ УРОВНЯ ЗАПАСОВ

Регулирование уровня запасов в сложных технологических комплексах зачастую определяет динамику их структуры (при этом состояние определяется уровнем запасов), а неопределенность данных (запросы, поступления, стоимость, наличие средств производства) делает структуру стохастической. Оптимальное управление такой системой требует разработки стратегии использования запасов, позволяющей минимизировать математическое ожидание стоимости (или максимизировать математическое ожидание выигрыша) на некоторой совокупности стратегий. Таким образом, речь идет о том, чтобы знать, в какой пропорции надо использовать запасы для удовлетворения запросов и в какой степени желательнее консервировать эти запасы для последующего времени.

Классическое решение для оптимизации выбора стратегии по сепарабельному критерию (т.е., когда стратегия пошагово реализуется во времени и может изменяться) основывается, как правило, на динамическом программировании. В частности, сепарабельным является критерий, основанный на оценивании математического ожидания. Однако, в большинстве случаев оптимизация математического ожидания является чересчур рискованной для принятия надежных решений. Таким образом, целесообразно выбрать критерий оптимизации, отличный от математического ожидания и обеспечивающий робастные решения. При этом необходимо обеспечить возможность выбора оптимальной стратегии с применением такого критерия, даже если он не совместим с классической техникой динамического программирования. К классическим статистическим характеристикам случайной переменной величины C , представляющим интерес для рассматриваемой задачи, кроме математического ожидания $E(C)$ и дисперсии $\text{var}(C) = E(C - E(C))^2$ следует отнести получившие распространение в системах управления рисками характеристики Risk-At-Value (RAV) и Value-At-Risk (VAR). RAV означает (для некоторого порога затрат C') вероятность того, что $C \geq C'$, а VAR для заданного порога риска соответствует минимальному C' , для которого $P(C > C') \leq r$. Представления типа RAV и VAR являются наиболее полными в смысле отображения всего распределения затрат. Стохастическое динамическое программирование является принципом классической декомпозиции для динамической оптимизации. Оно используется для оптимизации по всем сепарабельным критериям. В частности, одним из таких критериев является математическое ожидание. Однако, если принимать во внимание оценки риска VAR , то возникает

проблема несепарабельности, при которой нельзя применить стандартное стохастическое динамическое программирование. Предлагаемый в докладе подход посвящен рассмотрению возможности применения в системах управления запасами техники обучения с подкреплением, совместимой с несепарабельным критерием. Обучение с подкреплением позволяет определить стратегию, оптимизирующую компромисс «математическое ожидание/риск» несепарабельного типа $(1 - \alpha)E + \alpha VaR$. Предложенный комбинированный метод использует положительные свойства алгоритмов машинного обучения с подкреплением и динамической оптимизации Беллмана, что позволяет эффективно описывать динамику развития исследования стохастического процесса с учетом возможного риска и существующих ограничений.

Сравнивая методы обучения с подкреплением с методами классического динамического программирования, можно отметить следующее:

- обучение с подкреплением позволяет естественным способом учитывать более совершенные характеристики распределения стоимости, чем сепарабельные критерии (в частности, матожидание, взвешенное риском, а не просто матожидание). Это является принципиальным моментом для рассматриваемой задачи, так как здесь используются симуляции для представления распределения будущих стоимостей, отличные от средних будущих стоимостей;
- методы с подкреплением более приспособлены для работы с недискретизированными данными или с большим числом переменных состояния, когда они связаны с методами экстраполяции.

Следует отметить возможность практической реализации предложенного подхода в интеллектуальных системах принятия решений с учетом возможных рисков. Перспективным представляется развитие предложенного подхода для фиксированных уровней риска и высокого уровня неконтролируемых возмущений.

УДК 665.6/.7

Д. О. Усманов

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ХЛОРАТОРА В ПРОЦЕСІ БЕЗПЕРЕРВНОГО ХЛОРУВАННЯ БЕНЗОЛУ

Виробництво кам'яновугільних барвників, штучних дубителів, пластмас, запашних речовин тощо, вимагають розчинників смол. В якості таких розчинників виступають хлоровані вуглеводні ароматичного ряду, зокрема хлорбензол. Хлорбензол – важливий напівпродукт в отриманні анлінових фарбників. Його отримують безперервним способом каталітичного хлорування бензолу. За якість хлорбензолу відповідає процес хлорування, який відбувається у хлораторі. Хлоратор – апарат для дозування хлору і приготування його водного розчину.

Задачею дослідження є розробка математичної моделі динамічного режиму апарату хлоратора у виробництві безперервного хлорування бензолу, яка враховує витрату та концентрацію вхідних та вихідних матеріалів.

Для визначення каналів моделювання було розроблено параметричну схему хлоратора. Визначним параметром обрано концентрацію хлорбензолу.

Розрахункову схема хлоратора наведено на рисунку 1.

Параметрична схема наведена на рисунку 2.

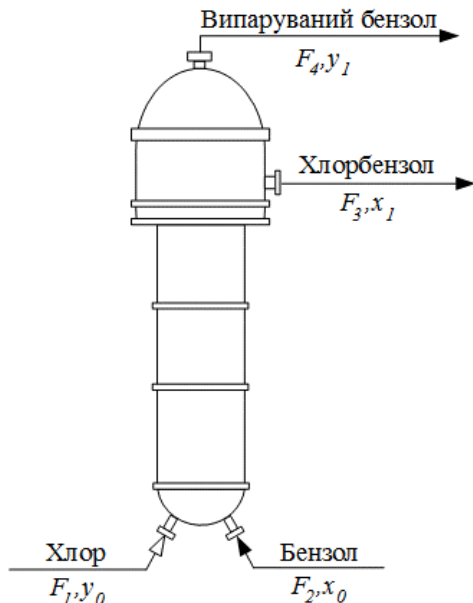


Рис. 1. Розрахункова схема хлоратора: F_1 – витрата хлору; F_2 – витрата бензолу; F_3 – витрата хлорбензолу; F_4 – витрата випаруваного бензолу з хлорбензолом; x_0 – концентрація бензолу; x_1 – концентрація хлорбензолу; y_0 – концентрація хлору; y_1 – концентрація випаруваного бензолу з хлорбензолом

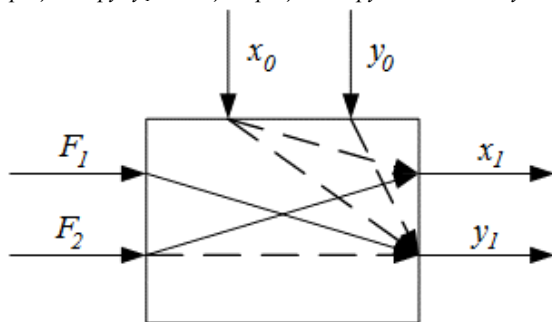


Рис. 2. Параметрична схема хлоратора

У нижню частину хлоратора прямою коком подається хлор з витратою F_1 та бензол, який попередньо азеотропно осушують в сталевих ректифікаційних колонах, з витратою F_2 та концентрацією у ньому $C_6H_6x_0$. Відбувається процес хлорування, в результаті якого утворюється хлорбензол з концентрацією у ньому $C_6H_6x_1$ та значна кількість надлишкового бензолу з концентрацією $C_6H_6y_1$, що залишається у апараті виводиться у газовому стані з верхньої частини хлоратора.

Основними акумулювальними ємностями, для яких складається рівняння балансів є хлор та бензол.

Розроблено матеріальні баланси для C_6H_6 у рідкому та газовому станах. У рідкій фазі матеріальний баланс виглядатиме:

$$F_2x_0 - F_3x_1 + SK_p \frac{(x_0 - x_r(y_1)) + (x_1 - x_r(y_0))}{2} = V_p \rho_p \frac{d}{dt} \left(\frac{x_0 + x_1}{2} \right), \quad (1)$$

де $x_r(y)$ – рівноважна концентрація C_6H_6 у хлорбензолі; K_p – коефіцієнт масообміну, поданий через мольні частки компонента у рідкій фазі; S – поверхня масообміну у хлораторі; V_p – об'єм хлоратора, зайнятий рідиною; ρ_p – густина розчину.

У газовій фазі матеріальний баланс виглядає:

$$-F_4y_1 - SK_g \frac{(y_r(x_1) - y_0) + (y_r(x_0) - y_1)}{2} = V_g \rho_g \frac{dy_1}{dt}, \quad (2)$$

де $y_r(x)$ – рівноважна концентрація C_6H_6 у випарованому бензолі з хлорбензолом; K_g – коефіцієнт масообміну, поданий через мольні частки компонента в газовій фазі; S – поверхня масообміну у хлораторі; V_g – об'єм хлоратора, зайнятий газом; ρ_g – густина суміші.

Список використаних джерел:

1. Юкельсон И.И. Технология основного органического синтеза [Текст] : учеб. пособие / И.И. Юкельсон ; под ред. Н.И. Урвалова. – М. : Химия, 1968. – 848 с.

УДК 681.5.04: 663.51

О. Ю. Федоренко

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ПАРАМЕТРИЧНА СХЕМА РЕКТИФІКАЦІЙНОЇ КОЛОНИ ПРОЦЕСУ ВИРОБНИЦТВА ЕТИЛОВОГО СПИРТУ

Процес виробництва етилового спирту буде оптимальним, якщо підібрати відповідні системи керування. Як відомо, у сучасному світі звикли працювати з математичними моделями процесів. Першим кроком до створення такої моделі є складання параметричної схеми об'єкту керування. Така схема була побудована для ректифікаційної колони, дистилят якої є товарним продуктом процесу, і зображена на рис. 1.

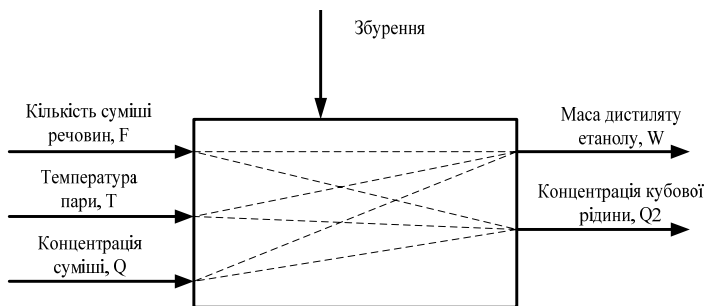


Рис. 1. Структурно-параметрична схема ректифікаційної колони

На вхід колони подається парогазова суміш води і спирту. На виході маємо етилен (вимірюємо його масу, W) та кубову рідину (вимірюємо концентрацію, Q_2). Збурення являє собою температура навколишнього середовища.

У подальшому на основі розробленої структурно-параметричної схеми потрібно створити математичну модель процесу.

Список використаних джерел:

1. Юкельсон И.И. Технология основного органического синтеза [Текст] : учеб. пособие / И.И. Юкельсон ; под ред. Н.И. Урывалова. – М. : Химия, 1968. – 848 с.

УДК 004.942:519.876.5

В. А. Федорчук, д-р техн. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ РОЗПОДІЛЕНИХ ЛАНОК ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Розв'язування задач проектування, керування, контролю чи діагностики складних електромеханічних систем на сучасному етапі розвитку комп'ютерних технологій нерозривно пов'язане з використанням методів математичного та комп'ютерного моделювання. Для систем, які складаються з неоднорідних елементів, значні труднощі виникають при моделюванні розподілених ланок, які володіють ще і нелінійними залежностями [1]. Створення адекватних математичних моделей складних електромеханічних систем з урахуванням нелінійних властивостей та розподіленості параметрів окремих ланок, а також вимог щодо ефективної комп'ютерної реалізації отриманих моделей є на сьогоднішній час далеко невирішеною і актуальною задачею.

При комп'ютерному моделюванні розподілених об'єктів, математичні моделі яких, зазвичай, подаються у вигляді диференціальних рівнянь

в частинних похідних, виникає необхідність зведення їх до такого виду, який дає змогу використовувати у програмних засобах моделювання стандартні операційні блоки.

Розглянемо математичний опис об'єкта з розподіленими параметрами у вигляді диференціального рівняння в частинних похідних

$$a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + d(x,t)u = f(x,t) \quad (1)$$

з граничними умовами

$$\begin{cases} u(x_0, t) = \varphi_0(t); & u(x_0 + l, t) = \varphi_l(t); & (t_0 \leq t \leq T), \\ u(x, t_0) = \psi_0(x); & u(x, T) = \psi_T(x); & (x_0 \leq x \leq x_0 + l), \end{cases} \quad (2)$$

де $\varphi_0(t)$, $\varphi_l(t)$, $\psi_0(x)$, $\psi_T(x)$ – задані функції.

Застосувавши метод прямих до рівнянь (1)-(2), отримаємо систему з n звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку та нехтуючи членами $O(h^2)$ і позначивши через $U_k(t)$ наближені значення розв'язку $u(t, x)$ на прямій $x = x_k$ для їх визначення, отримаємо систему рівнянь

$$a_k(t)\ddot{U}_k(t) - \frac{b_k(t)}{h^2}[U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)] + c_k(t)\dot{U}_k(t) + d_k(t)U_k(t) = f_k(t), \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Використовуючи граничні умови, маємо:

$$\left. \begin{aligned} U_0(t) &= \varphi_0(t), & (\alpha \leq t \leq T); \\ U_{n+1}(t) &= \varphi_l(t), & (\alpha \leq t \leq T); \\ U_k(t_0) &= \psi_0(x_k), & U_k(T) = \psi_T(x_k); & (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Отже, отримана модель у вигляді системи диференціальних рівнянь (3) з граничними умовами (4) апроксимує з точністю до $O(h^2)$ диференціальне рівняння (1) з граничними умовами (2). Слід відзначити, що за допомогою методу прямих, по суті, проводиться декомпозиція вихідної моделі на n структурних елементів, кожен з яких реалізує диференціальне рівняння другого порядку. Для числової реалізації отриманої апроксимаційної моделі використовується simuilink-модель, що зображена на рис. 1.

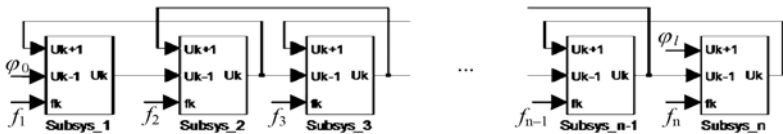


Рис. 1. Структурна реалізація апроксимаційної моделі (3)

Слід зауважити, що рівняння системи (3) описують поведінку дискретних елементів, на які розбивається неперервний розподілений об'єкт. Наприклад, для протяжного однорідного стержня, який зазнає деформації розтягу-стиску і описується моделлю (1) апроксимаційна модель (3), фактично, відображає систему n зосереджених мас, зв'язаних між собою пружними зв'язками. При цьому складові моделі (3) мають конкретний

фізичний зміст: перший доданок відображає силу інерції, другий – силу пружності, третій – силу опору руху і т. д. Тому в кожне із рівнянь можна вносити додатково і нелінійні залежності, які можна легко реалізувати у відповідній підсистемі приведеної вище simulink-моделі. Наприклад, якщо сила опору руху для k -того елемента залежить від квадрату його швидкості, то в simulink-моделі це відображається співвідношенням $f_k(t) = \mu(\dot{U}_k(t))^2$, де μ – деяка постійна величина. Отримана комп'ютерна модель володіє також унікальною властивістю оборотності, оскільки вона дозволяє здійснювати вхідні впливи та отримувати відгуки в будь-яких точках дискретизації лінійно протяжного об'єкта.

В доповіді розглядається застосування приведеної методики до моделювання нелінійних розподілених об'єктів на прикладі комп'ютерної моделі буринної колони бурової установки.

Список використаних джерел:

1. Верлань А.Ф. Моделі динаміки електромеханічних систем / А.Ф. Верлань, В.А. Федорчук. – К. : Наук. думка, 2013. – 222 с.

УДК 519.218

М. Є. Фриз, канд. техн. наук,
Б. Б. Млико, канд. техн. наук

Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя, м. Тернопіль

МЕТОДОЛОГІЯ ОПРАЦЮВАННЯ СИГНАЛІВ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ У ВИГЛЯДІ УМОВНОГО ЛІНІЙНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Розробка та впровадження інформаційних систем опрацювання стохастичних сигналів є актуальною проблемою при вирішенні завдань технічної та медичної діагностики, автоматизованого керування, комп'ютерного еколого-економічного моніторингу, аналізу та прогнозування економічних показників і ресурсоспоживання, обміну та захисту інформації, комп'ютерного імітаційного моделювання досліджуваних сигналів та ін.

Одним із найважливіших етапів у даному контексті є побудова адекватних математичних моделей інформативних сигналів та завод, які б відображали фізичні чи економічні механізми їх породження, були придатними для вирішення задач ідентифікації своїх характеристик та побудови на їх основі комп'ютерних імітаційних моделей.

У теоретичних та прикладних задачах математичного, комп'ютерного моделювання та опрацювання випадкових сигналів поширеними є лінійні моделі, зокрема лінійні випадкові процеси та послідовності. Дуже поширеними такі моделі є в тих прикладних областях, де досліджуваний сигнал

можна зобразити у вигляді суми великого числа незалежних імпульсів, які виникають у пуассонівські моменти часу. Однак, в багатьох задачах ці імпульси є випадковими і, в загальному випадку, стохастично залежними функціями. Такі сигнали можна вивчати з використанням математичних моделей у вигляді умовних лінійних випадкових процесів [1, 2].

У роботі [2] означено умовний лінійний випадковий процес (УЛВП) як стохастичний інтеграл від випадкової функції за процесом із незалежними приростами, отримано вирази для математичного сподівання та кореляційної функції означеного процесу, показано умови, за яких він буде стаціонарним, а також циклостаціонарним випадковим процесом. Для випадку процесу з незалежними приростами без гауссівської компоненти УЛВП (на відміну від лінійних процесів) дозволяє здійснювати математичне моделювання сигналів у вигляді суми стохастично залежних випадкових імпульсів, що виникають у пуассонівські моменти часу.

При здійсненні математичного моделювання та опрацювання стохастичних сигналів на основі лінійних та умовних лінійних випадкових процесів, як правило, слід вирішити такі основні задачі:

- теоретичне обґрунтування математичної моделі досліджуваного сигналу на основі аналізу апріорних даних про фізичну (можливо, економічну чи ін.) природу об'єкта, який його генерує чи породжує;
- теоретичний аналіз математичної моделі, зокрема, таких її ймовірнісних характеристик як характеристична функція, моментні та кумулянтні функції, спектральні характеристики; на даному етапі можна обґрунтувати, зокрема, умови, за яких побудована модель буде належати до класу стаціонарних чи циклостаціонарних випадкових процесів, що важливо для подальшого вибору методів її експериментального аналізу;
- обґрунтування методів та алгоритмів статистичного опрацювання сигналу, для чого часто ще необхідно побудувати модель досліджуваного сигналу з дискретним часом, а також обґрунтувати ергодичні властивості використовуваної моделі; на даному етапі можна також попередньо ідентифікувати комплекс інформативних ознак побудованої моделі;
- розробка інформаційної системи, планування та проведення експериментальних досліджень, експериментальне підтвердження адекватності моделі досліджуваному процесу та прикладній задачі, для вирішення якої вона розроблена;
- розробка та використання комп'ютерної імітаційної моделі досліджуваного сигналу.

У доповіді проаналізовано основні поняття та методи методології математичного моделювання та опрацювання стохастичних сигналів із використанням умовних лінійних випадкових процесів неперервного та дискретного аргументу. Зокрема, подано спосіб обґрунтування та теоретичного аналізу математичної моделі, виходячи з апріорних даних про фізичну природу породження досліджуваного сигналу, запропоновано підхід до його статистичного аналізу за результатами експериментів.

Список використаних джерел:

1. Pierre P.A. Central Limit Theorems for Conditionally Linear Random Processes / P.A. Pierre // *SIAM J. of Applied Math.* – 1971. – Vol. 20, №3. – P. 449-461.
2. Фриз М.Є. Властивості умовних лінійних процесів та їх застосування в прикладних задачах математичного моделювання стохастичних сигналів / М.Є. Фриз // *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць.* – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. – Вип. 6. – С. 228-238.

УДК 004.042:004.5:004.942:007.51

Ю. О. Фуртат

Інститут проблем моделювання в енергетиці
ім. Г.Є. Пухова НАН України, м. Київ

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПЕРСОНАЛІЗОВАНА АДАПТАЦІЯ ПРОЦЕСУ ІНФОРМАЦІЙНОЇ ВЗАЄМОДІЇ КОРИСТУВАЧА З АВТОМАТИЗОВАНИМИ СИСТЕМАМИ

Сучасні автоматизовані системи – це людино-машинні системи зі складною структурою, орієнтовані на виконання широкого спектру функцій. Це зумовлює певні особливості роботи з інформацією в таких системах, її зберігання та обробки. В зв'язку зі значним обсягом інформації, з якою оператори автоматизованих систем повинні взаємодіяти в процесі роботи, часто в умовах обмеженого часу на прийняття рішень, виникає інформаційне перенавантаження операторів, яке негативно позначається на якості їх роботи і на надійності автоматизованих систем. Для вирішення проблеми зниження ефективності інформаційної взаємодії користувача з системою розглядається можливість створення моделі процесу інформаційної взаємодії, алгоритмізації та реалізації процесу адаптації характеристик інформаційних потоків, які надходять від системи до оператора, до індивідуальних особливостей оператора та робочого процесу.

Для алгоритмізації і реалізації процесу адаптації інформаційної взаємодії користувача з системою пропонується ряд моделей. Процес адаптації реалізується як управління взаємопов'язаними параметрами моделей сутностей, що приймають участь у процесі інформаційної взаємодії.

Інформаційний потік I від системи може бути описаний як сукупність параметрів:

$$I = \langle T, F, C, D \rangle, \quad (1)$$

де T – темп подачі інформації, F – формат представлення даних, C – складність інформації, її пов'язаність з іншими блоками даних, D – дані, що передаються.

Темпом подачі інформації в автоматизованих системах можна керувати у некритичних ситуаціях, змінюючи інтенсивність подачі інформації

користувачу в залежності від допустимого рівня інформаційного навантаження. Бажаний для користувача темп визначається його здатністю швидко реагувати на дані від системи, а також поточним рівнем втоми і зібраності. Формат подачі інформації може бути текстовим, графічним, табличним, звуковим, комбінованим. В загальному випадку формат представлення даних визначається набором елементів виводу користувацького інтерфейсу, але за умови можливості зміни цього набору у відповідності по потреб і вимог користувача формат подачі можна також адаптувати до особливостей сприйняття користувачем інформації (його когнітивного портрету). Складність інформації – комплексна характеристика, яка враховує зв'язки між блоками даних в моделі предметної області, кількість задіяних в даному епізоді представлення даних зв'язків і блоків, а також перекриття їх моделлю знань користувача. Параметр D – фрагмент інформації, що передається користувачу в даному епізоді робочого процесу. Цей фрагмент може відповідати одному блоку даних предметної області, а також представляти собою сукупність блоків чи частину окремого блоку, в залежності від сценарію взаємодії користувача з системою.

Користувацький інтерфейс в автоматизованих системах розглядається як сукупність елементів виводу $UI = \langle E_i \rangle, i = \overline{1, n}$, кожен елемент виводу

$$E_i = \langle \langle x, y \rangle_i^j, T_i, c_i \rangle, j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

де $\langle x, y \rangle_i^j$ – координати вершини межі елемента виводу у вікні користувацького інтерфейсу, T_i – тип елемента виводу, c_i – критичність i -ого елемента виводу для роботи користувача.

Множина значень параметра T_i в моделі (2) співпадає з множиною значень параметру F моделі (1), і саме тип наявних у вікні користувацького інтерфейсу елементів виводу визначає бажаний формат даних при формуванні інформаційного потоку.

Критичність елемента виводу визначається особливостями робочого процесу. До критичних відносяться елементи, втрата інформації з яких призводить до порушення робочого процесу чи неможливості коректної обробки користувачем інформації від системи.

Управління розміщенням елементів виводу та їх типом дозволяє створювати персоналізований користувацький інтерфейс для адаптації інформаційної взаємодії користувача з системою. Критичні елементи виводу повинні бути присутніми у вікні робочого інтерфейсу, незалежно від його адаптації.

Персоналізація користувацького інтерфейсу та управління параметрами інформаційного потоку дозволяють налаштувати процес інформаційної взаємодії в системі з врахування індивідуальних особливостей користувача та особливостей робочого процесу (сценарію роботи в системі, предметної області тощо).

Я. М. Чабанюк*, д-р фіз.-мат. наук,

В. М. Марич*,

І. С. Будз**, канд. фіз.-мат. наук

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів,

**Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ ОЦІНКИ РИЗИКУ ПРИ ГАСІННІ ТОРФЯНИХ ПОЖЕЖ

Проблеми зниження небезпеки при гасінні торф'яних пожеж вимагає вміння оцінювати ризики гасіння та прогнозування розвитку пожеж для оперативного прийняття управлінських рішень. Використання стохастичних методів проектно-орієнтованого управління дозволяє на етапі моделювання процесів системно оцінити та обмежити кількість управлінських альтернатив.

Розглядається задача масового обслуговування [1] для ймовірності $P_k(t)$ того, що в момент $t \in k$ осередків горіння на торф'яному полі, в випадку двох караулів та двох осередків. Така модель має вигляд системи диференціальних рівнянь

$$dP_0(t) / dt = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$

$$dP_k(t) / dt = -(\lambda + \mu)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + 2\mu P_{k+1}(t),$$

$$dP_2(t) / dt = -(\lambda + 2\mu)P_2(t) + \lambda P_1(t),$$

де λ – середнє число появ нових осередків горіння за одиницю часу, а μ – середній час гасіння одного осередку.

При появі наступного осередку горіння відбувається втрата контролю над пожежею з можливими трагічними наслідками для працівників ДСНС.

Отримана модель має розв'язок [1] $P_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1/k!) \theta^k \right)^{-1}$,

$\theta = \lambda / \mu$, $P_k = (1/k!) \theta^k P_0$. При $k = 2$ маємо ймовірність ризику настання критичної ситуації.

Список використаних джерел:

1. Білуцка Г. Теорія ймовірностей та математична статистика. Лекції : навчальний посібник для студентів вищих закладів освіти / Г. Білуцка, Я. Чабанюк. – Львів : В-во «Львівський ЦНТЕІ», 2002. – 569 с.

Ya. M. Chabanyuk*, Dr. of Ph. and Math. Sciences,

V. Ya. Charnivchan**,

U. T. Khimka***, Ph. D.

*Lublin University of Technology, Lublin, Poland,

**Industrial college, Chernivci, Ukraine,

***National University Lviv Polytechnic, Lviv, Ukraine

RANDOM EVOLUTION WITH SMALL DIFFUSION IN MARKOV MEDIA

Consider stochastic system with diffusion perturbation, which is solution of stochastic differential equation

$$du^\varepsilon(t) = C(u^\varepsilon(t); x(t / (\delta\varepsilon)))dt + \delta^{1/2}\sigma(u^\varepsilon(t); x(t / (\delta\varepsilon)))dw(t) \quad (1)$$

where $u^\varepsilon(t)$ – random evolution [1]; $C(u; x), u \in R^d$ – regression function [2]; $w(t)$ – Winner process; $\sigma(u; x)$ – diffusion; δ – small parameter which characterizes effect of diffusion on random evolution.

Uniformly ergodic Markov process $x(t), t \geq 0$, defined on the phase space of states (X, X) with stationary distribution $\pi(B), B \in X$ and generator $Q\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy) [\varphi(y) - \varphi(x)]$ on real-valued test-functions with norm $\|\varphi(x)\| := \sup_{x \in X} |\varphi(x)|$ [1]. Here $q(x)$ – intensity of the time spent in the system state [2].

Theorem. For diffusion process (1) holds weak convergence $u^\varepsilon(t) \Rightarrow \hat{u}(t)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, where limited evolution $\hat{u}(t)$ is solution of stochastic differential equation $d\hat{u}(t) = C(\hat{u}(t))dt + \delta^{1/2}\sigma(\hat{u}(t))dw(t)$ with shift $C(u) = \int_X \pi(dx)C(u; x)$ and diffusion $\sigma^2(u) = \int_X \pi(dx)\sigma^2(u; x)$.

References:

1. Koroliuk V. Stochastic Systems in Merging Phase Space / V. Koroliuk, N. Limnios // World Scientific Publishing. – 2005. – 330 p.
2. Kinash A. Asymptotic dissipativity of the diffusion process in the asymptotic small diffusion scheme / A. Kinash, Ya. Chabanyuk, U. Khimka. // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. – 2015. – №14(4). – P. 93-103.

ВИБРАНІ ПИТАННЯ КЛАСИФІКАЦІЇ ЗАДАЧ ПО ТОЧНОСТІ

При розв'язуванні обчислювальних задач програмними засобами математичного моделювання, виникає необхідність отримання досить ефективного і в той же час універсального методу оцінки точності розв'язків. Тут виникає ряд труднощів, до яких насамперед належить жорстка залежність таких методів від властивостей задачі.

При створенні методики ефективного аналізу точності обчислень, досить ефективним вважається підхід з визначенням груп (класів) задач, подібних між собою щодо властивостей перетворення первинних помилок в помилки результату.

Підставою для такої класифікації можна вважати близькість помилок результатів для різних завдань, а також умови коректності, яким, як правило, повинні задовольняти розв'язувані задачі. Такі класи вказують на подібність розв'язків задач залежно від відмінності параметрів, що мають відповідні обмеження.

Припустимо, що для деякого класу задач

$$R_k x = f, \quad (1)$$

(де R_k – оператор, що належить деякій множині $\{R_1 \dots R_k\}$ операторів задач даного типу; x та f – шукані розв'язок та права частина, що належать множині X та F відповідно) наближені розв'язки яких визначаються виразами

$$\tilde{R}_k \tilde{x} = \tilde{f}, \quad (2)$$

можна отримати такі рівняння для помилок Δx з виразів

$$\Delta x = x - \tilde{x} = R_k^{-1} f - \tilde{R}_k^{-1} \tilde{f}, \quad (3)$$

які задовольняють умовам коректності, а їх розв'язки (помилки основних рівнянь) лежать в певній обмеженій області, яку можна прийняти в якості ознаки за точністю (характеристики) розв'язуваних задач (1).

Класифікація задач за точністю пов'язана з певними труднощами, зумовленими необхідністю вирішення двох питань [1]:

- 1) побудова оцінок точності розв'язків задач певного типу, які оперували б з величинами (характеристиками), однаковими для деякої множини завдань даного типу (тобто питання побудови ефективних оцінок, серед параметрів яких можна було б виділити точні параметри класу, при наявності певного критерію класу, який легко обчислити);
- 2) обчислення значень точності параметрів класів.

Вирішення цих питань можливе шляхом подальшого розвитку методів аналізу точності розв'язків задач різних типів з використанням сучасних технічних засобів.

Список використаних джерел:

1. Верлань А.Ф. Вопросы точностного тарирования вычислительных задач / А.Ф. Верлань, И.Е. Ефимов // Точность и надежность кибернетических систем. Республиканский межведомственный сборник – К. : Наукова думка, 1975. – Вип. 3. – С. 3-8.

УДК 005.94+004.9+519.7

І. С. Чернецький, канд. пед. наук,
Є. Ю. Пашенко, канд. економ. наук,
Є. Б. Шаповалов,
В. Б. Шаповалов

Національний центр «Мала академія наук України», м. Київ

ДОЦІЛЬНІСТЬ СТВОРЕННЯ СИСТЕМ ОНТОЛОГІЧНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ІНТЕГРАЦІЇ НАУКОВИХ ЗНАТЬ

Вступ. Наукові дослідження мають вагомий вплив на розвиток суспільства. Науковий рівень розвитку країни впливає на рівень життя у країні. Так, одні з найбільш розвинутих країн світу мають високий науковий рівень, зокрема Японія, США та країни Азії.

Одним з важливих етапів проведення наукової роботи є проведення попереднього дослідження (літературного огляду). Літературний огляд представляє відому на сьогодні інформацію в певній галузі та вказує на інформацію, яку необхідно дослідити [3]. Літературний огляд, призначений для промислових цілей потребує прийняття обґрунтованих рішень, а тому повинен включати всеосяжний, широкий огляд всіх можливих документів [2].

Нарту дослідженні відзначав важливість будь-якого огляду літератури для подальшого поширення зібраних знань для нової аудиторії [5]. Gaggard визначає огляд літератури, як «аналіз наукових матеріалів з певної теми, що вимагає від дослідника уважного ознайомлення з кожним джерелом для оцінки мети дослідження, визначення доцільності і якості наукових методів, проведення аналізу питання і відповіді, що піднімаються авторами, узагальнення результати різних досліджень, розробки об'єктивного синтезу результатів різних досліджень» [4].

Виклад основного матеріалу. Метою роботи було проведення обґрунтування та оптимізації літературного огляду використовуючи технології інформаційного менеджменту.

Одним з останніх досягнень в області менеджменту інформації є система ТОДОС. Технологія мережевої ІТ-платформи ТОДОС забезпечує інноваційне технологічне рішення побудови корпоративних інформаційно-аналітичних систем від багатофакторного аналізу інформаційних ресурсів до онтологічної системи колективного прийняття рішень і управління знаннями [1].

Високим потенціалом інформаційного менеджменту в області літературного огляду володіють інструменти аналізу, ранжування та підбору, що представлені у «Системі лабораторного забезпечення МанЛаб» з використанням інструментів ТОДОС. Система функціонує на базі платформ Editor3 та Ontology.

Вперше запропоновано використовувати інструменти системи ТОДОС та платформу ontology для інформаційного менеджменту в області літературного огляду наукових досліджень. Запропоновану систему було модернізовано для використання в області літературного огляду. Запропонований підхід дозволяє вирішувати проблеми ранжування інформації за семантичними характеристиками та аналізу з метою порівняння власних результатів з результатами попередників.

Список використаних джерел:

1. Стрижак А.С. Трансдисциплінарні онтології – інформаційна платформа проведення екологічних експертиз / А.С. Стрижак, А.Н. Трофимчук, Л.Ю. Цурика // Екологічна безпека та природокористування. – 2008. – С. 128-137.
2. Baker M.J. Writing a literature review / M.J. Baker // The Marketing Review. – 2000. – №1(2). – P. 219-247.
3. Boote D.N. Scholars before researchers: On the centrality of the dissertation literature review in research preparation / D.N. Boote, P. Beile // Educational Researcher. – 2005. – №34(6). – P. 3-15.
4. Garrad J. Health sciences literature review made easy: The matrix method / J. Garrad. – Burlington, MA : Jones & Bartlett Learning, 2014.
5. Hart C. Doing a literature review: Releasing the social science research imagination / C. Hart. – Thousand Oaks, CA: Sage, 2003.

УДК 517.9:95

Р. М. Черніга, д-р фіз.-мат. наук

Інститут математики НАН України, м. Київ

ЧИ МОЖЛИВО РОЗВ'ЯЗАТИ ДЕЯКІ НЕЛІНІЙНІ МОДЕЛІ, ЩО ОПИСУЮТЬ РЕАЛЬНІ ПРОЦЕСИ ?

Доповідь присвячено розгляду деяких класичних нелінійних моделей, зокрема Лотки-Вольтера (Lotka-Volterra) та Келлер-Зегеля (Keller-Segel), у випадку однієї просторової змінної. Показано, що сучасними симетрійними методами можна побудувати точні розв'язки цих моделей, які допускають чітку біологічну інтерпретацію.

Доповідь ґрунтується на роботах [1-4] та деяких неопублікованих результатах.

Список використаних джерел:

1. Cherniha R. Conditional symmetries and exact solutions of the diffusive Lotka-Volterra system / R. Cherniha, V. Davydovych // Mathematical and Computer Modelling. – 2011. – Vol. 54. – P. 1238-1251.

2. Cherniha R. Lie and conditional symmetries of the three-component diffusive Lotka-Volterra system / R. Cherniha, V. Davydovych // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2013. – Vol. 46. – P. 185-204.
3. Cherniha R.M. Exact solutions of the simplified Keller-Segel model / R.M. Cherniha, M.V. Didovych // Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulations. – 2013. – Vol. 18. – P. 2960-2971.
4. Cherniha R. Reaction-diffusion systems with constant diffusivities: conditional symmetries and form-preserving transformations / R. Cherniha, V. Davydovych // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2014. – Vol. 85. – P. 533-553.

УДК 519.21

Р. О. Чорний,

О. М. Кінаш, канд. фіз.-мат. наук

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ОДНА ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІРУ СТРАХОВИХ ПРЕМІЙ

Нехай ми знаходимось в умовах F-моделі [1, с.248]. Тобто будемо вважати, що кількість договорів страхування N , які знаходяться в страховому портфелі, є випадковою величиною. Кожному договору страхування з номером j ставиться у відповідність величина S_j , яку називаємо страховою сумою. Нехай Y_j – величина позову за j -м договором. Очевидно, що $Y_j \leq S_j$.

Введемо $X_j = \frac{Y_j}{S_j}$. Випадкову величину X_j назвемо відносним позовом

(позовом, що розрахований на одиницю страхової суми).

Будемо також вважати, що випадкові величини X_j та S_j – незалежні. Зрозуміло, що величина позову може бути представлена у вигляді

$$Y_j = X_j * S_j. \quad (1)$$

Позови, які задовольняють умову (1) назвемо факторизованими.

Припустимо, також, що для кожного договору страхування страхова премія Z_j визначається

$$Z_j = z * S_j$$

де z – деяка стала для всіх договорів страхування (страхова ставка). Зауважимо, що в розглянутій моделі премії є випадковими величинами, що залежать від S_j , що і відрізняє її від класичних постановок задачі.

Будемо вважати, що всі позови факторизовані, випадкові вектори (S_j, X_j) і випадкова величина N незалежні в сукупності. Сума премій зібраних по страховому портфелю рівна

$$\bar{Z} = \sum_{j=1}^N Z_j,$$

сума позовів рівна

$$\bar{Y} = \sum_{j=1}^N Y_j.$$

Якщо початковий капітал рівний u_0 , то кінцевий страховий фонд рівний

$$U = u_0 + \bar{Z} - \bar{Y} \quad (2)$$

Перша задача пов'язана з моделлю (2) є задача вивчення асимптотики розподілу випадкової величини U при відомій величині страхової ставки z .

Друга задача – визначення такого мінімального значення z , при якому результати страхової діяльності по даному портфелю є прийнятними для страховика.

Для визначення страхової ставки z введемо наступні умови:

$$z \geq EX_j \quad (3)$$

(умова «середньої беззбитковості»)

$$P(U \geq 0) \geq Q \quad (4)$$

де Q – деяке наперед задане число ($0 < Q < 1$), (умова «кінцевого небанкрутства»).

Якщо ставка страхової премії z забезпечує виконання умов (3) і (4) будемо називати її «достатньою». Через z_0 позначимо точну нижню грань величини z , таку величину будемо називати оптимальною страховою ставкою.

Розглянуто задачі визначення z_0 за різних умов.

Список використаних джерел:

1. Королев В.Ю. Математические основы теории риска / В.Ю. Королев, В.Е.Бенинг, С.Я. Шоргин. – М. : Физматлит, 2011. – 620 с.

УДК 004.932

А. В. Шарьпанов*,

В. Г. Калмыков**, канд. техн. наук

*Институт кибернетики им. В.М. Глушкова, г. Киев

**Институт проблем математических машин и систем, г. Киев

СЕГМЕНТАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ КРИВЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЕРЕМЕННОЙ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

Для большинства информационных систем характерно накопление информации в виде различных экспериментальных кривых (графиков, изображений). Прямое использование нейросетевых методов или методов статистического распознавания образов для решения задачи сравнения формы

графиков или кривых невозможно, потому что разные кривые, относящиеся к одному и тому же объекту, могут отличаться друг от друга по масштабу, уровню помех, количеству измерений и т.д. Неизвестные функции, определяющие экспериментальные кривые, должны быть аппроксимированы функциями, инвариантными к аффинным преобразованиям, чтобы сделать возможным сравнение этих кривых. Для этого могут быть использованы параметрически заданные сплайны [1, 2] в предположении, что полученные экспериментальные кривые являются реализацией процессов, определяющихся неизвестными гладкими функциями.

Однако в большом количестве практических задач приходится обрабатывать экспериментальные кривые, которые не могут быть удовлетворительно представлены гладкими функциями. Естественно предположить, что аппроксимирующая функция в этом случае должна быть кусочно-гладкой, а задачу аппроксимации разбить на две связанные задачи:

- 1) выбор набора граничных точек сегментов экспериментальной кривой $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ и их количества N ;
- 2) аппроксимация непрерывными функциями (сплайнами) каждого из частичных отрезков $(t_n, t_{n+1}), n = 1..N - 1$.

Решение задачи сегментации рассматривается как определение точек разрыва неизвестной аппроксимирующей кусочно-гладкой функции по данным ее реализации в виде экспериментальной кривой. Поиск решения выполняется с учетом классического определения непрерывности функций [3] и новых результатов исследований в области нейрофизиологии зрения [4-7]. Для анализа непрерывности функции в некоторой точке x_i рассматривается последовательность значений функции в окрестности этой точки. Причем используется изменяющаяся окрестность точки x_i , а именно, начиная с некоторого конечного значения $|x_{i+n} - x_i|$ окрестность точки x_i уменьшаясь, $(|x_{i+n} - x_i| > |x_{i+n-1} - x_i| > |x_{i+n-2} - x_i|, \dots)$ стремится к нулю. Множество окрестностей точки x_i определяет множество разрешающих способностей, при которых исследуется экспериментальная кривая. Множеству из n точек окрестности точки x_i ставится в соответствие атрибут $g_i(f(\overline{x_{i,i+n}}))$, вычисленный по значениям экспериментальной кривой $f(\overline{x_{i,i+n}})$ в окрестности точки x_i . Разрыв фиксируется, если $|g_i - g_{i+1}| > d$, где d – некоторая наперед заданная величина, причем такое условие должно выполняться в точке x_i при нескольких последовательных значениях разрешающей способности.

Список використаних джерел:

1. Ahlberg J.H. The Theory of Splines and Their Applications / J.H. Ahlberg, E.N. Nilson, J.L. Wash. – New York : Academic Press, 1967.
2. Boor Carl de. A Practical Guide to Splines / Carl de Boor. – New York : Springer, 2001.

3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа : в 3 т. / Л.Д. Кудрявцев. – 2003.
4. Подвигин Н.Ф. Динамические свойства нейронных структур зрительной системы / Н.Ф. Подвигин. – Ленинград : Наука, 1979. – 158 с. : илл.
5. Rukzenas O. Dynamics of Spatial Resolution of Single Units in the Lateral Geniculate Nucleus of Cat During Brief Visual Stimulation / O. Rukzenas, A. Bulatov, P. Heggelund // J Neurophysiol. – 2007. – P. 1445-1456.
6. Hubel David H. . Eye, brain, and vision / David H. Hubel. – New York : Scientific American Library : Distributed by W.H. Freeman, 1988. – 240 p. : ill.
7. Sharypanov A. Joint study of visual perception mechanism and computer vision systems that use coarse-to-fine approach for data processing / A. Sharypanov, A. Antoniouk, V. Kalmykov. // International Journal «Information content & processing». – Sofia, 2014. – Vol. 1, №3 – P. 287-300.

УДК 519.17

З. А. Шерман

Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины, г. Киев

КВАДРАТНАЯ РАЗНОСТНАЯ РАЗМЕТКА НЕКОТОРЫХ ГРАФОВ

В настоящее время дискретные модели широко применяются как в теоретических исследованиях, так и в практической деятельности. В данной работе дискретной моделью служит квадратная разностная разметка графа, которая впервые была введена в 2012 году Аджифа, Принси, Локеш и Ранжини. Мы используем терминологию предложенную в [1].

Функцию f называют квадратной разностной разметкой графа G с p вершинами, если f – биекция из $V(G)$ на множество $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ и индуцируемая ею реберная разметка $f^*(u, v) = \left| [f(u)]^2 - [f(v)]^2 \right|$ является инъекцией из $E(G)$ в множество натуральных чисел. Граф, допускающий квадратную разностную разметку, называется *квадратным разностным графом* или *SD графом*.

В работе [1] доказали, что такие классы графов как цепи, звезды, циклы, дружественные графы $C_3^{(n)}$, K_n где $n \leq 5$, $K_{n,m}$ где $m \leq 4$, треугольные змеи и $K_2 + mK_1$ имеют квадратную разностную разметку. Авторы предположили, что каждый граф цикл-кактус $C_m^{(n)}$ имеет квадратную разностную разметку [1]. В данной работе доказана эта гипотеза для цикла-кактуса $C_m^{(n)}$ при нечетных значениях m , а также решена задача существования квадратной разностной разметки для графа-гусеницы.

Теорема 1. Цикл-кактус $C_m^{(n)}$ допускает квадратную разностную разметку для любых натуральных чисел n, m , где $m \equiv 1 \pmod{2}$ и $m \geq 3$.

Теорема 2. Любой граф-гусеница является квадратным разностным графом.

Для цикла-кактуса C_5^3 применим алгоритм построения разметки вершин, изложенный в теореме 1. Результаты представлены на рисунке 1.

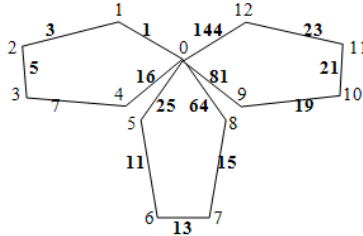


Рис. 1. Квадратная разностная разметка цикла-кактуса C_5^3

Список использованной литературы:

1. On square difference Graphs / V. Ajitha, K.L. Princy, V. Lokesha, P.S. Ranjini // International Journal of Mathematical Combinatorics. – 2012. – Vol. 1, №1. – P. 31-40.

УДК 519.68;629.7

А. В. Шолохов

Казённое предприятие специального приборостроения «Арсенал»,
Государственного космического агентства Украины, г. Киев

**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОГРЕШНОСТИ
ПРИБОРНОГО КВАТЕРНИОНА ОРИЕНТАЦИИ, ПОЛУЧАЕМОГО
С МАЛОГАБАРИТНОЙ АСТРОИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ
(МАИС) И ЕЁ КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Согласно техническим характеристикам МАИС [1] при ориентации спутника с ограниченной угловой скоростью положение осей связанной с ним системы координат (ССК) определяется с некоторой погрешностью. Параметром ориентации является нормированный кватернион $\Lambda = [\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2]^T$ [2], определяющий направление оси и угол поворота вокруг неё спутника для приведения его к требуемому положению в базовой, например, инерциальной системе координат (ИСК). Скалярная часть кватерниона: $\lambda_0 = \cos(\Theta / 2)$, где Θ – угол поворота; векторная часть ось $-\bar{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2]^T = \sin(\Theta / 2)\bar{\xi}$. Отсюда ось \bar{r} поворота спутника задаётся вектором-ортом $\bar{\xi}$, который получается делением на $\sin(\Theta / 2)$ компонентов векторной части кватерниона $\bar{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2]^T$ [2]. Погрешность кватерниона представим отклонениями оси и угла поворота от истинного направ-

ления и от требуемого угла поворота, соответственно, а приборный кватернион $\Lambda_{МАИС} = \Lambda \circ \Lambda_{error}$, где: Λ_{error} – кватернион погрешности.

Направляющие косинусы вектора поворота одинаковы в базовой – ИСК и ССК [2] и погрешности определения углового положения осей ССК легко связать с погрешностью приборного кватерниона.

Погрешность углового положения оси \vec{r} ограничим некоторой поверхностью, принадлежность к которой данной оси имеет одинаковую вероятность либо представляет гарантированную, непревышаемую границу [3]. Указанная поверхность представляет собой в общем случае поверхность конуса или пирамиды, соответственно, с эллипсом (в частном случае – окружность) или прямоугольником (в частном случае – квадрат) в основании, размеры которых задаются в угловых величинах. Погрешность определения угла поворота принадлежит некоторому вероятностному или гарантированному интервалу. Оба отклонения – скалярной и векторной части – имеют нелинейную зависимость, которая в данной работе упрощена. Если имеет место зависимость погрешностей, получаем конус с эллипсом в основании [4]. В тех немногих случаях, когда погрешность превысит принятое ограничение, в алгоритме оценивания углового положения спутника предусмотрено исправление нарушений априорных предположений [5].

Список использованной литературы:

1. Ворох С.А. Малогабаритная астроизмерительная система для определения ориентации КА «Мікросат» / С.А. Ворох, Н.И. Лихолит, Е.Б. Троицкий // Матеріали ХІ Міжнародної наук.-техн. конф. «АВІА-2013», 21-23 травня. – К., 2013. – Т. 4.
2. Бранец В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. – М. : Наука, 1973. – 320 с.
3. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем / Ф.Л. Черноусько. – М. : Наука, 1988. – 320 с.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Физматгиз, 1962. – 564 с.
5. Шолохов А.В. Разработка робастного алгоритма гарантированного оценивания состояний линейной управляемой системы / А.В. Шолохов // Компьютеринг. – 2011. – Т. 10, Вып. 3. – С. 235-248.

УДК 519.6

**О. В. Щирба,
С. С. Гльчишин**

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

РОЗРОБКА ІНСТРУМЕНТАРІЮ ДЛЯ КЕРУВАННЯ СКЛАДНИМИ СИСТЕМАМИ СФОРМОВАНИХ НА БАЗІ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

У задачах оптимального керування ракетними комплексами розрахунки здійснюються за динамічними моделями, що зв'язують просторові координати, кути орієнтації, кути атаки та ковзання, силу тяги, гравітаційні

сили, швидкості руху, моменти, швидкості кутового обертання, значення аеродинамічних коефіцієнтів, сил та моментів опору у атмосфері у залежності від атмосферного тиску, щільності та температури на різних висотах польоту. Вони визначаються аеродинамічними характеристиками ракети і фізичними параметрами атмосфери. При цьому доводиться враховувати, що зазначені параметри рідко коли явно пов'язуються функціональними залежностям, а, зазвичай, задаються табличними значеннями, які одержуються в результаті натурних спостережень.

Це обумовлює нас розробити власні підходи до специфіки чисельних розрахунків параметрів динамічної моделі з врахуванням потреб мінімізації часу на їх виконання. Жорсткі вимоги щодо швидкодії розрахунків зумовлюють обмежуватися кусково-лінійною апроксимацією.

Для випадку одновимірної таблиці розрахунки проводимо за принципом лінеаризації: якщо необхідно обчислити значення функції F в точці з координатою x , яка попала у одновимірній таблиці у проміжок (o_i, o_{i+1}) , то обчислення будемо виконувати за формулою

$$F(x) = F(o_i) + (F(o_{i+1}) - F(o_i)) \cdot (x - o_i)$$

Використовуючи аналогію з одновимірною таблицею, якщо необхідно обчислити значення функції F в точці з координатами (o, m) , яка попала у двовимірній таблиці у сітку $\{(o_i, m_j), (o_i, m_{j+1}), (o_{i+1}, m_j), (o_{i+1}, m_{j+1})\}$, то обчислення пропонуємо виконувати за формулою:

$$F(o, m) = F(o_i, m_j) + (F(o_{i+1}, m_j) - F(o_i, m_j)) \cdot \Delta\Delta o + \\ + (F(o_i, m_{j+1}) - F(o_i, m_j)) \cdot \Delta\Delta m + \\ + (F(o_{i+1}, m_{j+1}) - F(o_{i+1}, m_j) - F(o_i, m_{j+1}) + F(o_i, m_j)) \cdot \Delta\Delta o \cdot \Delta\Delta m,$$

де

$$\Delta\Delta o = \frac{o - o_i}{o_{i+1} - o_i}; \quad \Delta\Delta m = \frac{m - m_j}{m_{j+1} - m_j}.$$

Список використаних джерел:

1. Бейко І.В. Задачі, методи та алгоритми оптимізації / І.В. Бейко, П.М. Зінко, А.Г. Наконечний. – К. : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет». 2012. – 799 с.
2. Игдалов И.М. Ракета как объект управления / И.М. Игдалов, Л.Д. Кучма, Н.В. Поляков, Ю.Д. Шептун. – Днепропетровск : АРТ-ПРЕСС, 2014. – 542 с.
3. Beyko I. Solve-Operator Methods for Optimization of Risk Controlled Stochastic Processes / I. Beyko, P. Zinko // Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics. – 2013. – №2. – P. 17-24.

І. В. Юрченко, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО АВТОНОМНОГО СТОХАСТИЧНОГО РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ З ВИПАДКОВИМИ ПАРАМЕТРАМИ В ПРАВИЙ ЧАСТИНІ

Розглянемо стохастичний експеримент з базовим імовірнісним простором (Ω, F, F, P) , $F \equiv \{F_t, t \geq 0\}$ – фільтрація, де задана функція $u(t, x, \omega)$ є вимірною з імовірністю одиниця за t та x відносно мінімальної σ -алгебри $B([0, T], R^1)$ борелевих множин на площині та для якої

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E \left\{ |u(t, x, \omega)|^2 \right\} dx < \infty \text{ для всіх } t \in [0, T], E\{\bullet\} \text{ – математичне сподівання, } T \subset [0, \infty).$$

Простір функцій $\{u(t, x, \omega)\}$, що володіє властивістю інтегровності, позначимо через \mathfrak{M}_T . У просторі \mathfrak{M}_T слід ввести норму вигляду

$$\|u(t, x, \omega)\|^2 \equiv \int_0^T E_u(t) dt = \int_0^T E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx \right] dt.$$

$$Q(A, q, p) \equiv \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{kj} q^k p^j, \text{ де } A \equiv \{a_{kj}\} \text{ – дійснозначна матриця розмірності } n \times m,$$

складена з елементів $a_{kj} \in R^1$. Розглянемо на (Ω, F, F, P) задачу Коші для лінійного стохастичного диференціального рівняння з частинними похідними (ЛСДРЧП) вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[Q \left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \right] + Q \left(B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) = \\ & = \varphi(\xi(\omega)) Q \left(C, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \frac{dw(t, \omega)}{dt}, \\ & Q \left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \Big|_{t=0} = [Qu]_0, \end{aligned}$$

$$B \equiv \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{k,n}, b_{ij} \in R^1; C \equiv \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{k,n}, c_{ij} \in R^1, \varphi(\bullet) \text{ – берівська функція з}$$

областю значень R^1 , $\xi(\omega)$ – випадкова величина, задана щільністю $p_\xi(x)$ (або функцією розподілу), $w(t, \omega)$ – одновимірний винерів процес, при цьому $\xi(\omega)$ не залежить від $w(t, \omega)$.

Доведено існування сильного розв'язку ЛСДРЧП у відповідному просторі з випадковими параметрами. Отримані достатні умови в термінах коефіцієнтів ЛСДРЧП асимптотичної стійкості й нестійкості в середньому квадратичному сильному розв'язку цього рівняння.

Список використаних джерел:

1. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – К. : Ин-т математики АН УССР. – 1981. – С. 25-59.
2. Царьков Е.Ф. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения / Е.Ф. Царьков, В.К. Ясинский. – Рига : Ориентир, 1992. – 301 с.
3. Перун Г.М. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных / Г.М. Перун, В.К. Ясинский // Укр. мат. журн. – 1993. – Т.45, №9. – С. 1773-1781.
4. Королюк В.С. О поведении второго момента решения линейного автономного стохастического уравнения в частных производных со случайными параметрами в правой части / В.С. Королюк, И.В. Юрченко, В.К. Ясинский // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Т. 51, №1. – С. 65-72.

УДК 519.21

В. К. Ясинський*, д-р фіз.-мат. наук,
А. Я. Довгунь**, канд. фіз.-мат. наук,
О. Коржос*

*Чернівецький національний університет
 імені Юрія Федьковича, м. Чернівці,

**Буковинський державний фінансово-економічний
 університет, м. Чернівці

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ ЗІ СКІНЧЕННОЮ ПІСЛЯДІЄЮ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ КОНТРАКТОРАМИ (СДС З ІК) ТА ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНІХ ВИПАДКОВИХ ЗБУРЕНЬ

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ задано СДС з ІК

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f_1(\xi_1(w)) a(t, x_t) dt + \int_0^t f_2(\xi_2(w)) b(t, x_t) dw(t) \quad (1)$$

за початковою умовою

$$x_{t|t=0} = \{x(t+\theta)\}_{t=0} = \varphi(\theta) \in C, \quad (2)$$

де $x(t) \equiv x(t, w) : [0, T] \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_t = x(t+\theta); -\tau \leq \theta \leq 0$;

$$a : [0, T] \times C \rightarrow \mathbb{R}^n; b : [0, T] \times C \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$w(t) \equiv w(t, w) \in \mathbb{R}^n$ – n -вимірний вінерівський процес; $C \equiv C([- \tau, 0])$ – простір неперервних функцій; $f_j(\cdot): \mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}_1$ – обмежені берові функції; $\xi_j(w)$, $-j = 1, 2$ – задані n -вимірні випадкові величини.

Нехай $G_j(t, x_t): [- \tau, T] \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$ – неперервні обмежені функціонали за другим аргументом, тоді вводимо новий випадковий процес $z(t) \equiv z(t, w) \in \mathbb{R}^n$, а саме:

$$z(t) = y(t) + \int_0^t G_1(s, x_s) y(s) ds + \int_0^t G_2(s, x_s) y(s) dw(s). \quad (3)$$

Покладемо існування такої сталої $\mathbb{K} > 0$, що $\forall t \in [0, T]$, $z \in \mathbb{R}^n$ виконуються нерівності

$$|a(t, x_t - z_t) - a(t, x_t) - G_1(t, x_t) y| \leq \mathbb{K}_1 |y|, \quad (4)$$

$$\|b(t, x_t - z_t) - b(t, x_t) - G_2(t, x_t) y\| \leq \mathbb{K}_2 |y|, \quad (5)$$

$$|f_j(\xi_j)| \leq K_j, j = 1, 2. \quad (6)$$

За виконання умов (4)-(6) будемо вважати, що коефіцієнти СДС з ІК мають обмежені контрактори.

Твердження. Нехай на ймовірнісному базисі для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються умови:

- 1) функціонали a та b є стохастично замкненими;
- 2) функціонали a та b мають випадкові інтегральні контрактори;
- 3) для $\forall \varphi \in C$ існують інтеграли

$$\int_0^T |a(t, \varphi)|^2 dt < K_4 < \infty, \int_0^T \|b(t, \varphi)\|^2 dt < K_5 < \infty;$$

- 4) $f_j(\xi_j(w))$, $j = 1, 2$ не залежать від $w(t) \equiv w(t, w) \in \mathbb{R}^n$ та задовольняють умови обмеженості (6).

Тоді існує майже напевно сильний розв'язок $x(t) \in \mathbb{R}^n$ задачі Коші (1)-(3).

Список використаних джерел:

1. Ширяев А.Н. Теория случайный процессов / А.Н. Ширяев, А.В. Булинский. – М. : Физматлит, 2005. – 408 с.
2. Ясинський В.К. Стабілізація динамічних систем випадкової структури / В.К. Ясинський, І.В. Юрченко, Є.В. Ясинський. – Чернівці : Золоті літаври, 2011. – 738 с.

В. К. Ясинський, д-р фіз.-мат. наук,

А. Я. Довгунь, канд. фіз.-мат. наук,

Г. М. Перун, канд фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

**ДОСТАТНІ УМОВИ СТІЙКОСТІ В СЕРЕДНЬОМУ
КВАДРАТИЧНОМУ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФУЗІЙНИХ
ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ
З ЗОВНІШНІМИ ЗБУРЕННЯМИ**

На ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, R)$ випадковий процес $x(t) \equiv x(t, \omega) \in R^n$ є сильним розв'язком дифузійного рівняння автоматичного регулювання під дією зовнішніх випадкових збурень [1-2]

$$dx(t) = [f_1(t, \xi_1)Ax(t) + g\varphi(\sigma)]dt + f_2(t, \xi_2)Bx(t)dw(t) \quad (1)$$

за початковими умовами

$$x(t)|_{t=0} = \varphi(t) \in R^n \text{ для } \forall t \in [-\tau, 0]. \quad (2)$$

Тут $f_l(t, \cdot) \in R^1$, $l=1,2$, – берівські функції; $\xi_j = \xi_j(\omega) \in R^1$, $j=1,2$ – випадкові величини; $A \equiv \{a_{ij}\}$; $B \equiv \{b_{ik}\}$, $i, k = \overline{1, n}$, – дійсні матриці; $\sigma \equiv l^T x(t)$, $t \geq 0$; $\varphi(\circ)$ – нелінійна диференційовна функція, що задовольняє умови:

$$[k\sigma - \varphi(\sigma)]\varphi(\sigma) > 0, \quad k > 0; \quad \varphi(0) = 0; \quad \dot{\varphi}(\sigma) \geq 0, \quad (3)$$

$$g \equiv (g_1, g_2, \dots, g_n)^T \in R^n; \quad l = (l_1, l_2, \dots, l_n)^T \in R^n.$$

Твердження. Нехай на ймовірнісному базисі задана система (1), (2) та виконуються умови:

1) матриця $E\{f_1(t, \xi_1)\}[A + kgl^T]$ гурвіцева, $l^T g > 0$;

2) існує додатно визначений розв'язок H матричного рівняння

$$E\{f_1(\xi_1)\}(A^T H + HA) + E\{f_2^2(t, \xi_2)B^T H B\} = -I,$$

де $E\{f_j(\xi_j)\} < \infty$ – існують;

3) виконується матрична нерівність

$$C_1 = \begin{bmatrix} -I & H_g + \frac{1}{2}XE\{f_1(t, \xi_1)\}A^T l + \frac{1}{2}l \\ \left(H_g + \frac{1}{2}XE\{f_1(t, \xi_1)\}A^T l + \frac{1}{2}l\right)^T & Xl_g^T - \frac{1}{k} \end{bmatrix} \leq 0,$$

де X задовольняє нерівність

$$-\frac{2l^T Hl}{k(l^T l)^2} < X < 0;$$

4) виконується матрична нерівність

$$\begin{aligned} & Hg + \frac{1}{2} \left(X \left(E \{ f_1(t, \xi_1) \} A^T l + I \right) l \right)^T \times \\ & \times \left[E \{ f_1(t, \xi_1) \} (A^T H + HA) + E \{ f_2^2(t, \xi_2) B^T H B \} \right]^{-1} \times \\ & \times \left[Hg + \frac{1}{2} \left(X E \{ f_1(t, \xi) \} l + I \right) l \right] < X l^T g - \frac{1}{k} I. \end{aligned}$$

Тоді положення рівноваги $x(t) \equiv 0$ системи (1), (2) абсолютно стійке в середньому квадратичному.

Список використаних джерел:

1. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений / Е.Ф. Царьков. – Рига : ЗИНАТНЕ, 1989. – 421 с.
2. Ясинський В.К. Стабілізація у динамічних системах випадкової структури / В.К. Ясинський, Е.В. Ясинський, І.В. Юрченко. – Чернівці : Золоті литаври, 2011. – 738 с.

УДК 004.942:519.876.5

В. К. Ясинський, д-р фіз.-мат. наук,

І. В. Юрченко, канд. фіз.-мат. наук,

У. М. Кислюк

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПРО ІСНУВАННЯ СИЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДИFUЗИЙНОГО СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ІЗ ЗОВНІШНІМИ ВИПАДКОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ- ПРОЦЕСАМИ (СДФР ЗВЗ)

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ задано СДФР ЗВЗ

$$dx(t) = f_1(t, \omega) a(t, x_t) dt + f_2(t, \omega) b(t, x_t) d\omega(t), \quad (1)$$

$$x_t \equiv x(t + \theta)|_{t=0} = \varphi(\theta); -r \leq \theta \leq 0, \quad (2)$$

де $x(t) \equiv x(t, \omega): [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$; $f(t, \omega): [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ – неперервні випадкові процеси; $a(t, 0): [0, T] \times C \equiv C_n(-r, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$, C – простір непе-

первних функцій; $b: [0, T] \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$; $w(t) \equiv w(t, \omega): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ – вінерів процес.

Означення. $x(t) \in \mathbb{R}^n$ назвемо сильним розв'язком СДФР ЗВЗ (1), (2), якщо $x(t) \in F_t$ – вимірним для $\forall t \in [0, \infty)$ та задовольняє стохастичне інтегральне рівняння

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f_1(s, \omega) a(s, x_s) ds + \int_0^t f_2(s, \omega) b(s, x_s) d\omega(s) \quad (3)$$

за умови (2).

Твердження. Нехай для СДФР ЗВЗ (3), (2) виконуються умови:

- 1) функціонали $a(t, x_t), b(t, x_t)$ визначені для $\forall t \in [0, \infty), \forall x_t \in C$ та вимірні за сукупністю змінних;
- 2) виконується умова Лівшица та обмеженості для $\forall \{x_t, y_t\} \subset C$

$$|a(t, x_t) - a(t, y_t)| + b(t, x_t) - b(t, y_t) \leq K_1 \|x_t - y_t\|, \quad (4)$$

$$|a(t, x_t)|^2 + b(t, x_t)^2 \leq K_2^2 (1 + x_t^2) \quad (5)$$

де $x_t \equiv \sup_{-t \leq \theta \leq 0} \sup_{-t \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$; $K_j > 0; j = 1, 2$ – сталі;

- 3) $f_j(t, \omega), j = 1, 2$ – задані неперервні випадкові процеси з $\mathbb{E}\{f_1^2(t, \omega)\} \leq K_3$; $\mathbb{E}\{f_2^4(t, \omega)\} \leq K_4; K_j > 0, i = 3, 4$ -сталі;
- 4) випадковий процес $\varphi(\theta) \equiv \varphi(\theta, \omega): [-2, 0] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ не залежить від $f_j(t, \omega), j \equiv 1, 2$ вінерового процесу $w(t) \in \mathbb{R}^n$, при цьому $\mathbb{E}\{\varphi(\theta)\} < K_j < \infty; K_s > 0$;
- 5) інтеграли у (3) неперервні затмайже напевно.

Тоді майже напевно існує єдиний сильний розв'язок задачі (3), (2).

Список використаних джерел:

1. Гихман И.И. Стохастическое дифференциальное уравнение и их применение / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – К. : Наукова думка, 1982. – 612 с.
2. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональные уравнения / Е.Ф. Царьков. – Рига : Изд-во «Зинатне», 1989. – 421 с.
3. Хусаинов Д.Я. Линейные динамические системы с последствием / Д.Я. Хусаинов, И. Диблик, М. Ружичкова. – 2015. – 252 с.

ЗМІСТ

| | |
|---|----|
| Абрамчук В. С., Абрамчук І. В. Проблеми, методи, алгоритми розв'язування систем $A\vec{x} = \vec{b}$ з погано зумовленими матрицями | 3 |
| Аліксійчук Б. Р., Коваленко О. Є., Кух А. М. Проект системи «Інтелектуальний дім» на платформі Arduino | 5 |
| Андрейцев А. Ю., Семененко Т. М., Смирнов І. В. Аналітичне дослідження температурного стану плакованої частинки в плазмовому струмені при напиленні покриттів | 6 |
| Артюх М. В., Литвин О. М. Застосування дивідіріального та мультигратального числень в дослідженні економіки сільського господарства України | 8 |
| Атаманчук П. С., Кух А. М. Уточнення змісту курсу «Сучасні теорії тестів» | 10 |
| Бак С. М. Біжучі хвилі в моделі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці | 11 |
| Бартіш М. Я., Огородник Н. П. Про один метод спуску | 13 |
| Бейко І. В. До інтегрованого навчання математичних дисциплін | 14 |
| Бейко І. В., Підвальна Я. В. Методи прискореного обчислення опорних траєкторій | 14 |
| Бейко І. В., Щирба В. С., Щирба О. В. Побудова математичних моделей для обчислення фазових траєкторій літальних апаратів | 15 |
| Бейко І. В., Щирба О. В. Методи асимптотично-розв'язуючих операторів для побудови оптимального керування в умовах фазових обмежень | 16 |
| Бецко І. В. Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь | 17 |
| Бігун Я. Й. Математична модель відповіді імунної системи при інфекційних захворюваннях із врахуванням впливу екологічних факторів | 18 |
| Білинський А. Я., Кінаш О. М. Про оцінку ймовірності банкрутства у випадку великих виплат | 20 |
| Богомолов В. О., Колодяжний В. М. Моделювання фізичної структури матеріалів з лінійними в'язко-пружними властивостями при описуванні поведінки реальних середовищ | 21 |
| Бомба А. Я., Сафоник А. П. Про комп'ютерне моделювання процесу аеробного очищення стічних вод | 22 |
| Бомба А. Я., Ярошак С. В., Бойцов В. І. Математичне моделювання неізотермічної багатofазної фільтрації в системі паралельних свердловин за технологією термогравітаційного дренажу | 24 |
| Борисенко О. В. Дослідження асимптотичної поведінки коливної системи третього порядку під дією малих випадкових нелінійних періодичних збурень | 25 |
| Вакулов М. І. Оптимізація одноколонних ректифікаційних апаратів для хімічних технологій | 27 |
| Вдовенко Т. І. Модель сингулярного збурення із запізненням (упередженням) | 28 |

| | |
|---|----|
| Верігіна І. В., Бузинний О. М. Комп'ютерне моделювання задачі про перерозподіл ресурсного простору між парою опонентів | 29 |
| Верлань А. Ф. Витоки і сучасні риси проблеми математичного моделювання..... | 30 |
| Verlan A., Sterten Jo Algorithm for modelling a dynamic object by means of the convolution operation..... | 32 |
| Верлань Д. А. Алгоритми оперативної оцінки точності при розв'язанні інтегральних рівнянь..... | 33 |
| Власюк А. П., Жуковська Н. А., Федорчук В. Ю., Ілляшик Б. А. Математичне моделювання впливу тепло-масоперенесення на напружено-деформований стан ґрунтового масиву в нестационарному випадку | 35 |
| Газдрук К. П., Матійчук Н. І., Нікітіна О. М. Вебінар як прогресуюча технологія впровадження інтерактивних методів навчання в освітній процес | 37 |
| Гальчинський Л. Ю., Свиденко А. В. Побудова системи прогнозування цін на нафтопродукти на основі нейронних мереж з застосуванням паралельних обчислень..... | 38 |
| Gerasimchuk V. S., Gerasimchuk I. V., Balykina A. V. Nonlinear Schrödinger equation in the system with two interfaces. Exact solutions and numerical analysis | 40 |
| Gerasimchuk V.S., Gerasimchuk I. V., Balykina A. V., Rebenchuk T. L. Stability analysis of localized solutions in an anharmonic system with a nonlinear defect | 41 |
| Герус В. А., Кутя Т. В., Мартинюк П. М. Про узагальнення рівняння фільтрації..... | 42 |
| Гладка О. М. Синтез методів комплексного аналізу та сумарних зображень при моделюванні фільтраційних процесів у LEF-пластах з вільними межами..... | 43 |
| Голобродський В. Ю., Лучко А. М., Щирба В. С. Проблеми використання математично-статистичних технологій в освітніх вимірюваннях..... | 45 |
| Гомон К. О., Дияк І. І. Розпаралелення обчислень у методі декомпозиції області | 46 |
| Грисенко М. В., Крижановська Т. В. Математичні моделі диференціальних систем | 48 |
| Гудима У. В., Гнатюк В. О. Задача найкращого у розумінні сім'ї опуклих функцій рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно за допомогою багатозначного відображення | 50 |
| Гришук В. А. Методи ідентифікації нелінійних динамічних об'єктів у вигляді інтегральних рядів Вольтерри..... | 51 |
| Гуцол О. О. Методика вивчення програмних засобів верстки складних науково-технічних видань..... | 53 |
| Двійнос Я. Г., Олексієвць В. Ф., Саєць В. М. Технологія формування труб великого діаметру з поліетилену | 54 |
| Дідович М. В. Симетрії Лі та точні розв'язки нелінійної моделі типу Келлер-Зегеля..... | 56 |
| Дінділевич С. М., Кух А. М. Проект інформаційно-освітнього середовища «Спектр»..... | 57 |
| Добровська Л. М., Добровська І. А. Класифікатори зображень на основі ART1-мережі..... | 58 |

| | |
|--|----|
| Добровська Л. М., Яструб В. О. Бінарний лінійний автоасоціатор медичних зображень | 59 |
| Доленко Г. О., Мановицька Д. О., Галиця Ю. І. Багатокритеріальний підхід до вибору приросту потужностей альтернативних джерел енергії | 61 |
| Донець Н. П., Ясинський В. К. Асимптотика розв'язку лінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння з частинними похідними гіперболічного типу | 62 |
| Дорош А. Б., Черевко І. М. Застосування сплайн-функцій до побудови наближених розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу | 64 |
| Дрінь С. С., Шестюк Н. Ю. Математичне моделювання процесу зміни валових інвестицій на базі логістичної послідовності детермінованого хаосу | 66 |
| Дроздова В. В., Сандей В. С. Використання кватерніонів для побудови математичних моделей керованих ЛА та оцінювання збурень аеродинамічних коефіцієнтів | 68 |
| Дубок К. В. Доцільність впровадження дистанційної освіти в українські вищі навчальні заклади | 69 |
| Єрмоїна Т. О. Неперервні при $t \in \mathcal{R}$ розв'язки систем нелінійних функціональних рівнянь | 71 |
| Загородній Ю. В. Математичне моделювання динаміки біологічних клітин рослинного організму | 72 |
| Задірака В. К. 50 років тематиці з оптимізації обчислень | 74 |
| Задірака В. К., Бабич М. Д., Швідченко І. В. Про міжнародні наукові форуми з проблем оптимізації обчислень | 77 |
| Зеленяк В. М., Коляса Л. І. Моделювання термом'якого двовимірного стану у кусково-однорідній трикомпонентній області з тріщиною | 80 |
| Іванюк В. А., Понеділок В. В. Алгоритм розв'язування обернених задач динаміки нелінійних об'єктів на основі рядів Вольтерри | 81 |
| Івасишен С. Д., Мединський І. П., Пасічник Г. С. Параболічні моделі з виродженнями на гіперплощині задання початкових даних | 83 |
| Івохін Є. В., Апанасенко Д. В. Про реалізацію процесу кластеризації на множині складених нечітких чисел | 84 |
| Івохін Є. В., Махно М. Ф. Про підхід до формалізації процесу тестування на основі гібридної моделі задачі розкладів | 85 |
| Івохін Є. В., Науменко Ю. О. Про гібридні моделі процесу розповсюдження реклами на основі рівняння дифузії | 86 |
| Гліка С. А., Піддубна Л. А. Побудова областей стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь | 87 |
| Гльків В. С. Крайова задача з інтегральними умовами для системи рівнянь Ляме в просторах майже періодичних функцій | 88 |
| Гльченко О. В., Шовкопляс Т. В. Умови існування розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь в частинних похідних параболічного типу з випередженням | 90 |
| Кірік О. Є. Побудова та дослідження комплексу моделей для оптимізації функціонування розподільчих систем | 92 |
| Клименко І. А., Сторожук О. М. Спосіб автоматичного розпаралелювання задач із завчасною реконфігурацією на ПЛІС | 93 |

| | |
|--|-----|
| Коваленко О. Є., Клименко М. А. Технологічні моделі програмної системи для прийняття рішень методом голосування..... | 95 |
| Коваленко О. Є., Коваленко Т. О. Елементи модельно-орієнтованого підходу технології розробки систем ситуаційного управління | 97 |
| Коваль В. В., Дорогобед В. В., Кальян Д. О., Коваль В. В., мол. Комп'ютерне моделювання та статистична оптимізація пристроїв синхронізації з адаптивними властивостями | 98 |
| Ковальська І. Б. Наближення узагальненими сумами Зігмунда на класах аналітичних функцій в інтегральній метриці | 100 |
| Козак В. І. Нескінченна двовимірна система зв'язних тягарців | 103 |
| Колечкіна Л. М. Підхід до розв'язування задач векторної оптимізації на комбінаторних конфігураціях з використанням теорії графів..... | 104 |
| Колодяжний В. М., Ламтюгова С. М., Лісіна О. Ю. Розв'язування двовимірних задач тепло- та масопереносу за безсітковими методами з використанням R-функцій та атомарних радіальних базисних функцій..... | 106 |
| Колосов О. Є., Сівецький В. І. Підходи до моделювання технічних засобів для одержання інтелектуальних композитів | 108 |
| Колосова О. П. Результати геометричного моделювання процесів та обладнання для одержання реактопластичних волокнистих композитів..... | 109 |
| Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в обмежених неоднорідних циліндрично-кругових середовищах | 111 |
| Костьян Н. Л. Комп'ютерна реалізація інтегральних моделей обратних задач динаміки систем | 112 |
| Красницький Б. О. Аналіз споживчої поведінки з метою здійснення цінової дискримінації | 114 |
| Кривонос Ю. Г., Крак Ю. В., Бармак О. В., Багрій Р. О. Інтелектуалізація введення текстової інформації при альтернативній комунікації | 116 |
| Kuduk G. Problem with integral conditions for nonhomogeneous partial differential equations of first order | 117 |
| Kuduk G., Symotyuk M. M. Nonlocal problem with integral conditions for linear partial differential equations of second order..... | 118 |
| Кух А. М. Педагогічна система дистанційного навчання..... | 119 |
| Кух О. М., Кух А. М. Сервіси Google для створення інформаційно-освітнього середовища | 120 |
| Кушлик Б. Р. Використання поблокової методики вивчення засобів створення web-сторінок | 123 |
| Кушлик Б. Р., Кушлик-Дивульська О. І. Засоби впливу на стабільність балансу «фарба-вода» у офсетному друці..... | 124 |
| Кушлик-Дивульська О. І. Оптиміальне керування технологічними процесами..... | 126 |
| Листопадова В. В. Про одну багатоточкову задачу для диференціальних рівнянь нейтрального типу з параметрами..... | 127 |
| Листопадова В. В., Кузнецова А. Д., Терещенко І. Ю. Важливість інформаційних технологій в освіті | 128 |
| Литвин О. М., Першина Ю.І., Пташний О. Д. Дослідження методу знаходження розривів функції двох змінних | 130 |

| | |
|---|-----|
| Літовченко В. А. Про граничні значення гладких розв'язків вироджених $\{p, \vec{h}\}$ -параболічних рівнянь | 132 |
| Лопушанська Г. П., Рапіта В. Р. Обернена коефіцієнтна задача для телеграфного рівняння з дробовою похідною | 135 |
| Malashchuk I. V. Mathematical modeling of good squares stable processes of warm directions in solid-pieces of the cosmic spaces | 136 |
| Малик І. В. Асимптотика дограничних напівмарковських еволюцій у схемі усереднення | 138 |
| Маляр М. М., Поліщук В. В. Модель багатокритеріального аналізу стартапів в умовах невизначеності вхідних даних | 140 |
| Махович О. І. Дослідження теплового поля в обмежених тілах методом перерізів | 141 |
| Медвідь Н. В. Про вплив контактної зосередженої фільтрації вздовж водоводу в ґрунтовій греблі наположення депресійної поверхні | 143 |
| Мендерецький В. В. Місце та роль інформаційно-телекомунікаційних технологій в системі освіти України | 145 |
| Михайлович Т. В. Обґрунтування циклічних властивостей погодинної послідовності водоспоживання | 146 |
| Мороз В. І., Чернобай Л. І., Вацик Н. О. Використання інтегральних методів для прийняття управлінських рішень | 148 |
| Москальчук А. М., Кух А. М. Виготовлення і використання 3d голограм е навчальному процесі | 150 |
| Моцик Р. В. Вимоги до вчителів початкової школи у процесі дистанційного навчання | 151 |
| Мусій Р. С., Дрогомирецька Х. Т., Сорокатиий М. І. Математичне моделювання термомеханічної поведінки електропровідного шару за електромагнітної дії в режимі згасної синусоїди за врахування термопружного розсіювання енергії | 153 |
| Мусій Р. С., Мельник Н. Б. Математичне моделювання термопружних процесів у кусково-однорідних електропровідних тілах та оцінка їх несучої здатності за дії імпульсних електромагнітних полів | 155 |
| Мухін В. Є., Яковлева А. П., Корнага Я. І., Горбунов Я. Є. Оптимізація розміщення вишок мобільного зв'язку на основі технології 5G | 156 |
| Мястковська М. О. Програми для аналізу якості тестових завдань | 158 |
| Нечуйвітер О. П., Кейга К. В. Кусково-стала інтерлінація при обчисленні 2D інтегралів від тригонометричних функцій | 160 |
| Нитребич З. М., Маланчук О. М. Однорідна крайова задача у смузі для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом | 161 |
| Нікітіна О. М. Застосування методу гібридних інтегральних перетворень при моделюванні фізичних процесів | 162 |
| Нікорюк Н. С., Карпенко В. М. Алгоритм формування перехідних процесів двигуна постійного струму з послідовним збудженням | 163 |
| Ночвай В. І. Оптимізація природно-технічних систем відносно забезпечення стандартів якості довкілля | 165 |
| Омелян О. М., Серова М. М. Лінеаризація систем нелінійних рівнянь конвекції-дифузії за допомогою нелокальних перетворень | 166 |

| | |
|--|-----|
| Панасюк Н. М. Інформаційні технології в курсі вищої математики технічного університету..... | 168 |
| Pelekh Ya. M. An approach to deducing approximate solutions to the cauchy problem for nonlinear differential equations..... | 170 |
| Пелех Я. М., Ментинський С.М., Пелех Р. Я. Нелінійний двосторонній метод розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду..... | 171 |
| Петриченко В. В. Оптимізація процесів перекачування нафтопроводами системи збору продукції нафтових свердловин в умовах невизначеності експлуатації насосних станцій..... | 173 |
| Пилипюк Т. М. Крайова задача для рівнянь параболічного типу з операторами Бесселя, Фур'є, Лежандра..... | 174 |
| Пічугіна О. С. Поліедрально-поверхневі подання вершинно розгашованих комбінаторних множин та їх застосування..... | 175 |
| Пічугіна О. С. Графовий підхід до розв'язання задачі про суму підмножин..... | 177 |
| Подлипенко Ю. К., Горбатенко М. Ю., Перцов А. С. Про знаходження наближених мінімаксних оцінок лінійних неперервних функціоналів від розв'язків задачі Неймана для бігармонічного рівняння..... | 179 |
| Пожар М. С. Порівняльний аналіз методів виготовлення білої сажі..... | 180 |
| Поліщук Н. В. Існування розв'язку деякої моделі рівноваги з сумарними витратами..... | 181 |
| Положаєнко С. А., Мухиалдин Х. М. Математическая модель процесса реологии фрактально-неоднородных гетерогенных пластовых систем..... | 184 |
| Просандєєв О. Є., Кух А. М. Технологія конструювання тесту..... | 185 |
| Розумовська О. Б. Побудова та оцінка прогнозу моделі на основі ліній тренду в MS Excel..... | 187 |
| Романенков Ю. О., Варганян В. М., Зейнієв Т. Г. Графоаналітичний засіб інтервального оцінювання ефективності бізнес-процесів організації..... | 189 |
| Савіч В. С. Математична модель процесу фільтрації в гетерогенних стистемах з проміжним «агентом»..... | 190 |
| Савула Я. Г. Гетерогенне різномасштабне моделювання..... | 192 |
| Савула Я. Г., Турчин Ю. І. Числове дослідження задачі масоперенесення у стінці судини..... | 193 |
| Семенюта М. Ф., Петренюк А. Я. Розмітки графа як математичні моделі систем..... | 194 |
| Семчишин Л. М., Павелчак-Данилюк О. Б. Тестування алгоритмів розв'язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебричних рівнянь..... | 196 |
| Сеньо П. С. Деякі застосування математики функціональних інтервалів..... | 198 |
| Сергієнко В. П., Лісова Т. В. Математичне моделювання засобів стандартизованого педагогічного оцінювання..... | 198 |
| Серов М. І., Карпалюк Т. О. Галілеївська інваріантність двовимірної системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії..... | 200 |
| Серов М. І., Плюхін О. Г. Некласичні симетрії і розв'язки системи рівнянь реакції-дифузії..... | 203 |
| Серов М. І., Приставка Ю. В. Нелокальні перетворення еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії..... | 204 |

| | |
|---|-----|
| Серов М. І., Рассоха І. В. Галілей-інваріантне узагальнення рівняння Шредінгера з деривативною нелінійністю..... | 205 |
| Ситник О. О., Протасов С. Ю., Ключка К. М. Багатокрокові алгоритми розв'язання інтегральних рівнянь у задачі відновлення сигналів..... | 206 |
| Ситніков О. В. Порівняльний аналіз математичного моделювання скловарної печі..... | 208 |
| Sikora V. S. Metasymmetrical groups of infinite rank and their order..... | 209 |
| Слободянюк О. В. Методика оцінки якості відео для стандарту високоефективного відекодеку HEVC..... | 210 |
| Смалько О. А. Використання безплатних програмних застосунків у роботі сучасного викладача..... | 212 |
| Сочинський Р. І., Кух А. М. Проект інтерактивного конструктора уроків..... | 212 |
| Стадник М. А. Оцінювання інформативних параметрів усталених зорових викликаних потенціалів з використанням методу ортогональних перетворень..... | 214 |
| Stepanchenko O. M., Martyniuk P. M. Mathematical model of an Information War..... | 216 |
| Стефанович Т. О., Щербовських С. В. Аналіз причин непрацездатності насосного вузла із полегшеним ковзним резервуванням..... | 217 |
| Сухорольський М. А., Андрусак І. В., Коляса Л. І. Системи степенів конформних відображень та спряжені до них системи функцій..... | 219 |
| Сухорольський М. А., Зашкільняк І. М., Оришин О. Г. Застосування методу конформних відображень до розв'язування задач акустики..... | 221 |
| Татауров В. П. Smart системи у вищій школі..... | 222 |
| Тепліньський Ю. В., Марчук Н. А. Про існування періодичних розв'язків різницевих рівнянь другого порядку в Банаховому просторі..... | 224 |
| Тимофієва Н. К. Задача розміщення модулів на поверхні та властивість симетрії..... | 226 |
| Удовенко С. Г., Чалая Л. Э. О применении машинного обучения с подкреплением в системах регулирования уровня запасов..... | 228 |
| Усманов Д. О. Математична модель хлоратора в процесі безперервного хлорування бензолу..... | 229 |
| Федоренко О. Ю. Параметрична схема ректифікаційної колони процесу виробництва етилового спирту..... | 231 |
| Федорчук В. А. Комп'ютерне моделювання нелінійних неоднорідних розподілених ланок електромеханічних систем..... | 232 |
| Фриз М. Є., Млинко Б. Б. Методологія опрацювання сигналів із використанням математичної моделі у вигляді умовного лінійного випадкового процесу..... | 234 |
| Фуртат Ю. О. Моделювання та персоналізована адаптація процесу інформаційної взаємодії користувача з автоматизованими системами..... | 236 |
| Чабанюк Я. М., Марич В. М., Будз І. С. Стохастична модель оцінки ризику при гасінні торф'яних пожеж..... | 238 |
| Chabanyuk Ya. M., Charnivchan V. Ya., Khimka U. T. Random evolution with small diffusion in Markov media..... | 239 |
| Чевська К. С. Вибрані питання класифікації задач по точності..... | 240 |

| | |
|--|-----|
| Чернецький І. С., Пащенко Є. Ю., Шаповалов Є. Б., Шаповалов В. Б. Доцільність створення систем онтологічного аналізу для інтеграції наукових знань..... | 241 |
| Черніга Р. М. Чи можливо розв'язати деякі нелінійні моделі, що описують реальні процеси? | 242 |
| Чорний Р. О., Кінаш О. М. Одна задача визначення оптимального розміру страхових премій..... | 243 |
| Шарьпанов А. В., Калмыков В. Г. Сегментация экспериментальных кривых с использованием переменной разрешающей способности | 244 |
| Шерман З. А. Квадратная разностная разметка некоторых графов | 246 |
| Шолохов А. В. Разработка математической модели погрешности приборного кватерниона ориентации, получаемого с малогабаритной астроизмерительной системы (МАИС) и её компьютерное моделирование | 247 |
| Щирба О. В., Ільчишин С. С. Розробка інструментарію для керування складними системами сформованих на базі експериментальних даних..... | 248 |
| Юрченко І. В. Стійкість розв'язку лінійного автономного стохастичного рівняння в частинних похідних з випадковими параметрами в правій частині..... | 250 |
| Ясинський В. К., Довгунь А. Я., Коржос О. Існування розв'язків стохастичних диференціальних систем зі скінченною післядією з інтегральними контракторами (СДС з ІК) та під дією зовнішніх випадкових збурень | 251 |
| Ясинський В. К., Довгунь А. Я., Перун Г. М. Достатні умови стійкості в середньому квадратичному розв'язків дифузійних динамічних систем автоматичного регулювання з зовнішніми збуреннями | 253 |
| Ясинський В. К., Юрченко І. В., Кисілюк У. М. Про існування сильного розв'язку дифузійного стохастичного диференціально-функціонального рівняння із зовнішніми випадковими збуреннями-процесами (СДФР ЗВЗ) | 254 |

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»
Інститут проблем моделювання в енергетиці імені Г. С. Пухова НАН України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
Інститут математики НАН України
OKAN UNIVERSITY (Istanbul, Turkish)
Ташкентський державний технічний університет (Узбекистан)
Державний університет Люблінська політехніка (Польща)
Університет Вітаутаса Великого (Литва)
Віденський університет (Австрія)

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ, ПРОГНОЗУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ

**ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ VII МІЖНАРОДНОЇ
НАУКОВОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ**

Підписано до друку 19.04.2016 р. Гарнітура «Таймс».
Папір офсетний. Друк різнографічний.
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 15,4. Обл.-вид. арк. 16,7.
Тираж 100. Зам. № 729.

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Надруковано в Кам'янець-Подільському національному
університеті імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.