

Міністерство освіти і науки України, Академія наук вищої школи України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
Інститут математики НАН України
Міжнародний інститут прикладного системного аналізу (Австрія)
Ташкентський державний технічний університет (Узбекистан)
OKAN UNIVERSITY (Istanbul, Turkish)
Люблінський технологічний університет (Польща)
Університет Вітаутаса Великого (Литва)



СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ, ПРОГНОЗУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ



**ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ VI МІЖНАРОДНОЇ
НАУКОВОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ**

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка
2014

ББК 22.18+22.19
С91

Друкується згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, протокол № 4 від 27 березня 2014 року.

Редакційна колегія:

І. М. Конет, д. ф.-м. н., професор (голова);
В. С. Щирба, к. ф.-м. н., професор (заступник голови);
П. С. Атаманчук, д. пед. н., професор;
І. В. Бейко, д. т. н., професор;
А. Ф. Верлань, д. т. н., професор, член-кор. НАПН України;
В. О. Гнатюк, к. ф.-м. н., професор;
В. В. Мендерецький, д. пед. н., професор;
Ю. В. Теплінський, д. ф.-м. н., професор;
В. А. Федорчук, д. т. н., професор.

Відповідальні секретарі:

В. А. Іванюк, к. т. н., доцент;
Т. О. Шамрай, викладач.

С91 Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації : тези доповідей VI міжнародної наукової конференції / [редкол.: І. М. Конет (голова) та ін.]. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. — 204 с.

У збірнику друкуються нові результати досліджень з проблем математичного моделювання, прогнозування та оптимізації.

Для наукових та науково-педагогічних працівників, докторантів, здобувачів, аспірантів і студентів вищих навчальних закладів.

ББК 22.18+22.19

А. Б. Андруховський

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ВИКОРИСТАННЯ СЕРВІСІВ WINDOWS AZURE ДЛЯ ОРГАНІЗАЦІЇ ПЕДАГОГІЧНОГО ТЕСТУВАННЯ

Характерною ознакою сьогодення є динамічний розвиток процесів глобалізації, що вимагає підвищення рівня автоматизації всіх інформаційних процесів, в тому числі і у галузі освіти. Останніми роками можна спостерігати зростання інтересу до «хмарних технологій». Розглядаючи хмарні технології, виділяють три основні моделі: інфраструктура як сервіс (IaaS), програмне забезпечення як сервіс (SaaS), платформа як сервіс (PaaS).

«Платформа як сервіс» також включає і інфраструктуру як сервіс. Прикладом PaaS може служити Windows Azure компанії Microsoft.

Windows Azure надає досить великий спектр сервісів, та, зважаючи на різне їх призначення сервісів, зосередимося на тих із них, які мають більший інтерес з точки зору використання інформаційно-комунікаційних технологій в освіті.

Очевидно, що у першу чергу такими сервісами будуть Web sites (веб-сайти), Virtual Machines (віртуальні машини), Cloud services (сервіси хмари). Щоб підтвердити цю думку, розглянемо можливість використання системи електронного тестування OpenTest у середовищі Windows Azure.

Нагадаємо, що OpenTest є web-застосунком, який написано на мові програмування PHP з можливістю використання БД MySQL (MariaDB) чи Microsoft SQL. Фактичними вимогами до використання OpenTest є EOM з ОС Windows чи Linux, веб-сервер APACHE/LIS з підтримкою PHP 5.3 та баз даних.

Наразі маємо 2 шляхи використання OpenTest у Windows Azure:

1. розгортання віртуальної машини, з подальшим розгортанням OpenTest;
2. розгортання web-сайту з установкою OpenTest.

Для реалізації першого способу потрібно обрати бажаний тип ОС та віртуальної машини і зробити її налаштування у хмарі. Після розгортання можна нарощувати потужності до максимально можливої (8 ядер, 56 GB RAM).

Для реалізації другого способу потрібно обрати лише підтримку БД. Початково сайт розгортається у так званому спільному середовищі, тобто на 1-й віртуальній машині, поряд з іншими застосунками. Після розгортання можна нарощувати потужність, змінюючи режими від спільного до стандартного, до максимальної у 4 ядра/7 GB.

Загалом, можна твердити, що використання хмарних технологій для електронного навчання має суттєві переваги перед традиційними. До таких переваг слід віднести:

- динамічність – можливість швидко розгортати/відключати сервіси у мережі;

- доступність – можливість розгортання сервісу у точці близькій до користувача. Наприклад, коли український ВНЗ організує навчання для українців США та Канаді, у такому разі сервіси можна розгорнути у північноамериканських центрах обробки даних;
- надійність – Угода про надання сервісів гарантує роботу протягом 99,9% часу використання.

А. В. Анікушин, Д. А. Номіровський

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ ПСЕВДОГІПЕРБОЛІЧНИХ МОДЕЛЕЙ В ДЕЯКИХ КЛАСАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

У циліндричній області $(t, \xi) \in Q = (0, T) \times \Omega$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена однозв’язна область з регулярною межею $\partial\Omega$, розглянемо лінійний псевдогіперболічний оператор третього порядку:

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + B(u),$$

де оператори A та B не залежать від часової змінної t і задаються стандартними загальними диференціальними виразами другого порядку за просторовими змінними. Вимагається, щоб оператор A був рівномірно еліптичним в області $\bar{\Omega}$. Функція стану $u(t, \xi)$ задовольняє однорідні початкові

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$$

та крайові умови

$$u|_{\Gamma_i} = \frac{\partial_L u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_i} = \left(a_0(x)u + \frac{\partial_L u}{\partial \vec{n}} \right) \Big|_{\Gamma_i} = 0,$$

де $\frac{\partial_L}{\partial \vec{n}}$ – диференціальний оператор крайових умов, що узгоджується з оператором L , $\Gamma_i = (0, T) \times \gamma_i$, γ_i – регулярні множини, з яких складається межа $\partial\Omega$ області Ω .

Оператор L описує ряд важливих прикладних процесів, наприклад, тепломасоперенос з урахуванням теплової нерівноваженості середовища, нестационарні процеси у середовищах з малою в’язкістю, процеси міграції хімічних речовин тощо.

У роботі для деякого природного розширення оператора L (узагальнена постановка) встановлені апіорні нерівності в негативних нормах та доведено теореми існування та єдиності узагальненого розв’язку в деяких класах узагальнених функцій скінченного порядку.

Л. О. Антоненко, І. Р. Клечак

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

ОПТИМІЗАЦІЯ ЖИВИЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА ДЛЯ РОСТУ БАЗИДІАЛЬНИХ ГРИБІВ *TRAMETES VERSICOLOR* І *T. ZONATUS*

При оптимізації ефективно використовуються математичні моделі процесу у вигляді лінійного поліному, які отримано в результаті обробки експериментальних даних за алгоритмом методу повного або дробового факторного експерименту, або нелінійного поліному, які отримані методом рототабельного планування експерименту. Дробовий факторний експеримент широко використовується при оптимізації складних біологічних процесів з великою кількістю факторів, що впливають на кінцевий результат. Суть методу полягає в тому, що при невеликій кількості дослідів одночасно змінюються всі параметри, від яких залежить процес, або тільки ті, що необхідно проаналізувати.

Об'єктами дослідження були штами базидіальних грибів – *C. versicolor* 353 і *C. zonatus* 5302 – перспективні продуценти біомаси з лікувальними властивостями.

Експерименти з оптимізації середовища для культивування виконували у відповідності до матриці планування дробового факторного експерименту ДФЕ репліка 2^{4-1} . Вивчали вплив на кінцеву концентрацію біомаси (y) штамів *C. versicolor* 353 і *C. zonatus* 5302 чотирьох факторів: x_1 – концентрація глюкози, г/дм³; x_2 – концентрація пивного сусла, см³/дм³; x_3 – концентрація дріжджового екстракту, г/дм³; x_4 – концентрація водневих іонів.

Для кожного з чотирьох факторів був визначений нижній і верхній рівні інтервалу варіювання: для першого фактора – 10 і 20 г/дм³ глюкози; для другого – 10 і 20 см³/дм³ пивного сусла; для третього – 3 і 5 г/дм³ дріжджового екстракту; для четвертого (рН) – 5,0 і 6,0 відповідно.

Статистично значущі коефіцієнти регресії (5 % рівень значущості) факторів моделі дробового факторного експерименту для штаму *T. versicolor* 353 мають такі значення: $b_0 = 10,41$, $b_1 = 1,14$, $b_2 = 0,35$, $b_3 = -1,09$, $b_4 = 0,74$.

Отримане в результаті факторного експерименту ДФЕ 2^{4-1} рівняння регресії (1) для *T. versicolor* 353 пов'язує рівні факторів (концентрацію компонентів середовища, значення рН) з виходом процесу (концентрація біомаси *T. versicolor* 353) в області поверхні відгуку, що вивчається.

$$y = 10,41 + 1,14 \cdot x_1 + 0,35 \cdot x_2 - 1,09 \cdot x_3 + 0,74 \cdot x_4 \quad (1)$$

де x_1 – концентрація глюкози, г/дм³; x_2 – концентрація пивного сусла, см³/дм³; x_3 – концентрація дріжджового екстракту, г/дм³; x_4 – концентрація водневих іонів.

Рівняння регресії дозволило визначити без додаткової постановки дослідів концентрацію біомаси в середині досліджуваної області поверхні відгуку. Очевидно, що на концентрацію біомаси штаму (y) особливий вплив здійснюють фактори x_1 , x_3 – концентрація глюкози та дріжджового екстракту.

Найбільша концентрація біомаси *T. versicolor* 353 – 14,0 г/дм³ спостерігалась при наступних значеннях факторів: $x_1 = 10$ г/дм³, $x_2 = 20$ см³/дм³, $x_3 = 3,0$ г/дм³, $x_4 = 5,0$.

Дані дробового факторного експерименту підтверджують результати розрахунків за рівнянням регресії (1), а саме, максимальна концентрація біомаси грибного міцелію 13,4 г/дм спостерігалась при значеннях факторів: $x_1 = 10$ г/дм³, $x_2 = 20$ см³/дм³, $x_3 = 3,0$ г/дм³, $x_4 = 5,0$.

Для *T. zonatus* 5302 нижній і верхній рівні інтервалу варіювання становили: для першого фактора – 10 і 15 г/дм³ глюкози; для другого – 10 і 20 см³/дм³ пивного сусла; для третього – 3 і 5 г/дм³ дріжджового екстракту; для четвертого (рН) – 5,0 і 6,0.

Аналіз результатів оптимізації складу середовища для *T. zonatus* 5302 показав, що статистично значущі коефіцієнти регресії (5 % рівень значущості) факторів моделі дробового факторного експерименту мають такі значення: $b_0 = 10,1$, $b_1 = 1,78$, $b_2 = 0,36$, $b_3 = -0,21$, $b_4 = 0,52$. Значущість коефіцієнтів перевіряли за критерієм Стьюдента.

Рівняння регресії для штаму *T. zonatus* 5302 має вигляд:

$$\hat{y} = 10,1 + 1,78 \cdot x_1 + 0,36 \cdot x_2 - 0,21 \cdot x_3 + 0,52 \cdot x_4 \quad (2)$$

де x_1 – концентрація глюкози, г/дм³; x_2 – концентрація пивного сусла, см³/дм³; x_3 – концентрація дріжджового екстракту, г/дм³; x_4 – концентрація водневих іонів.

Відповідно отриманого рівняння очевидно, що на концентрацію біомаси *T. zonatus* 5302 особливий вплив здійснюють фактори x_1 , x_4 – концентрація глюкози та рН середовища. Найбільша концентрація біомаси *T. zonatus* 5302 – 11,8 г/дм³ спостерігається при значеннях факторів: $x_1 = 15$ г/дм³, $x_2 = 20$ см³/дм³, $x_3 = 3,0$ г/дм³, $x_4 = 6,0$.

Дані дробового факторного експерименту підтверджують результати розрахунків за рівнянням регресії (2): максимальна концентрація біомаси штаму *T. zonatus* 5302 12,5 г/дм³ спостерігається при $x_1 = 15$ г/дм³, $x_2 = 20$ см³/дм³, $x_3 = 3,0$ г/дм³, $x_4 = 6,0$.

Таким чином, з використанням методу дробового факторного експерименту отримано адекватні рівняння (1) і (2), що описують моделі росту штамів *T. versicolor* 353 і *T. zonatus* 5302 в глибинній культурі.

Проведене глибинне культивування на комплексному середовищі, отриманому в результаті оптимізації, забезпечувало збільшення в 2,5 рази концентрації біомаси *T. versicolor* 353 (до 14 г/дм³) на 5-ту добу культивування порівняно з показниками на вихідному середовищі.

Таким чином, за допомогою методів математичного планування теоретично розраховано та експериментально доведено оптимальний склад комплексного живильного середовища для штамів *T. versicolor* 353 і *T. zonatus* 5302.

А. В. Атаманюк

Хмельницький інститут МАУП, м. Хмельницький

МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ПЕРЕВЕЗЕНЬ В ЛОГІСТИЦІ

На сучасному етапі на ринку транспортних послуг конкуренція набуває якісно нових особливостей: на фоні підвищення витрат на перевезення, посилення вимог до автотранспортних засобів, підвищились вимоги до якості процесу перевезення. В таких умовах функціонування підприємства неможливе без наявності ефективної системи керування. Сьогодні питання автоматизації транспортних підприємств перестає бути питанням технологій, а стає засобом підвищення ефективності бізнес-процесів, способом нової організації економічної діяльності.

Одним з найбільш ефективних варіантів розв'язання задач зниження витрат і поліпшення якості процесу перевезення є впровадження інформаційних систем маршрутизації, обліку та планування на автотранспортному підприємстві. Загалом таким реальним інструментом розвитку є система оптимізації вантажних перевезень.

Такими задачами займається логістика.

Логістика – це концепція, інтегрована функція (існує у формі логістичної системи), наукова дисципліна про управління потоками в мікроекономічних системах [1, с.5].

Логістичний аналіз досліджень показує, що створення оптимізованих маршрутів дозволяє точно визначити об'єм перевезень вантажів із підприємств, кількість транспортних засобів, що здійснюють ці перевезення, сприяють скороченню транспортних засобів під завантаженням і розвантаженням, ефективному використанню рухомого вмісту та вивільненню з сфер звернення значних матеріальних ресурсів-споживачів. Планування перевезень дозволяє підвищити виробництво транспортних засобів при одночасному зниженні кількості рухомого вмісту, що потрапляє на підприємство при тому ж об'ємі перевезень.

Для вирішення таких задач як оптимальне керування перевезень найефективніше застосувати їх моделювання, тобто побудова логістичних моделей.

Однією із логістичних моделей є маршрутизація транспортного засобу з часовими вікнами, яка розв'язується за допомогою наступних евристичних методів: ефективної евристики вставки; підходу, що базується на оптимізації колонії мурах; генетичних алгоритмів; використовуючи метаевристики, алгоритму забороненого пошуку, евристики адаптивного пошуку відкритої області тощо. У роботі проводиться порівняння цих методів розв'язання з алгоритмами, що базуються на допусках [2].

Використовуючи теорію допусків [3] значно спрощується знаходження оптимального рішення задачі маршрутизації шляхом зменшення об'єму досліджень.

Розроблено Max-Regret евристики для задачі маршрутизації з часовими вікнами, що базуються на верхніх та нижніх допусках. Для цього спочатку було вибрано можливі релаксації для задачі маршрутизації пересування транспортного засобу з часовими вікнами, розроблено алгоритми обчислення і

перерахунку верхніх і нижніх допусків для релаксацій задачі маршрутизації (на основі методу гілок та меж); проведено статистичний аналіз значень верхніх допусків відносно витрат при прогнозі дуг в оптимальних рішеннях початкової задачі маршрутизації (за допомогою Rand Index).

Якщо створено оптимальні маршрути і дотримуватись термінів доставки, то виробничі запаси споживачів скорочуються в 1,5-2 рази, знижуючи тим самим витрати на складування. Необхідність маршрутизації перевезень вантажів ще у тому, що маршрути дають можливість співставлення проектів поточних планів та оперативних заявок на транспорт, що виходять з дійсних об'ємів перевезень.

Таким чином, розробка ефективних маршрутів і проектів планів перевезень сприяє своєчасному та безперебійному виконанню постачання продукції та ефективній взаємодії організацій-постачальників, організацій-одержувачів та автотранспортних організацій. Логістична модель оптимальних перевезень є особливо актуальною в умовах даної економічної ситуації.

Список використаних джерел:

1. Окландер М.А. Логістика : підручник / М.А. Окландер. – К. : Центр учбової літератури, 2008. – 346 с.
2. Stefan Ropke, David Pisinger An Adaptive Large Neighborhood Search Heuristic for the Pickup and Delivery Problem with Time Windows. – 2005. – P. 1-30.
3. В. Goldengorin, G. Jager, P. Molitor Tolerances Applied in Combinatorial Optimization // Journal of Computer Science 2 (9). – 2006. – P. 716-734.

М. Я. Бартіш, О. В. Ковальчук

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ТРИКРОКОВИЙ РІЗНИЦЕВИЙ АНАЛОГ МЕТОДУ ІЗ ПОРЯДКОМ ЗБІЖНОСТІ $1 + \sqrt{2}$ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо рівняння

$$P(x) = 0, \text{ де } P: R^n \rightarrow R^n. \quad (1)$$

Для розв'язування рівняння (1) використовують класичний метод Ньютонів та його модифікації, які мають у формулах похідні першого, а то й вищих порядків. Часто на практиці виникає проблема обчислень похідних оператора $P(x)$.

Пропонується трикроковий метод для задачі (1):

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - [P(x_0, \theta_0)]^{-1} P(x_0) \\ \theta_k &= x_k - [P(x_{k-1}, \theta_{k-1})]^{-1} P(x_k), \\ v_k &= x_k - [P(x_k, \theta_k)]^{-1} P(x_k) \\ x_{k+1} &= \arg \min \|P(\theta_k + \lambda_k (v_k - \theta_k))\| \end{aligned} \quad (2)$$

де $\theta_0 = \bar{x}_0$ – близьке до x_0 , $k = 1, 2, \dots$.

Очевидно, що x_1 даного методу співпадає з першим наближенням, отриманим за різницевим методом Ньютона. Для обчислення точок θ_k використовуються значення поділених різниць, вже відомі з попереднього кроку. Таким чином, метод (3), не вимагає значної кількості додаткових обчислень на кожній ітерації в порівнянні з методом (2), виконується лише одновимірною мінімізацією.

Проведені теоретичні дослідження алгоритму (2) і апробацію на тестових прикладах, яка показала ефективність запропонованого алгоритму в сенсі кількості обчислень. Особливо ефект відчутний у випадку виродженої матриці Якобі в точці розв'язку, а також для достатньо великих $n > 10$.

В. Є. Бахрушин, А. В. Бахрушин

Класичний приватний університет, м. Запоріжжя

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОГО ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПРИ ВІДБОРІ АБІТУРІЄНТІВ

Останнім часом в Україні склалася практика, коли МОН щорічно затверджує обов'язкові для всіх вищих навчальних закладів умови прийому студентів. Вони визначають правила формування конкурсного балу абітурієнта, сертифікати ЗНО, потрібні для участі в конкурсі на конкретні напрями підготовки, тощо. Сьогодні для цього використовують просте підсумовування балів ЗНО та середнього балу атестату про загальну середню освіту. Така методика формування конкурсного балу є достатньо прозорою і простою з погляду організації вступної кампанії, але вона має також істотні недоліки. Одним з них є те, що вона практично виключає університети з процесу відбору майбутніх студентів. У проектах нових законів про вищу освіту пропонується застосування зваженої суми. Але існують і інші варіанти. Зокрема, це метод головного критерію, коли встановлюються обмеження на кожну оцінку з непрофільних дисциплін або їх середнє значення, а далі відбір здійснюється на основі ранжирування результатів ЗНО з профільної дисципліни. Також можливі мінімаксні, максимаксні та деякі інші підходи до визначення конкурсного балу. Показано, що використання різних методів оцінювання абітурієнтів створює можливість гнучкішого та більш адекватного врахування специфіки конкретних напрямів підготовки та ВНЗ при відборі абітурієнтів. Зокрема, це дає змогу враховувати ступень використання конкретних знань шкільної програми при подальшому навчанні, вимоги до загальної ерудиції абітурієнтів, сформованості їх інтересів і успішності в обраній галузі знань тощо. Використання методів прийняття рішень в умовах невизначеності надає також можливість більш адекватно враховувати невизначеність результатів ЗНО, пов'язану із статистичними похибками вимірювань та неповною відповідністю його тестів загальним вимогам освітнього тестування. Мовою R розроблено програмне забезпечення для автоматизації відбору студентів при різних принципах визначення їх конкурсного балу.

Л. Д. Бачишина

Національний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне

АНАЛІЗ ДИНАМІКИ ВРОЖАЙНОСТІ ЗЕРНОВИХ КУЛЬТУР В РЕГІОНАХ УКРАЇНИ

За останні роки Україна стала одним з найкрупніших світових зернових експортерів. У зв'язку з цим актуальною є задача моделювання та прогнозування обсягів зерновиробництва в різних регіонах України.

Проведено загальний аналіз динаміки врожайності зернових в Україні за період 1955-2013 рр. У роботі 1 було розкрито особливості динаміки зерновиробництва в Україні. На протязі 1955-1990 років виробництво зерна зростало, що було пов'язано з впровадженням нових сортів та технологій. Зниження врожайності на початку 80-х років ХХ століття є наслідком зниження природної родючості ґрунтів через техногенний підхід до розвитку сільського господарства, що спричинив зменшення гумусового шару ґрунту, привів до погіршення екологічної обстановки, став початком екологічної кризи на селі.

У 90-ті роки до екологічної кризи додався розпад колективної системи сільськогосподарського виробництва. Це привело до різкого спаду зерновиробництва. Починаючи з 2001 року обсяг зерновиробництва в Україні зростає. Якісного перелому у зерновиробництві вдалося добитися завдяки використанню високопродуктивного насіннєвого матеріалу, сучасних технологій та нових форм господарювання.

Для відображення складної динаміки врожайності зернових в Україні авторами був використаний полілінійний тренд, який складається з трьох частин: періоди 1955-1990 рр., 1990-2000рр. та 2000-2013 рр. Для кожного із вказаних вище періодів нами побудовано лінійні тренди виду $\bar{y}_t = a + bt$ та розраховані параметри трендової моделі для всіх 25 областей України. Вибір типу тренду був обумовлений візуально та на основі критерію коефіцієнта детермінації. Перевірка адекватності трендових моделей здійснювалася шляхом аналізу ряду залишків з використанням критеріїв випадковості, незалежності, нормального закону розподілу та рівності нулю середнього значення.

Отримані регресійні моделі були нами використані для побудови прогнозу врожайності зернових на 2014-2017 роки.

Список використаних джерел:

1. Грицюк П.М. Аналіз, моделювання та прогнозування динаміки врожайності озимої пшениці в розрізі областей України / П.М. Грицюк. – Рівне : НУВГП, 2010. – 350 с.

I. В. Бейко

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

СМАРТФОНИ ТА WOLFRAM ALPHA ВІДКРИВАЮТЬ ЕПОХУ ОСВІТИ НАЙВИЩОЇ ЯКОСТІ

Світ вбігає в епоху Знань, де рівень благополуччя й достатку країни буде визначатися інтелектуальним потенціалом нації, де всі будуть вчитися впродовж життя, де новітні досягнення світової науки будуть впроваджуватися чимскоріше в конкурентних баталіях на міжнародній арені. Тому підготовка сучасного висококваліфікованого фахівця вже вимагає опанування математично-комп'ютерними методами та засобами видобування нових знань із наявних нагромаджень різнорідних математичних моделей різних рівнів агрегації від найпростіших фізичних, хімічних, біологічних, фінансово-економічних законів та закономірностей до складних соціально-«майданних» та загально планетарних глобальних процесів і систем.

За допомогою досягнень у розвитку математично-комп'ютерного інструментарію оптимізації та його всеохоплюючих глобальних впроваджень земляни входять в нову еволюційну епоху із переходом від епохи *дарвінівської «еволюції до кращого»* (яка відбувалася і відбувається на основі більших ймовірностей виживання кращих/сильніших у боротьбі за життєві ресурси та посиленням їх потомства) іде епоха *наукової «еволюції до оптимального»*, що вже відображається у віртуальному світі Wikipedia із зародженням Об'єднаної Уніфікованої Науки – науки *оптимізованого* добування нових знань та *оптимізованого* використання здобутих нових знань, зокрема:

- *оптимізованого* добування нових знань із інтернет-сховищ різнорідних баз даних та експертних баз знань (datamining);
- *оптимізованого* перекладання здобутих нових знань у чарунки «менделєєвської таблиці» Об'єднаної Уніфікованої Науки;
- *оптимізованого* коригуванням цілей та завдань на наступні етапи розвитку всіх п'яти напрямків Об'єднаної Уніфікованої Науки, а саме:
 - (1) оптимізованого поповнення даних спостережень;
 - (2) оптимізованого виявлення нових законів та закономірностей на основі поповнюваних даних;
 - (3) оптимізованого вдосконалення наукового інструментарію для відкриття нових знань, законів та закономірностей реального світу;
 - (4) розвитку фундаментальних теорій та методів наукових досліджень;
 - (5) та інтеграції розрізаних наукових напрямів у Об'єднаній Уніфікованій Науці.

Отже, до нових завдань освіти додається:

- удосконалення навчальних програм для переходу від *зазубрювання* нових знань до індивідуально орієнтованого *видобування* нових знань активними натурними чи обчислювальними експериментами у

посіданні із активним відшукуванням всієї потрібної додаткової інформації в інтернет-мережах;

- опанування концептуальними методами наукового видобування нових знань на основі даних натурних і обчислювальних експериментів (заради цього до загальнообов'язкових предметів японської середньої школи вже включено робастну статистику та вищу математику);
- замість помилкового заповнення математичних дисциплін далекими від математики ребусами та «спортивними вправами-тренуваннями» на їх надшвидке розгадування треба рішуче переходити до все більш узагальнених та більш ускладнених задач за до їх розв'язування за допомогою новітнього математично-комп'ютерного інструментарію, як це вже в багатьох країнах здійснюється, наприклад, із використанням «інтелектуально потужного» WolframAlpha;
- замість навчати *розв'язувати* задачі із повними даними потрібно сміливіше переходити до навчання *формулювати* задачі навколишньої реальності із неповними даними та навчати розв'язувати такі задачі (адже задачі з неповними даними також мають правильні математично точні відповіді).

Було би помилково стверджувати, що вправи на швидкісне множення римських чисел не є корисними для розвитку математичних здібностей дитини, але ж високоякісне навчання будуватиметься не на корисних вправах, а будуватиметься на *найкорисніших* вправах. Замість спортивно швидкісного витягування інтегралів за допомогою зазубреної таблиці інтегралів було би набагато корисніше перерозподілити навчальні години з інтегрування також і на наближене інтегрування *будь-яких* функцій багатьох змінних на *будь-яких* областях інтегрування за допомогою хоча б найпростіших чисельних методів з використанням хоча б найпростіших смартфонів із найпростішим Excel? Адже все більша є практична потреба у навчанні учнів та студентів *формулювати* та *наближено* розв'язувати все більш ускладнені задачі, зокрема, задачі на відшукування невідомих *причинно-наслідкових залежностей*. Тому й удосконалення математично-комп'ютерного інструментарію для добування нових знань здійснюється зазвичай за допомогою узагальнення математичних задач та уніфікації узагальнених методів їх наближеного розв'язання.

Новітній математично-комп'ютерний інструментарій вже допомагає суттєво оптимізувати індивідуально орієнтовані програми навчання майже з усіх навчальних дисциплін. Новітні уніфіковані методи комп'ютеризованого розв'язування все більш узагальнених задач розвивають зацікавленість до них в учнів та студентів і підвищують інтерес до навчання. І цей підвищений інтерес до поглиблення знань буде зростати, оскільки новітні електронні засоби дистанційного навчання вже відкрили доступ до безплатного опанування новими знаннями, які вже викладають в Інтернет провідні університети світу. Щоб слухати курси дистанційного навчання із провідних університетів світу зовсім не обов'язково бути зарахованим до вищого навчального закладу – достатньо тільки створити свій обліковий запис на www.edx.org і записатися на бажані курси будь-якого *університету-партнера*. Для цього треба знати англійську мову, яку також можна вивчати безкоштовно і самос-

тійно як на edX.org так і на інших ресурсах. Мотивацією для проходження курсів є отримання сертифікатів та можливостями опанувати найновішими математично-комп'ютерними методами розв'язування складних проблем математичного моделювання й оптимізації в різних сферах науки й техніки, різними методами та універсальним безоплатним (open) програмним забезпеченням Octava, Python, WolframAlphatoщо.

І. В. Бейко, А. Поліщук, М. В. Полторацький, М. Шаповал

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КЕРОВАНИХ СИСТЕМ З ВИКОРИСТАННЯМ ЧИСЕЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Сучасні методи адекватної оптимізації нелінійних керованих систем та керованих підсистем в реальних умовах при наявності збурень та неповних даних здійснюються із використанням чисельних алгоритмів. Основні труднощі побудови адекватних чисельних алгоритмів пов'язані зазвичай із наявністю похибок дискретних апроксимацій похідних по часу і по фазових координатах, що породжують похибки в чисельних алгоритмах для обчислення фазових траєкторій і можуть призводити до надто великих похибок у розрахунку оптимальних керувань, особливо в умовах нестійких чисельних алгоритмів для обчислення фазових траєкторій. Інші добавки до похибки чисельних розв'язків привносяться можливою неповнотою даних про параметри керованих систем та керованих підсистем. Додаткові труднощі оптимізації нелінійних систем виникають також і через можливу відсутність оптимального керування у допустимих множинах вимірних функцій, що пов'язано із можливою неопуклістю допустимої множини швидкостей нелінійної керованої системи у просторі її фазових станів в околі оптимальної фазової траєкторії. У таких складних оптимізаційних задачах оптимальними керуваннями є узагальнені функції із класів невимірних функцій, які не будуються чисельними методами.

Для зменшення похибок чисельних алгоритмів та для зменшення сумарної похибки кінцевого результату у кожному окремому випадку будуються спеціалізовані чисельні алгоритми підвищеної точності. Алгоритми підвищеної точності будуються на основі використання методів асимптотично розв'язуючих операторів високих порядків, а підвищення точності чисельної побудови наближених узагальнених оптимальних керувань здійснюється на основі використання опуклих оболонок допустимих множин фазових швидкостей та на основі використання методів внутрішньої точки для сумісного розв'язання прямих та двоїстих оптимізаційних задач швидкозбіжними квазі-ньютонівськими чисельними алгоритмами. Модулі програмного забезпечення для реалізації алгоритмів підвищеної точності в обчисленні фазових траєкторій, траєкторій прямих і спряжених систем та оптимальних керувань створюються у середовищах Delphi, Matlab, Mathematica та Python.

I. Beyko*
P. Zinko**

*National technical university of Ukraine «Kiev politechnic institute»

** Taras shevchenko national university of Kyiv

OPTIMIZED SIMULATORS OF STOCHASTIC OPTIMIZATION

We consider complex systems of control subsystems with geometry and stochastic incomplete data. The phase trajectories $x_{ki}(t, u_{ki}, q_{ki}, \theta_{ki})$ of the k -th subsystem with controls u_{ki} , random values $\theta_{ki} \in \mathbb{R}^{n_{ki}}$ and with given sets Q_{ki} of unknown admissible values of parameters q_{ki} , are described by systems

$$\begin{aligned} t_0 &= \bar{t}(u_{k0}, q_{k0}, \theta_{k0}) \in R, \quad x_{k0}(t_0) = \bar{x}_{k0}(t_0, u_{k0}, q_{k0}, \theta_{k0}) \in R^{n_{ks}}, \\ d_{kr} x(t) &= a_{ki}(x_{ki}(t), u_{ki}, q_{ki}, \theta_{ki}, t, \omega_{ki}(x_{ki}(t_i), t_i, q_{ki}, \theta_{ksi}, t)) d, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \\ t_{i+1} &= \tau(x_{k(i-1)}(t_i), t_i, u_{ki}, q_{ki}, \theta_{ki}, z_{ki}) > t_i, \\ x_{k(i+1)}(t_{i+1}) &= \psi(x_{ki}(t_{i+1}), t_{i+1}, u_{k(i+1)}, \theta_{k(i+1)}, z_{k(i+1)}) \end{aligned}$$

with distribution functions $\tilde{F}_{ki}(\tilde{\theta}_{ki} | (x_{k(i-1)}(t_i), t_i, q_{k(i-1)}, \theta_{k(i-1)}, z_{k(i-1)}))$ of θ_{ki} . In order to develop high order solve operator methods aiming high precision calculating of $x_{ksi}(t, \bar{p}, \bar{q}, \bar{\theta})$ for chosen \bar{q} , \bar{u} and realized $\bar{\theta}$ we implement the asymptotic solve operator approximation

$$\bar{x}(t+h) = p(t+h) + \int_t^{t+h} Q(\tau) \left(a(p(\tau), \bar{u}, \bar{q}, \bar{\theta}, \tau, \omega(x(t_i), t_i, \bar{u}, \bar{q}, \bar{\theta}, \tau)) - d \dot{x}(\tau) / d\tau \right) d\tau.$$

In [1] we have proved that for any admissible values of \bar{q} , \bar{u} , $\bar{\theta}$ the asymptotic equalities

$$\begin{aligned} p(\tau) &= x(\tau) + O(h^l), \\ d \dot{x}(\tau) / d\tau &= -Q(\tau) a'_x(p(\tau), \bar{u}, \bar{q}, \bar{\theta}, \tau, \omega(x(t_i), t_i, \bar{u}, \bar{q}, \bar{\theta}, \tau)) + O(h^k), \\ Q(t+h) &= I. \end{aligned}$$

imply the high order asymptotic equality

$$\bar{x}(t+h) = x(t+h) + O(h^s), \quad s=k+1+1,$$

in the neighborhood of the solution $x = x(\tau) \triangleq x(\tau, \bar{u}, \bar{q}, \bar{\theta})$ of the system

$$\begin{aligned} d \dot{x}(\tau) / d\tau &= a(p(\tau), \bar{u}, \bar{q}, \bar{\theta}, \tau, \omega(x(t_i), t_i, \bar{u}, \bar{q}, \bar{\theta}, \tau)), \\ \tau &\in (t, t+h) \subset [t_i, t_{i+1}]. \end{aligned}$$

The developed high order algorithms for $\bar{x}(t+h)$ calculating generalize the well known simulator

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) &= x(t_i) + a(x(t_i), u, q, \theta)(t_{i+1} - t_i) + b(x(t_i), u, q, \theta)(w(t_{i+1}) - w(t_i)) + \\ &+ \frac{1}{2} b(x(t_i), u, q, \theta) b^T(x(t_i), u, q, \theta) ((w(t_{i+1}) - w(t_i))^2 + t_i - t_{i+1}) \end{aligned}$$

for trajectories of stochastic control systems

$$dx(t) = a(x(t), u, q, \theta)dt + b(x(t), u, q, \theta)dw(t)$$

and they are implemented to calculate solutions

$$u^* = \arg \min_{u \in \Omega} E \max_{q \in Q} \tilde{f}(x(u, q, \theta), u, q, \theta)$$

of stochastic optimal control problems, using stochastic quasi-gradient mini-max algorithms [2,3].

References:

1. Бейко І.В. Методи високих порядків для розв'язування задач Коші та багатомірних крайових задач за допомогою асимптотично-розв'язуючих операторів / І.В. Бейко, П.М. Зінько // Математичне та комп'ютерне моделювання. – Кам'янець-Подільський : К-ПНУ, 2009. – Вип.1. – С. 18-25.
2. Бейко І.В. Задачі, методи і алгоритми оптимізації : навч. посібник / І.В. Бейко, П.М. Зінько, О.Г. Наконечний. – К. : Київський університет, 2012. – 799 с.
3. Ermoliev Yu.M. Stochastic quasi-gradient methods and their application to systems optimization / Yu.M. Ermoliev. – 1983. – P.1-37.

I. Beyko*,

O. Shchyrba, V. Shchyrba**

National technical university of Ukraine «Kiev politechnic institute»,

**Kamianetz-Podilsky Ivan Ohienko national university

IMPLEMENTATION OF ASYMPTOTIC SOLVE-OPERATORS AND INTERIOR POINT ALGORITHMS IN SEARCH FOR OPTIMAL CONTROLS

Numerical optimization algorithms of control processes with distribute parameters are based on the adequate reductions of the primary optimal control problems into mathematical programming problems. The reduction may be performed by replacing partial derivatives with difference approximations and by replacing criteria functionals by solve or asymptotic solve operators. The obtained linear/nonlinear programming problem may be solved by interior point algorithms [1]. Using line methods we may approximate control processes

$$A(x, u) \triangleq f_a(t, s, x(t, s), u(t, s), \frac{\partial x(t, s)}{\partial t}, \frac{\partial u(t, s)}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{\alpha_s} x(t, s)}{\partial t^{\alpha_s} \partial s^{\alpha_s}}, \frac{\partial^{\alpha_u} u(t, s)}{\partial t^{\alpha_u} \partial s^{\alpha_u}}) = 0$$

$$F_l(x, u) \triangleq \iint_{D_l} f_l(t, s, x(t, s), u(t, s), \frac{\partial x(t, s)}{\partial t}, \frac{\partial u(t, s)}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{\alpha_s} x(t, s)}{\partial t^{\alpha_s} \partial s^{\alpha_s}}, \frac{\partial^{\alpha_u} u(t, s)}{\partial t^{\alpha_u} \partial s^{\alpha_u}}) d \mathbf{d} \leq 0, \\ l = \overline{1, n_1},$$

$$H_i(x, u) \triangleq h_i(t, s, x(t, s), u(t, s), \frac{\partial x(t, s)}{\partial t}, \frac{\partial u(t, s)}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{\alpha_s} x(t, s)}{\partial t^{\alpha_s} \partial s^{\alpha_s}}, \frac{\partial^{\alpha_u} u(t, s)}{\partial t^{\alpha_u} \partial s^{\alpha_u}}) \leq 0, \\ i = \overline{1, n_2}$$

with criterion functional

$$F_0(x, u) \triangleq \iint_{D_1} f_l(t, s, x(t, s), u(t, s), \frac{\partial x(t, s)}{\partial t}, \frac{\partial u(t, s)}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{\alpha_s} x(t, s)}{\partial t^{\alpha_s} \partial s^{\alpha_s}}, \frac{\partial^{\alpha_s} u(t, s)}{\partial t^{\alpha_s} \partial s^{\alpha_s}}) d \mathbf{d} \quad l = \overline{1, n_1}$$

by optimal control problems with ordinary differential equations

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, T], \quad x(t_0) = x^0 \in R^n, \\ F_i(x, u, t_0, T) \triangleq \int_{t_0}^T h_i(x(t), u(t), t) dt + g_i(t_0, T, x(t_0), x(T)).$$

In cases of continue derivatives of functions $f, h_i: R^n \times \Omega \times R \rightarrow R^n$, $g_i: R \times R \times R^n \times R^n \rightarrow R$, $i = \overline{0, m}$, with respect to x , the optimal control $u^0(t)$ may be calculated as a maximizer of the function

$$\varphi(u, \psi^0(t), x^0(t), t) \triangleq (\psi^0(t), f(x^0(t), u, t)) - \sum_{i=0}^m \lambda_i^0 h_i(x^0(t), u, t),$$

where $x(t), \psi(t)$ is a nontrivial solution of the system

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \bar{u}^0(t), t), \quad x(\bar{t}_0) = \bar{x}, \\ \frac{d\psi(t)}{dt} = -\psi(t) f'_x(x(t), \bar{u}^0(t), t) + \sum_{i=0}^m \lambda_i h'_{ix}(x(t), \bar{u}^0(t), t), \\ \psi(\bar{t}^0) = \sum_{i=0}^m \bar{\lambda}_i^0 g'_x(\bar{t}_0, \bar{T}, \bar{x}, \bar{x}), \\ \psi(\bar{T}) = \sum_{i=0}^m \bar{\lambda}_i^0 g'_x(\bar{t}_0, \bar{T}, \bar{x}, \bar{x}), \quad x(\bar{T}) = \bar{x}. \\ \bar{t}_0 < \bar{T}, \quad \bar{\lambda}^0 \equiv (\bar{\lambda}_0^0, \bar{\lambda}_1^0, \dots, \bar{\lambda}_m^0) \geq 0, \quad \bar{\lambda} \equiv (\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m) \neq 0.$$

Taking into account that in many cases the evaluation of $(\bar{t}_0, \bar{T}, \bar{x}, \bar{x}, \bar{\lambda}^0, \bar{\lambda})$ may be a difficult problem, we develop iterative methods of evaluating maximizers of asymptotic solve operators instead of $\varphi(u, \psi^0(t), x^0(t), t)$.

The first example of such optimization problem is the inverse river pollution problem. The value of the concentration $x(t, z)$ of river water pollution at the distance coordinate z (along the river) at the time moment t depends on concentrations $x(t, 0) = u_1(t, p)$ at the initial point $z = 0$, on concentrations $x(0, z) = u_2(z, p)$ at the initial time $t = 0$, on the pollution sources intensities $u_3(t, z, p)$ at points z (industrial and agricultural production, sewage settlements, etc.), on the rate of flow $v(t, z, p)$ and on the coefficient of turbulent diffusion $a(t, z, p)$ at different points $z \in [0, b]$. These dependences are approximately described by differential equations with partial derivatives

$$\frac{\partial x(t, z)}{\partial t} = a(t, z, p) \frac{\partial^2 x(t, z)}{\partial z^2} + v(t, z, p) \frac{\partial x(t, z)}{\partial z} + u_3(t, z, p).$$

The solution of the inverse problem in search for pollution sources $u_3(t, z, p)$ is based on data measurements of concentrations $X(t_i, z_j)$ of river water contaminants at the observation points z_j , $j=1, 2, \dots, m$, in the time moments t_i and may be calculated as minimizer of the maximum deviation

$$\max_i \max_j \left| x(t_i, z_j) - X(t_i, z_j) \right|$$

on the given set P of admissible parameters $p \in P$, that satisfy all the additional constraints.

The second example is a rocket control problem in search for optimal controls $\bar{u}(t, x(t_0), \bar{x})$ of the system

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)),$$

that for given $x(t_0)$, $\bar{x}(t)$ and $\bar{X} \subset R^{n_x}$ minimize the time

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{u}, \bar{x}, \bar{X}) &= \arg \min_{u(t) \in U} t \mid t \geq t_0, x_i(t) = \bar{x}_i(t), i \in I \subset \{1, 2, \dots, n_x\} \\ &\quad \forall \tau \in [t_0, t] \quad x(\tau) \in \bar{X}. \end{aligned}$$

In simple cases of non-availability of phase restrictions the optimal control may be calculated as maximizer

$$\bar{u}(t) = \arg \max_{u \in U} (q(t), f(x(t), u)),$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = -[f'_x(x(t), \bar{u}(t))]^T q(t), x(\bar{T}(\bar{u}, \bar{x}, \bar{X})) = \bar{x}(\bar{T}(\bar{u}, \bar{x}, \bar{X}))$$

but with phase restrictions we calculate it as a maximizer of solve operator.

In this way we may calculate extremal controls $u = \bar{\bar{u}}: R \rightarrow R^{n_u}$, that for given $X^0 \subset R^{n_x}$, $Y^0 \subset R^{n_y}$, $I \subset \{1, 2, \dots, n_x\}$, $\varepsilon > 0$, $x(t_0) \in X^0$, $y(t_0) \in Y^0$ and

for given control system $\frac{dy(t)}{dt} = g(y(t), v(t))$ satisfy inequality

$\forall i \in I \mid x_i(\bar{\bar{T}}) - y_i(\bar{\bar{T}}) \leq \varepsilon$ in minimal time

$$\bar{\bar{T}} = \inf_{u(\cdot) \in U} \max_{v(\cdot) \in V} T_{uv}, T_{uv} = \min \{ \mid x_i(t) = y_i(t), i \in I \}.$$

If there exists the optimal control $\bar{\bar{u}}$ then the optimal value $\bar{\bar{u}}(t)$ may be calculated as the maximizer

$$\bar{\bar{u}}(t) = \arg \max_{u \in U} (q(t), f(x(t), u)),$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), \bar{\bar{u}}(t)), \quad \frac{dq(t)}{dt} = -[f'_x(x(t), \bar{\bar{u}}(t))]^T q(t)$$

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= g(y(t), \bar{v}(t)), \quad \frac{dw(t)}{dt} = -[g'_y(y(t), \bar{v}(t))]^T w(t), \\ \bar{v}(t) &= \arg \max_{v \in V} (w(t), g(y(t), v)), \\ \forall i \in I \quad q_i(\bar{T}) &= w_i(\bar{T}), \quad \forall i \notin I \quad q_i(\bar{T}) = w_i(\bar{T}) = 0, \\ x(t_0) &= \arg \max_{x \in X^0} (q(t_0), x), \quad y(t_0) = \arg \max_{y \in Y^0} (w(t_0), y), \\ \forall i \in I \quad x_i(\bar{T}) &= y_i(\bar{T}).\end{aligned}$$

In case of stochastic control systems

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), \omega), \quad \frac{dy(t)}{dt} = g(y(t), v(t), \omega), \quad \bar{x}(t_0) \in X^0$$

with random ω optimal controls $\bar{u}(t) = (x(t), y(t), \bar{p})$, $u : R^{n_x} \times R^{n_y} \rightarrow R^{n_x} \times P$, that for given $\alpha > 0$, $\beta > 0$, for given sets P , $X^0 \subset R^{n_x}$, $I \subset \{1, 2, \dots, n_x\}$, $J \subset \{1, 2, \dots, n_x\}$ and for all $i \in I$ satisfy inequalities $|x_i(\bar{T}) - y_i(\bar{T})| \leq \alpha$ and maximize the probability $E(p, t)$ of the event

$$\forall j \in J \quad |x_j(t) - y_j(t)| \leq \beta, \quad y(t_0) \in Y^0(\omega), \quad v(t) \in V(\omega),$$

is calculated as maximizer $\bar{p} \in P$, $\bar{x}(t_0) \in X^0$ of $\bar{E}(\bar{p}) = \arg \min_{p \in P} \max_{t \in [0, \bar{T}]} E(p, t)$.

In practical applications the terminal set $X(t, U) \times Y(t, V)$ with initial conditions $X^0 \times Y^0$ are divided into such Z_k , $Z = \bigcup_{k=1}^m Z_k$, with functions $B_k : Z_k \rightarrow R$ that for every state $(x(t), y(t)) \in Z_k^0$ sufficiently close to optimal control is calculated as maximizer

$$u(t) = \arg \max_{u \in U} (\nabla_x B_k(x(t), y(t)), f(x(t), u)).$$

This method is based on the fact that extremal controls $(u(t), v(t))$ for any initial values $(x(t), y(t))$ are solutions of the extremal system:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= f(x(t), u(t)), \quad \frac{dy(t)}{dt} = g(y(t), v(t)), \\ \frac{dq(t)}{dt} &= -[f'_x(x(t), u(t))]^T q(t), \quad \frac{dw(t)}{dt} = -[g'_y(y(t), v(t))]^T v(t), \\ u(t) &= \arg \max_{u \in U} (\nabla_x B_k(x(t), y(t)), f(x(t), u)), \\ v(t) &= \arg \max_{v \in V} (\nabla_y B_k(x(t), y(t)), g(y(t), v)), \\ \forall i \in I \quad q_i(\bar{T}) &= w_i(\bar{T}), \quad \forall i \notin I \quad q_i(\bar{T}) = w_i(\bar{T}) = 0, \\ x(t_0) &= \arg \max_{x \in X^0} (q(t_0), x), \quad y(t_0) = \arg \max_{y \in Y^0} (w(t_0), y), \\ \forall i \in I \quad x_i(\bar{T}) &= y_i(\bar{T}), \quad \bar{T} - \min.\end{aligned}$$

To solve these optimization problems minimizers of linearized solve operators are calculated by accelerated interior point algorithms as minimizers x of a corresponding linear programming

$$\min c^T x \mid Ax=b, x \geq 0.$$

In accordance with the Karush-Kuhn-Tucker theorem the optimal value x is calculated as a solution of the nonlinear system

$$Ax - b = 0, A^T y + z - c = 0, z_i x_i = 0, x \geq 0, z \geq 0.$$

In this way starting from any interior admissible point (x^0, y^0, z^0) , $x^0 > 0, z^0 > 0$ at the k -th iteration we calculate the solution $(\delta x, \delta y, \delta z)$ of the linearized at the point (x^k, y^k, z^k) Newton system

$$\begin{aligned} A \delta x &= r_p, A^T \delta y + \delta z = r_d, Z^k \delta x + X^k \delta z = r_a, \\ r_p &= b - Ax^k, r_d = c - z^k - A^T y^k, r_a = -X^k Z^k e \end{aligned}$$

to obtain $(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1}) = (x^k, y^k, z^k) + \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ in accordance with the following:

$$\begin{aligned} C &= (X^{-1} Z)^{-1}, ACA^T \delta y = r_p + C(r_d - X^{-1} r_a), \\ \delta x &= CA^T \delta y - C(r_d - X^{-1} r_a), \delta z = r_d - A^T \delta y \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \min_i \left(\frac{-x_i}{\delta x_i} \right) \mid \delta x_i < 0, \quad \alpha_2 = \min_i \left(\frac{-z_i}{\delta z_i} \right) \mid \delta z_i < 0,$$

$$\tilde{\alpha} = \min \{ \alpha_1, \alpha_2 \}, \quad \gamma^k = (x^k)^T z^k, \quad \tilde{\gamma}^k = (x^k + \tilde{\alpha}^k \delta x^k)^T (z^k + \tilde{\alpha}^k \delta z^k),$$

$$\sigma^k = \left(\frac{\tilde{\gamma}^k}{\gamma^k} \right)^2, \quad \mu^k = \sigma^k \left(\frac{\gamma^k}{n} \right),$$

$$r_a = \mu^k e - \Delta_a X^k \Delta_a Z^k e - X^k Z^k e,$$

де $\Delta_a X^k = \text{diag}(\delta x)$ і $\Delta_a Z^k = \text{diag}(\delta z)$, $ACA^T \Delta y = r_p + C(r_d - X^{-1} r_a)$, $\Delta x = CA^T \Delta y - C(r_d - X^{-1} r_a)$, $\Delta z = r_d - A^T \Delta y$,

$$(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1}) = (x^k, y^k, z^k) + \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta z).$$

References:

1. Beyko I.V. Problems, methods and algorithms of optimization / I.V. Beyko, P.M. Zinko, O.H. Nakonechny – Kyiv: «Kyiv University», 2012. – 799 p.
2. Bejko I.V. The unified methodology of solving operators as a new information technology in search for new knowledge and optimized decision making / I.V. Beyko // Proc. «The Information Technology Contribution to the Building of a Safe Regional Environment», AFCEA, Europe Seminar. – Kiev, 28-30.05.98. – P. 44-50.

В. О. Білокур

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

РЕГУЛЮВАННЯ ПОТУЖНОСТІ ГІДРОСТАНЦІЇ ПІД ЧАС ПАВОДКУ

Значна витрата води через споруди гідроелектричної станції під час паводку викликає підвищення горизонту нижнього б'єфу і зниження напору. Це призводить до зменшення потужності гідроелектричної станції (у ряді випадків досить значного). Іноді вдається дещо підвищити потужність агрегатів порушенням комбіна-

торної залежності поворотно лопатевих турбін, однак цей захід і навіть такий радикальний засіб, як ежекції в нижній б'єфу, не завжди відновлює потужність станції до необхідно для покриття максимуму величин .

На гідростанціях регулювання потужності в період паводку здійснюються шляхом збільшення скидання води через греблю за деякий час до настання добового максимуму навантаження енергосистеми. Це викликає зниження горизонту верхнього б'єфу і дає можливість в години максимуму зменшити або зовсім припинити скидання води через греблю. У результаті потужність гідростанції в години максимуму підвищується, але це досягається за рахунок додаткового зниження потужності в період підвищеного скидання через греблю [1].

Застосування такого методу регулювання потребує вирішення ряду питань розрахунковим шляхом [2]. До їх числа належить визначення необхідної глибини і тривалості спрацювання верхнього б'єфу, часу початку і кінця спрацювання, величини та тривалості зменшення скидання через греблю під час максимуму .

Отже, розрахунок повинні бути автоматизованими і наочними (бажано у вигляді номограм), щоб ними міг скористатися черговий персонал.

Список використаних джерел:

1. Баркан Я.Д. Регулирование мощности гидростанции во время паводка / Я.Д. Баркан // Орган Министерства электростанций СССР. Журнал – М. : Госэнергоиздат, 1956. – №5. – С. 35-38.
2. Асарен А.Е. Потенциал малых ГЭС стран СНГ / А.Е. Асарен // Оценки и реальность: Журнал. – М. : АСТ Москва, 2013. – №1. – С. 25-29.

А. Я. Бомба*,

О. М. Гладка**

*Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне,

**Національний університет водного господарства

та природокористування, м. Рівне

СИНТЕЗ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ, СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ТА ДЕКОМПОЗИЦІЇ ЗАДАЧІ ПРИ МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ НЕЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ВИТІСНЕННЯ У СЛАНЦЕВИХ ПЛАСТАХ

На основі синтезу числових методів комплексного аналізу [1] та сумарних зображень [2] у поєднанні з декомпозицією задачі [3] розроблено новий ефективний конструктивний підхід до математичного моделювання процесів витіснення із ущільнених скелясто-осадових порід (що є малопроникними), в яких для промислової (економічно вигідної) експлуатації існуючі мікротріщини (що містять вуглеводні) об'єднані в єдину структуру між собою та з свердловинами за допомогою штучно утворених тріщин гідравлічного розриву пласта [4].

Запропонована математична модель базується на лінійному фільтраційному законі та рівнянні нерозривності і розв'язується шляхом переходу від прямих задач на знаходження комплексного квазіпотенціалу поля до обернених – на знаходження характеристичної функції течії за припущення, що тріщини гідророзриву розміщені строго вздовж ліній течії. У випадках, коли тріщини дещо відхиляються від ліній течії, що, як правило, відповідає реальному процесу, для оцінки основних фільтраційних характеристик можна скористатись методом мажорантних областей Г.М. Положого [5], взявши за основу розрахунки, зроблені за запропонованою методикою.

За наявності кількох тріщин гідророзриву робиться декомпозиція області на підобласті з «накладками» шляхом використання альтернуючого методу Шварца, що дає можливість ефективно «склеювати» розв'язок на лініях розриву коефіцієнта проникності, а також – розпаралелювати обчислювальний процес. Вузли динамічної сітки розраховуються за формулами сумарних зображень, що є розв'язками крайових задач для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами.

Розроблений підхід успішно використовується і для числового знаходження розв'язків деякого класу обернених задач – задач ідентифікації значень кусково-сталого коефіцієнта проникності у підобластях сталості і значень витрат (потоків) через ділянки границі, обмежені лініями течії, що розділяють шари, у криволінійних нелінійно-шаруватих областях. Ефективність запропонованої методики продемонстрована на прикладі розрахунків характерних параметрів фільтрації у еліптичної форми елементі сланцевого пласта.

Список використаних джерел:

1. Методи комплексного аналізу: Монографія / А.Я. Бомба, С.С. Каштан, Д.О. Пригорницький, С.В. Ярошак – Рівне : НУВГП, 2013. – 415 с.
2. Ляшко И.И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / И.И. Ляшко, И.М. Великоиваненко. – К. : Наукова думка. – 1973. – 264 с.
3. Бомба А.Я. Синтез числовых методов квазиконформных отображений, сумарних зображень та декомпозиції області для розв'язання нелінійних крайових задач у шаруватих середовищах / А.Я. Бомба, О.М. Гладка. // Журнал обчисл. та прикладн. матем. – К., 2013. – №1 (111). – С. 35-45.
4. Бомба А.Я. Математичне моделювання нелінійних фільтраційних процесів у сланцевих пластах / А.Я. Бомба, О.М. Гладка. // Фіз.-мат. моделюв. та інформаційні технології. – Львів, 2013. – № 18. – С. 32–42.
5. Положий Г.М. Метод движения граничных точек и мажорантных областей теории фильтрации // УМЖ. – К.: Изд-во КГУ. – 1953. – 5, № 4.

А. Я. Бомба, Л. Л. Крока

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

ЧИСЛОВИЙ МЕТОД КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЗОН ПІДВИЩЕНОЇ ПРОВІДНОСТІ

Розглядається задача електроімпедансної томографії в обмеженій області з кусково-сталім коефіцієнтом електричної провідності. Нехай G, G_0 – однозв'язні криволінійні області в \mathbb{R}^2 , обмежені кусково-гладкими кривими $\partial G, \partial G_0$ відповідно, причому $G_0 \subset G$. Необхідно визначити функцію квазіпотенціалу $\varphi(x, y)$ за умови ідентифікації границі ∂G_0 , для яких:

$$\operatorname{div}(\kappa \cdot \operatorname{grad} \varphi) = 0, \quad \kappa(x, y) = \begin{cases} \tilde{\kappa}, & (x, y) \in G \setminus G_0, \\ \kappa_0, & (x, y) \in G_0, \end{cases} \quad \tilde{\kappa} \gg \kappa_0;$$

$$\varphi(M) = \varphi_*, \quad \int_{AM} \kappa \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl = \tilde{\psi}(M), \quad M \in AB; \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{AD} = 0,$$

$$\varphi(P) = \tilde{\varphi}(P), \quad P \in AD; \quad \varphi(T) = \varphi^*, \quad T \in CD; \quad \int_{AN} \kappa \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl = Q, \quad N \in BC$$

$$(\forall A, B, C, D \in \partial G = AB \cup BC \cup CD \cup DA),$$

де \vec{n} – вектор біжучої нормалі до відповідної кривої; Q – потік векторного поля через G ; $\tilde{\varphi}(x, y), \tilde{\psi}(x, y)$ – визначені неперервні обмежені функції ($\varphi_* \leq \tilde{\varphi}(x, y) \leq \varphi^*, 0 \leq \tilde{\psi}(x, y) \leq Q$).

На основі числових методів комплексного аналізу [1] запропоновано підхід до розв'язання поставленої задачі. Відповідний алгоритм реалізовано шляхом почергового фіксування параметрів «квазіконформної подібності в малому», граничних та внутрішніх вузлів сітки [1].

Список використаних джерел:

1. Методи комплексного аналізу: Монографія / А.Я. Бомба, С.С. Каштан, Д.О. Пригорницький, С.В. Ярошак. – Рівне: НУВГП, 2013 – 415 с.

А. Я. Бомба, С. В. Ярошак

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ МОДЕЛЮВАННЯ ТРИФАЗНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ В НАФТОГАЗОВИХ ПЛАСТАХ

При дослідженні процесу розробки нафтогазових родовищ з використанням їх математичних моделей стає питання вибору певної абстракції представлення взаємодії рідин, що рухаються в пласті, між собою та скелетом, зокрема. Складність такого вибору, в першу чергу, пов'язана з процесом

ми, які протікають в пласті, та режимом його розробки. Так, наприклад, коли пластовий тиск перевищує деяке критичне значення, яке відповідає невідокремленому сумісному руху газу та нафти, такий процес можна описати двофазною моделлю [1]: однією із фаз є суміш нафти та газу, а другою – вода. Проте, при відсутності активної підтримки пластового тиску ззовні з наступним відбором флюїдів із пласта через експлуатаційні свердловини, суміш газу та нафти починає відокремлюватися з утворенням окремих фаз, що призводить, в свою чергу, до руху в пласті більш складної гетерогенної системи, складовими якої є нафта, газ та вода [1].

У цій роботі комплексний підхід [2] до математичного моделювання процесів двофазної фільтрації в горизонтальних нафтогазових пластах узагальнено на випадок більш складної гетерогенної системи, що складається з водяної, нафтової та газової фаз. При цьому розроблені в [2] числові алгоритми розв'язання відповідних задач двофазної фільтрації модифіковано шляхом введення додаткових розрахункових процедур, що враховують сумісний рух трьох фаз та перераховують відповідні фільтраційні характеристики згідно з основними ідеями методу поетапної фіксації характеристик середовища та процесу.

Список використаних джерел:

1. Zhangxin C. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Computational Science and Engineering) / C. Zhangxin, H. Guanren, M. Yuanle // Paperback. Society for Industrial and Applied Mathematic. – 2006. – 531 pp.
2. Методи комплексного аналізу: Монографія / А.Я. Бомба, С.С. Каштан, Д.О. Пригорницький, С.В. Ярошак. – Рівне : НУВГП, 2013. – 415 с.

Dimiter Velev*,

Plamena Zlateva**

*Department of Information Technologies and Communications
University of National and World Economy, Sofia, Bulgaria,

**ISER, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria

SOCIAL NETWORKING COMMUNICATIONS IN EMERGENCY MANAGEMENT

Due to natural disasters there are heavily increased communications since people seek to contact family and friends in disaster zones, to seek information about food, shelter and transportation. Social media has played a significant role in disseminating information about these disasters by allowing people to share information and ask for help. Social media are also becoming vital to recovery efforts after crises, when infrastructure must be rebuilt and stress management is critical. The extensive reach of social networks allows people, who are recovering from disasters, rapidly connect with needed vital resources. Many groups exist in the most popular social networking sites, allowing individuals involved in various aspects of emergency awareness and preparedness to connect, discuss, and share knowledge in specific fields.

The paper discusses the use of social networking communications in the management of natural disasters. A brief overview of natural disasters is given. The social networking communications and social media are defined and their basic characteristics, functions and components are described. Communication types and the means for their implementation between participants in natural disaster events are analyzed. Basic guidelines for organizing data and information exchange by social networking communications are given.

Д. А. Верлань*,
А. М. Корнеев**

*Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка, г. Киев,

**Хмельницкий национальный университет, г. Хмельницкий

О РЕШЕНИИ ИНТЕГРО-ДЕФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ЯДРАМИ

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$L[z(x)] = \lambda \int_a^b M[z(y)]K(x, y)dy, \quad (1)$$

где

$$L[z(x)] = \frac{d^n z(x)}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} z(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d z(x)}{dx} + a_n z(x),$$

$$M[z(y)] = b_0 \frac{d^m z(y)}{dy^m} + b_1 \frac{d^{m-1} z(y)}{dy^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{d z(y)}{dy} + b_m z(y), \quad (2)$$

причем $a_1 \dots a_n$, b_0 , $b_1 \dots b_m$, – постоянные числа, λ – параметр, а ядро $K(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y)$, т.е. является разделяющимся [1-2].

Решение уравнения (1) имеет вид $z(x) = c_1 z_1(x) + \dots + c_n z_n(x) + F_1(x) + F_2(x)$, где c_r – произвольные постоянные, $F_1(x)$, $F_2(x)$ – функции, вид которых зависит от вида функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, а $z_r(x)$ линейно независимые решения дифференциального уравнения $L[z(x)] = 0$.

Пусть $f(l) = 0$ характеристическое уравнение дифференциального уравнения $L[z(x)] = 0$, а $g(m) = 0$ для уравнения $M[z(y)] = 0$. Остановимся на двух случаях:

$$\varphi_1(x) = \theta_1(x)e^{\alpha x}, \quad \varphi_2(x) = \theta_2(x)e^{\beta x} \quad (3)$$

где $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$ – многочлены соответственно степени p и q . Если α является корнем характеристического уравнения $f(l) = 0$ кратности $r \geq 1$, а β – корнем характеристического уравнения $g(m) = 0$ кратности $s \geq 1$, то решение уравнения (1) следует искать в форме

$$z(x) = (c_1 + c_2 x + \dots + c_r x^{r-1})e^{\alpha x} +$$

$$+ (c_{r+1} + c_{r+2} x + \dots + c_{r+s} x^{s-1})e^{\beta x} +$$

$$+ \sum_{i=r+s+1}^n c_i z_i(x) + x^r e^{\alpha x} P_1(x) + x^s e^{\beta x} P_2(x), \quad (4)$$

где $P_1(x)$, $P_2(x)$ – многочлены степеней p и q , коэффициенты которых нужно подобрать так, что бы решение (4) удовлетворяло уравнению (1). С этой целью подставим решение (4) в уравнение (1). Приравнявая коэффициенты при $e^{\alpha x}$ и $e^{\beta x}$ в правой и левой частях равенства, получим два равенства многочленов степени p и q . Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях этих многочленов, приходим к системе линейных алгебраических уравнений, которая всегда разрешима относительно искомых коэффициентов. Аналогичное решение можно получить и для ядра $K(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \dots + \varphi_n(x)\psi_n(y)$.

Пусть

$$K(x, y) = e^{\alpha x} [\theta_1(x) \cos \beta x + \theta_2(x) \sin \beta x] \psi(y), \quad (5)$$

где $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$ – многочлены степени k .

Заменяя тригонометрические функции показательными получим

$$K(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ e^{(\alpha + \beta i)x} [\theta_1(x) - i\theta_2(x)] + e^{(\alpha - \beta i)x} [\theta_1(x) + i\theta_2(x)] \right\} \psi(y).$$

Таким образом, этот случай сводится к предыдущему. Если $\alpha \pm \beta i$ будет корнем уравнения $f(l) = 0$ кратности r , то согласно (4) решение имеет вид

$$z(x) = e^{\alpha x} \left[(c_1 + c_2 x + \dots + c_r x^{r-1}) \cos \beta x + (c_{r+1} + c_{r+2} x + \dots + c_{2r} x^{r-1}) \sin \beta x \right] + \sum_{i=2r+1}^n c_i z_i(x) + x^r \left[e^{(\alpha + \beta i)x} P_1(x) + e^{(\alpha - \beta i)x} P_2(x) \right], \quad (6)$$

где $P_1(x)$, $P_2(x)$ – многочлены степеней k – представляют собой сопряженные выражения $P_1(x) = Q_1(x) + iQ_2(x)$, $P_2(x) = Q_1(x) - iQ_2(x)$. Подставляя P_1 , P_2 в выражение (6) и переходя к тригонометрическим функциям, получим

$$z(x) = e^{\alpha x} \left[(c_1 + c_2 x + \dots + c_r x^{r-1}) \cos \beta x + (c_{r+1} + c_{r+2} x + \dots + c_{2r} x^{r-1}) \sin \beta x \right] + \sum_{i=2r+1}^n c_i z_i(x) + x^r e^{\alpha x} [R_1(x) \cos \beta x + R_2(x) \sin \beta x], \quad (7)$$

где $R_1 = 2Q_1(x)$ и $R_2 = -2Q_2(x)$ – многочлены той же степени, что и многочлены $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, если их степени равны, и наибольшей степени из этих многочленов, если их степени различны.

После подстановки в уравнение (1) решения (7) приравняем выражения при $\cos \beta x$, $\sin \beta x$ в правой и левой частях равенства, в результате чего приходим к равенству двух пар многочленов степени k . Сравнивая коэффициенты этих многочленов при одинаковых степенях x , получим всегда разрешимую $2k$ систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов R_1 и R_2 .

Если интегро-дифференциальное уравнение (1) имеет правую часть

$$L[z(x)] = \lambda \int_a^b M[z(y)] K(x, y) dy + \omega(x),$$

то его решение имеет вид

$$z(x) = c_1 z_1(x) + \dots + c_n z_n(x) + F_1(x) + F_2(x) + \Omega(x),$$

где $\Omega(x)$ – частное решение уравнения $L[z(x)] = \omega(x)$.

Присутствие в решении функции $\Omega(x)$ изменит только свободные члены в системах, служащих для определения коэффициентов.

Отметим, что рассмотренный метод может быть применен также для решения интегро-дифференциальных уравнений с ядрами произвольного вида, если воспользоваться соответствующим методом аппроксимации ядер [3].

Список использованной литературы:

1. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К. : Наук. думка, 1986. – 544 с.
2. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами : справ. пособие / А.Г. Бутковский. – М. : Наука, 1979. – 224 с.
3. Верлань Д.А. Ітераційні алгоритми апроксимації функцій двох змінних / Д.А. Верлань // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2009. – Вип. 2 – С. 24-32.

П. С. Венгерський

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СУМІСНОГО СТОКУ ПОВЕРХНЕВИХ І ГРУНТОВИХ ВОД З ТЕРИТОРІЇ ВОДОЗБОРУ

Сформулюємо спочатку рівняння руху потоків по поверхні водозбору з врахуванням крайових та початкових умов. Далі запишемо рівняння моделі руху ґрунтових потоків рідини. З врахуванням суцільного однорідного середовища водяного потоку сформулюємо початково-крайову задачу спільного руху рідини по поверхні водозбору.

1. Система рівнянь руху поверхневих потоків. Виділимо в суцільному середовищі (рідині) рухомий шар $S(t) \in R^3$ (рис.1)

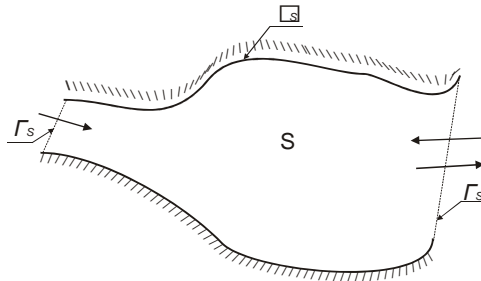


Рис. 1. Графічне зображення території водозбору такої структури

$$S(t) := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3, \quad \eta(x, t) < x_3 < \xi(x, t) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega(t) \right\}.$$

Позначимо проєкції його нижньої

$$\Gamma(t) := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_3 = \eta(x, t) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega(t) \right\}$$

та верхньої

$$\Lambda_s(t) := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_3 = \xi(x, t) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega(t) \right\}$$

основ на площину $0x_1x_2$. Решту поверхні цього шару

$$\Gamma_s(t) := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3, \quad \eta(x, t) < x_3 < \xi(x, t) \quad \forall x \in (\quad) \right\}$$

будемо називати бічною поверхнею шару $S(t)$.

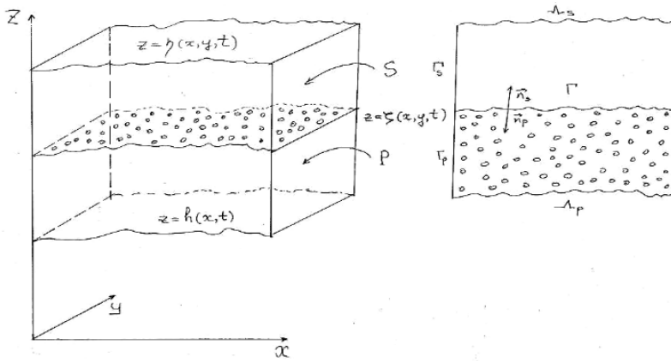


Рис. 2. Загальне зображення моделі потоків та їх поперечний розріз

Запишемо загальні рівняння руху рідини

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k) - \rho f_i - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0, \\ \sigma_{ij} = -p_s \delta_{ij} + \tau_{ij}, \\ \tau_{ij} = 2\mu e_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \\ e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} = 0, \quad \text{в } S \times (0, T], \end{array} \right.$$

де $\{u_i(x, t)\}_{i=1}^3$ та $p_s = p_s(x, t)$ шукані вектор швидкості частинок рідини та гідростатичний тиск відповідно, $F = \{g f_i(x)\}_{i=1}^3$ – масові сили, $\rho = \rho(x, t) > 0$, $\mu = \mu(x) > 0$, $\{e_{ij}\}_{i, j=1}^3$, $\{\sigma_{ij}\}_{i, j=1}^3$ – густина маси, коефіцієнт

в'язкості, симетричні тензори швидкостей деформації та напружень рідини в точці x на момент часу t , δ_{ij} – символ Кронекера.

2. Крайові та початкові умови для поверхневих вод. На практиці досить часто використовують граничні умови змішаного типу, коли на ділянках межі області S задаються компоненти вектора швидкості та поверхневих напружень:

$$\vec{u}_i = \vec{\bar{u}}_i \text{ на } \Gamma_1,$$

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \nu_j = \hat{p}_i, \text{ на } \Gamma_2, i = 1, 2, 3,$$

де $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial S$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – вектор зовнішньої одиничної нормалі до ∂S ; $\vec{\bar{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$ – задана вектор-функція.

Для відшукування вільної поверхні на верхній межі стоку $x_3 = \xi(x_1, x_2, t)$ використаємо кінематичну умову:

$$u_3 + R = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u_1^0 \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + u_2^0 \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \text{ в } S \times (0, T],$$

де R – швидкість падіння капель дощу, u_1^0, u_2^0 – горизонтальні складові швидкості на вільній поверхні та початкову умову

$$\xi|_{t=0} = \xi^0 \text{ в } S.$$

В загальному випадку на нижній межі потоку $x_3 = \eta(x_1, x_2)$ можна вважати, що рідина може перетікати у ґрунтову масу вздовж осі x_3

$$u_3 = -I \text{ на } \eta \times [0, T],$$

де I – відома функція, яка описує швидкість потоку рідини в довкіллі.

Щодо швидкості, то на нижній межі потоку, врахувавши умову прилипання, покладемо

$$u_1 = u_2 = 0.$$

3. Рівняння руху ґрунтових вод. Для спрощення опису руху води проводиться вертикальна декомпозиція задачі – весь підземний простір на виділеній території розбивається на шари: поверхня землі, ненасичена зона, насичена зона, зона напірного руху. В кожному шарі для опису руху води використовуються моделі різної розмірності, їх розв'язки з'єднуються за допомогою граничних умов.

Рівняння, що описує процес фільтрації, отримане при застосуванні гідравлічного підходу, запишемо у такому вигляді:

$$m \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + \varepsilon \text{ в } P \times (0; T],$$

$$-k \nabla \varphi \cdot \vec{n} = \bar{q} \text{ на } \Gamma = \partial P,$$

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0(x) \text{ в } P,$$

де

$$k = k(x, t) = \begin{cases} k_s(\eta(x) - \eta_0(x)), & \varphi(x, t) \geq \eta(x); \\ k_s(\varphi(x, t) - \eta_0(x)), & \eta_0(x) < \varphi(x, t) < \eta(x); \\ 0, & \varphi(x, t) \leq \eta_0(x). \end{cases}$$

$k = k(x, t)$ – коефіцієнт рівнепровідності, k_s – коефіцієнт фільтрації, $m = m(x)$ – коефіцієнт питомої водовіддачі, $\varepsilon = \varepsilon(x, t)$ – відома функція

джерел притоку води, $\varphi = z + \frac{P_p}{\rho g}$ – п'єзометричний напір,

$\bar{\Omega} = \bar{S} \cup \bar{P}$, $S \cap P = 0$, $\bar{S} \cap P = \Gamma$, $q = -k \nabla \varphi$ – потік, $v = \frac{q}{\omega}$, ω –

об'ємна пористість, $v = v(x, t)$ – вектор швидкості рідини в ґрунті,

$\vec{n}_s = -\vec{n}_p$, $\partial S = \Gamma_s \cup \Lambda_s \cup \Gamma$, $\partial P = \Gamma_p \cup \Lambda_p \cup \Gamma$.

4. Граничні задачі для ґрунтових вод. Практичне значення має розгляд деяких граничних варіантів загальної задачі ґрунтових потоків більш доступних для розв'язування. Один з варіантів отримаємо, якщо спрямуємо товщину водоносного шару до нуля, але так, щоб опір ґрунту фільтраційного потоку, який рухається паралельно до обмежуючої з низу поверхні, залишився незмінним. В результаті отримаємо двохвимірну задачу про рух рідини по заданій криволінійній поверхні, яку ми назвали плановою задачею. Другим граничним варіантом можемо вважати задачу про рух ґрунтової води по деякій вертикальній циліндричній поверхні заданої форми. Цей варіант отримаємо, коли розглянемо фільтраційний потік між двома вертикальними циліндричними поверхнями і спрямуємо відстань між ними до нуля, залишаючи незмінним опір потоку зі сторони ґрунту при русі потоку паралельно вказаним поверхням.

Далі досліджуються рівняння взаємодії потоків поверхневих і ґрунтових вод.

Список використаних джерел:

1. Венгерський П.С. Чисельне розв'язування варіаційних задач поверхневого стоку / П.С. Венгерський, В.М. Трушевський, Г.А. Шинкаренко // Вісн. Київськ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. кібернетика. – 2002. – Вип.3. – С. 26-30.
2. Венгерський П.С. Побудова математичної моделі процесу фільтрації рідини в ґрунті / П.С. Венгерський, О. Демкович // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2009. – Вип. 15. – С. 170-177.
3. Венгерський П.С. До моделювання сумісного руху поверхневих та ґрунтових вод / П.С. Венгерський, Я.В. Коковська // «Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки» – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2009. – С. 255-257.

А. П. Власюк*,
Т. А. Дроздовський**

*Міжнародний економіко-гуманітарний університет
імені академіка Степана Дем'янчука, м. Рівне,

**Національний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗМІНИ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ОБЛАСТЕЙ ҐРУНТУ ПРИ НАГНІТАННІ В НИХ В'ЯЖУЧОГО РОЗЧИНУ КОМБІНОВАНИМ МЕТОДОМ РАДІАЛЬНИХ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ ТА ЧИСЕЛЬНИХ КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Розглядається ґрунтова основа гідротехнічної споруди (ГТС), що має вісь симетрії, в яку під тиском нагнітається в'язучий розчин (рис. 1). Внаслідок цього в ґрунтовій основі еволюціонують дві підобласті G_1 (область нагнітання) та G_2 , ґрунтові середовища яких характеризуються відповідно параметрами Ламе λ_1, μ_1 та λ_2, μ_2 . Межа фронту нагнітання γ характеризується в момент часу t кривою $\gamma(t)$. Потрібно розрахувати зміну напружено-деформованого стану (НДС) ґрунтового масиву в областях G_1 і G_2 .

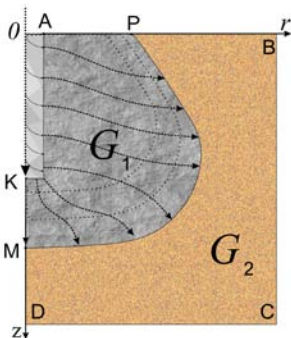


Рис. 1. Ґрунтова основа ГТС

Математична модель задачі в загальноприйнятих позначеннях описується наступною крайовою задачею [4-6]:

$$\mu_i \cdot \Delta U + (\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + (\lambda_i + 2\mu_i) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} \right) = \frac{R_i}{r}, \quad (1)$$

$$\mu_i \cdot \Delta W + (\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \left(\mu_i + \frac{\lambda_i}{r} \right) \frac{\partial U}{\partial z} + \mu_i \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{Z_i}{r}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0, \quad (3)$$

з крайовими умовами

$$\left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{AP \cup KM} = 0, \quad h|_{AK} = H_m, \quad h|_{\gamma(t)} = -y, \quad \frac{\partial \gamma(t)}{\partial t} = \frac{k}{m} (\text{grad } h, \vec{n}) \vec{n} \quad (4)$$

$$U|_{CD} = W|_{CD} = 0, \quad \sigma_n|_{\Gamma} = \tau_s|_{\Gamma} = 0, \quad (5)$$

$$[U]_{\gamma(t)} = [W]_{\gamma(t)} = 0, \quad [\sigma_n]_{\gamma(t)} = [\tau_s]_{\gamma(t)} = 0. \quad (6)$$

Тут: h – напір в'язучого розчину, $u = (U, W)$ – вектор зміщень, R_i, Z_i – компоненти масової сили в підобласті G_i , $i=1, 2$, σ_n, τ_s – компоненти повного напруження, $\Gamma = \partial G / CD$ – частина межі області G .

Чисельний розв'язок крайової задачі (1)-(6) знайдено безсітковим методом радіальних базисних функцій [2] у поєднанні з методом чисельних конформних відображень [1, 3] у вигляді

$$u_n(X, \varepsilon) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(r_j, \varepsilon), \quad v_n(X, \varepsilon) = \sum_{j=1}^n b_j \varphi_j(r_j, \varepsilon), \quad h_n(X, \varepsilon) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(r_j, \varepsilon),$$

де $\varphi_j(r_j, \varepsilon)$ – деяка неперервна або кусково-неперервна радіальна базисна функція; $a_j, b_j, c_j, j = \overline{1, n}$ – невідомі параметри.

З рівнянь (1)-(3), граничних умов (4), (5) та умов спряження (6) при застосуванні методу колокації в точках, отримано три СЛАР для обчислення невідомих $a_j, b_j, c_j, j = \overline{1, n}$. Їх розв'язок отримано методом Гауса. Множину колокаційних вузлів $M_j = (x_j, y_j), j = \overline{1, n}$ отримано методом чисельних конформних відображень [1].

Розроблено обчислювальний алгоритм та програмне забезпечення розв'язування крайової задачі. Проведено серію числових експериментів при різних вихідних даних та здійснено аналіз їх результатів.

Проведене математичне і комп'ютерне моделювання дає можливість здійснювати оцінку зміни НДС ґрунтової основи гідротехнічної споруди унаслідок нагнітання в'язучого розчину. Це у свою чергу може бути використано для оцінки несучої здатності ґрунтів основи, стійкості і надійності споруди.

Список використаних джерел:

1. Власюк А.П. Комп'ютерна генерація конформних і квазіконформних різнице-вих сіток в областях складної геометричної форми / А.П. Власюк, Т.А. Дроздовський // Тез. доп. XVI Міжнар. Конф. Прийняття рішень в умовах не-ви-значеності – Ялта, 2010. – С. 153-156.
2. Власюк А.П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйну-вання ґрунтів в умовах тепломасопереносу методом радіальних базисних функ-цій : монографія / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк. – Рівне: НУВГП, 2010. – 277 с.
3. Власюк А.П. Чисельне розв'язування одного класу крайових задач з вільними межами в криволінійних чотирикутниках для еліптичних систем рівнянь / А.П. Власюк, В.Г. Михальчук. (Препр. №3), – К., 1994. – 24 с.

4. Дейнека В.С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий. – К. : Наук. думка, 2001. – 606 с.
5. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
6. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – К. : 1991. – 432 с.

А. П. Власюк*,

В. В. Жуковський**

*Міжнародний економіко-гуманітарний університет
ім. акад. Степана Дем'янчука, м. Рівне,

**Національний університет водного господарства природокористування, м. Рівне

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЕРТИКАЛЬНОЇ МІГРАЦІЇ РАДІОНУКЛІДІВ В КАТАЛІТИЧНОМУ ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ ДО ФІЛЬТРІВ-ВЛОВЛЮВАЧІВ В ЗОНІ НЕПОВНОГО НАСИЧЕННЯ У ЛІНІЙНОМУ ВИПАДКУ

Проведено математичне моделювання процесу вертикальної міграції радіонуклідів в каталітичному пористому середовищі, що являє собою сорбуючі гранули з наночастинками, до фільтрів-вловлювачів в зоні неповного насичення (рис. 1).

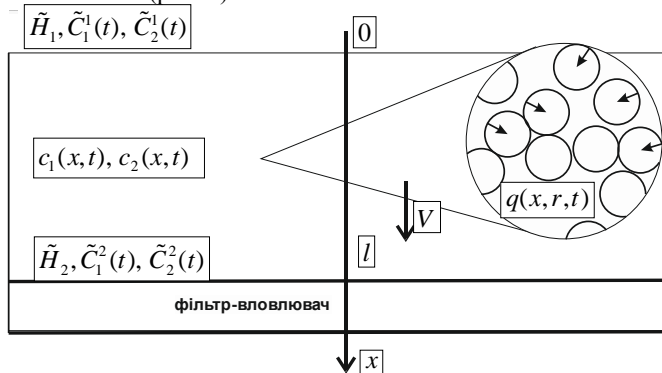


Рис. 1. Вертикальна міграція радіонуклідів до фільтра-вловлювача

Математичну модель даної задачі в загальноприйнятих позначеннях можна описати наступною крайовою задачею:

$$\sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} - v_x \frac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2, \quad (1)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 - \theta \left. \frac{\partial q}{\partial r} \right|_{r=R}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = D_0 \left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial q}{\partial r} \right), \quad (3)$$

$$\mu(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial h}{\partial x} \right) - v \frac{\partial c}{\partial x}, \quad v_x = -k \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial x} \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial q(x, r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad q(x, r, t) \Big|_{r=R} = k_e \cdot c_2(x, t), \quad (5)$$

$$l_1 c_1(0, t) = \tilde{C}_1^1(t), \quad l_2 c_1(l, t) = \tilde{C}_1^2(t), \quad (6)$$

$$l_3 c_2(0, t) = \tilde{C}_2^1(t), \quad l_4 c_2(l, t) = \tilde{C}_2^2(t), \quad (7)$$

$$h(0) = \tilde{H}_1, \quad h(l) = \tilde{H}_2, \quad (8)$$

$$c_1(x, 0) = \tilde{C}_1^0(x), \quad c_2(x, 0) = \tilde{C}_2^0(x), \quad q(x, r, 0) = \tilde{Q}^0(x, r), \quad (9)$$

де $c_1(x, t)$, D_1 – концентрація та коефіцієнт конвективної дифузії радіонуклідів, що знаходяться в зоні вологоперенесення; $c_2(x, t)$, D_2 – концентрація та коефіцієнт молекулярної дифузії радіонуклідів, що знаходяться у воді, яка зв'язана зі скелетом ґрунту; q , D_0 – концентрація та коефіцієнт дифузії радіонуклідів у частинках радіуса R , що знаходяться у скелеті ґрунту; k_e – коефіцієнт впливу внутрішньочастинкового масопереносу на масоперенос в скелеті ґрунту; v – швидкість фільтрації; k – коефіцієнт фільтрації води з мігрантами; γ_1, γ_2 – коефіцієнти масообміну; σ_1 – пористість ґрунту; ν – коефіцієнт осмосу; $x \in [0; l]$ – вертикальна координата, напрямлена вертикально вниз, $0 < t < t_i$, l_i , $i = \overline{1, 4}$ – диференціальні оператори, що задають граничні умови відповідно при $x = 0$ та $x = l$; t – час.

В результаті чисельного розв'язання крайової задачі (1)-(9) методом скінченних різниць було знайдено розподіл концентрацій $c_1(x, t)$, $c_2(x, t)$ та $q(x, r, t)$ в ненасиченому пористому середовищі. Аналіз отриманих даних дає можливість прогнозувати ступінь забруднення ґрунтів, їх подальше очищення та використання.

А. П. Власюк*,
Н. А. Федорчук**

*Міжнародний економіко-гуманітарний університет
ім. акад. Степана Дем'янчука, м. Рівне,

**Національний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне

**ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО
СТАНУ БАГАТОШАРОВОГО ҐРУНТОВОГО МАСИВУ
З ВРАХУВАННЯМ ТЕПЛО-МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ
ПРИ НАЯВНОСТІ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ ТА СИЛ ЗВ'ЯЗНОСТІ**

Проведено чисельне моделювання напружено-деформованого стану (НДС) багат шарового ґрунтового масиву з вільною поверхнею під впливом тепло-масоперенесення та наявності сил зв'язності в двовимірному випадку (рис. 1). Кількість шарів в ґрунтовому масиві дорівнює n , які нумеруються знизу вгору. Вільна поверхня C_1D_1 знаходиться на рівні Γ_k і вважається нерухомою.

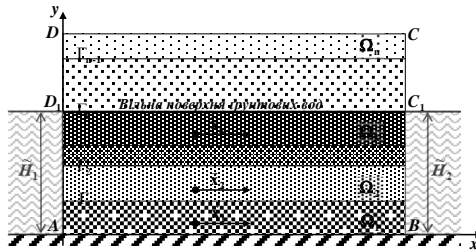


Рис. 1. Багат шаровий ґрунтовий масив з вільною поверхнею, у якому розраховується НДС з урахуванням тепло-масоперенесення та сил зв'язності

Математичну модель даної задачі в загальноприйнятих позначеннях можна описати наступною крайовою задачею [1]:

$$\begin{aligned}
 & \mu_i(c_i, T_i) \Delta U_i + (\lambda_i(c_i, T_i) + \mu_i(c_i, T_i)) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + \\
 & + \left[\frac{\partial \lambda_i(c_i, T_i)}{\partial x} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial x} \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial y} \left(\frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right) \right] - \\
 & - (2\lambda_i(c_i, T_i) + 2\mu_i(c_i, T_i)) \alpha_T \frac{\partial T_i}{\partial x} = X_i, \\
 & \mu_i(c_i, T_i) \Delta V_i + (\lambda_i(c_i, T_i) + \mu_i(c_i, T_i)) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + \\
 & + \left[\frac{\partial \lambda_i(c_i, T_i)}{\partial y} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial y} \frac{\partial V_i}{\partial y} + \frac{\partial \mu_i(c_i, T_i)}{\partial x} \left(\frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right) \right] - \\
 & - (2\lambda_i(c_i, T_i) + 2\mu_i(c_i, T_i)) \alpha_T \frac{\partial T_i}{\partial y} = Y_i, \quad i = \overline{1, n},
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$X_i = \begin{cases} \frac{dp_i}{dx} + f(c_i), & i = \overline{1, k}, \\ \gamma_{np}^{(i)}, & i = \overline{k+1, n}, \end{cases} \quad Y_i = \begin{cases} \gamma_{36}^{(i)} + \frac{dp_i}{dy} + f(c_i), & i = \overline{1, k}, \\ \gamma_{np}^{(i)}, & i = \overline{k+1, n}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (D_i(c_i, T_i) \nabla c_i) - (\nabla_i \nabla c_i - \gamma_i c_i - \mathbf{K}_m + \mathbf{Y} \cdot \nabla_T T_i) = n_p^{(i)} \frac{\partial c_i}{\partial t}, \quad i = \overline{1, k}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{n}_T^{(i)} \nabla T_i) - \rho c_p \bar{x}_i \nabla T_i = c_T^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

$$x_i = -K_i(c_i, T_i) \nabla h_i + n_c^{(i)}(c_i) \nabla c_i + n_T^{(i)} \nabla T_i, \quad \operatorname{div} \bar{x}_i + \frac{\partial n_p^{(i)}}{\partial t} = 0, \quad i = \overline{1, k} \quad (5)$$

та з відповідними крайовими умовами і умовами спряжень для концентрації солей, напору, температури та зміщень. Тут: $(x, y) \in \Omega$, $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$; t – час, $t > 0$; $f(c)$ – функція, яка виражає вплив щільності ґрунту на його НДС за рахунок сил зв'язності.

У результаті чисельного розв'язання крайової задачі (1)-(5) знайдено зміщення, напруження, деформації, а також розподіл напору, швидкості фільтрації, концентрації сольового розчину та температури в кожному шарі ґрунтового масиву. Здійснено аналіз отриманих результатів.

Список використаних джерел:

1. Власюк А.П. Чисельне моделювання напружено-деформованого стану багатощарового ґрунтового масиву за наявності рівня ґрунтових вод та впливу тепломасоперенесення в одновимірному випадку / А.П. Власюк, Н.А. Федорчук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський : Кам.-Под. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2013. – Вип. 8 – С. 31-44.

А. П. Власюк*,

Т.П. Цветкова**

*Міжнародний економіко-гуманітарний університет

ім. акад. С. Дем'янчука, м. Рівне,

**Національний університет водного господарства

та природокористування, м. Рівне

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СОЛЕПЕРЕНЕСЕННЯ ПРИ СУМІСНІЙ НЕСТАЦІОНАРНІЙ ФІЛЬТРАЦІЇ І ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННІ В ОБЛАСТЯХ ПОВНОГО ТА НЕПОВНОГО НАСИЧЕННЯ

Проведено дослідження процесу солеперенесення при нестационарній фільтрації до горизонтального дренажу та вологоперенесенні в областях повного та неповного насичення при наявності вільної поверхні (рис.1).

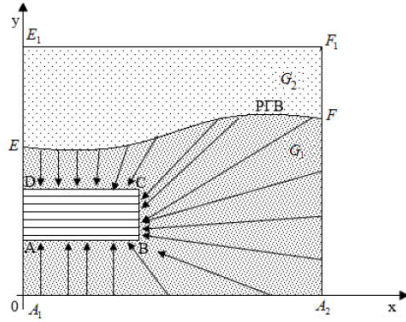


Рис. 1. Перенесення солей до горизонтального дренажу в областях повного та неповного насичення

Математична модель даної задачі у загальноприйнятих позначеннях описується наступною крайовою задачею [1, 2]:

$$D_1 \left(\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} \right) - v_x \frac{\partial c_1}{\partial x} - v_y \frac{\partial c_1}{\partial y} - \gamma_1 (c_1 - C_1^*) = \sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (1)$$

$$k_1 \left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} \right) - v_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} - v_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} = a \frac{\partial h_1}{\partial t}, \quad (2)$$

$$v_x = -k_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad v_y = -k_1 \frac{\partial h_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial c_1}{\partial y}, \quad (3)$$

$$h_1(x, y, 0) = \tilde{H}_0(x, y), \quad h_1|_{EF} = y, \quad h_1|_{ABCD} = \tilde{H}_1, \quad \frac{\partial h_1}{\partial n} \Big|_{AA_1 \cup A_1 A_2 \cup A_2 F_2 \cup DE} = 0, \quad (4)$$

$$c_1(x, y, 0) = \tilde{C}_0(x, y), \quad c_1|_{ABCD} = \tilde{C}_1, \quad c_1|_{EF} = \tilde{C}_2, \quad \frac{\partial c_1}{\partial n} \Big|_{AA_1 \cup A_1 A_2 \cup A_2 F_2 \cup DE} = 0, \quad (5)$$

$$D_2 \left(\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} \right) - v_x \frac{\partial c_2}{\partial x} - v_y \frac{\partial c_2}{\partial y} - \gamma_2 (c_2 - C_2^*) = \sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\mu(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial t} = k_2 \left(\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2} \right), \quad (7)$$

$$v_x = -k_2 \frac{\partial h_2}{\partial x}, \quad v_y = -k_2 \frac{\partial h_2}{\partial y}. \quad (8)$$

$$h_2(x, y, 0) = \tilde{H}_0(x, y), \quad h_2|_{EF} = y, \quad \frac{\partial h_2}{\partial x} \Big|_{EE_1 \cup F_1 F} = 0, \quad h_2|_{E_1 F_1} = \tilde{H}_2, \quad (9)$$

$$c_2(x, y, 0) = \tilde{C}_0(x, y), \quad c_2|_{E_1 F_1} = \tilde{C}_1, \quad \frac{\partial c_2}{\partial n} \Big|_{EF} = 0, \quad \frac{\partial c_2}{\partial x} \Big|_{EE_1 \cup F_1 F} = 0. \quad (10)$$

На межі областей повного та неповного насичення (вільній поверхні) та на дрені задаються умови спряження для напорів та концентрації солей відповідно

$$[h_1] = 0, \quad h_1|_{EF} = h_2|_{EF}, \quad [c_1] = 0, \quad c_1|_{EF} = c_2|_{EF}, \quad (11)$$

$$v_1 c_1 - D_1 \frac{\partial c_1}{\partial n} = v_2 c_2 - D_2 \frac{\partial c_2}{\partial n}, \quad \frac{\partial c_1}{\partial n} \Big|_{ABCD} = 0. \quad (12)$$

Для задачі (1)-(12), використовуючи метод скінченних різниць, побудовано монотонну різницеву схему та отримано її чисельний розв'язок. На основі проведених чисельних експериментів отримано поле швидкостей фільтрації та поле п'єзометричних напорів в області фільтрації G_1 , розподіл потенціалів вологості в області неповного насичення G_2 , поля розподілу концентрацій солей в даних областях водонасичення.

Список використаних джерел:

1. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопечкий, В.С. Дейнека. – К. : Наук. думка, 1991. – С. 27-32
2. Власюк А.П. Математическое моделирование массопереноса при фильтрации и влагопереносе в насыщенно-ненасыщенных слоистых грунтах / А.П. Власюк, Т.П. Цветкова // Abstracts of XX International Conference «Problems of decision making under uncertainties» – Brno, Czech Republic, 2012. – P. 152-153.

Т. В. Габуза, Ф. О. Сопронюк

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ДЛЯ СИСТЕМ ІЗ ПІСЛЯДІЄЮ ТА ЗМІНОЮ ВИМІРНОСТІ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ

Нехай τ_1, \dots, τ_N деяке розбиття відрізка $[T_0, T_1]$,

де

$$\tau_j = \{t : t_{j-1} \leq t < t_j\}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad \tau_N = \{t : t_{N-1} \leq t \leq t_N\},$$

$$T_0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = T_1.$$

На відрізку $[T_0, T_1]$ розглянемо математичну модель системи керування з післядією та зміною вимірності фазового простору

$$\frac{dx^{(j)}(t)}{dt} = \quad (1)$$

$$= f^{(j)}(x_1^{(j)}(t), \dots, x_{n_j}^{(j)}(t), x_1^{(j)}(t-h_j), \dots, x_{n_j}^{(j)}(t-h_j), u_1^{(j)}(t), \dots, u_{m_j}^{(j)}(t))$$

$$x^{(j)}(t_{j-1} + \theta_j) = C_j x^{(j-1)}(t_{j-1} + \theta_j), \quad \theta_j \in [-h_j, 0], \quad j = \overline{1, N}, \quad (2)$$

причому

$$x^{(1)}(t_0 + \theta_1) = \varphi(\theta_1), \quad \theta_1 \in [-h_1, 0], \quad (3)$$

$$x_N = x^{(N)}(t_N), \quad (4)$$

де $f^{(j)}(x^{(j)}(t), x^{(j)}(t-h_j), u^{(j)}(t))$ – неперервні функції за сукупністю аргументів та неперервно-диференційовні функції за аргументами $x_1^{(j)}, \dots, x_{n_j}^{(j)}, y_1^{(j)}, \dots, y_{n_j}^{(j)}, y^{(j)}(t) = x^{(j)}(t-h_j), x^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{n_j}^{(j)})^T$ – вектор фазових координат розмірності n_j із фазового простору X^j , $u^{(j)} = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \dots, u_{m_j}^{(j)})^T$ – вектор керування розмірності m_j із множини допустимих керувань U^j , C_j – сталі прямокутні матриці розмірності $n_j \times n_{j-1}$, h_j – сталі запізнення, $h_j \geq 0$, $t_{j-1} - t_{j-2} \geq h_j$, $j = \overline{1, N}$. Якщо $j = 1$ вважаємо, що $C_1 = E_1$ – одинична матриця порядку n_1 , $\varphi(\theta_1)$ – неперервна початкова вектор-функція розмірності n_1 . Причому $x^{(1)}(t_0 + \theta_1) = x^{(0)}(t_0 + \theta_1) = \varphi(\theta_1)$, $\theta \in [-h_1, 0]$.

Нехай критерій якості для системи (1) за умов (2), (3) має вигляд:

$$J(u^{(1)}(t), \dots, u^{(N)}(t)) = \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} f_0^{(j)}(x^{(j)}(t), x^{(j)}(t-h_j), u^{(j)}(t)) dt \quad (5)$$

Задача. Знайти такі керування

$$\left(\begin{array}{l} \hat{u}^{(1)}(t) \in U^1, \hat{u}^{(2)}(t) \in U^2, \dots, \hat{u}^{(N)}(t) \in U^N \\ t \in [t_0; t_1] \quad t \in [t_1; t_2] \quad t \in [t_{N-1}; t_N] \end{array} \right),$$

що траєкторії $\left(\begin{array}{l} \hat{x}^{(1)}(t), \hat{x}^{(2)}(t), \dots, \hat{x}^{(N)}(t) \\ t \in \tau_1 \quad t \in \tau_2 \quad t \in \tau_N \end{array} \right)$ системи (1) за умов (2), (3), що відповідають цим керуванням, задовольняють крайову умову (4) і функціонал вигляду (5) досягає мінімуму, тобто:

$$\min_{\substack{u^{(1)}(t) \in U^1, u^{(2)}(t) \in U^2, \dots, u^{(N)}(t) \in U^N \\ t \in [t_0; t_1] \quad t \in [t_1; t_2] \quad t \in [t_{N-1}; t_N]}} J(u^{(1)}(t), \dots, u^{(N)}(t)) = J(\hat{u}^{(1)}(t), \dots, \hat{u}^{(N)}(t)).$$

Введемо функції

$$H(\psi(t), x(t), y(t), u(t)) = \sum_{j=1}^N H_j(\psi^{(j)}(t), x^{(j)}(t), y^{(j)}(t), u^{(j)}(t)), \quad (6)$$

де $H_j = -f_0^{(j)} + \psi^{(j)T} f^{(j)}$, $j = \overline{1, N}$, а функції $\psi^{(j)}$ – розв'язки наступних систем рівнянь

$$\frac{d\psi_i^{(j)}}{dt} = - \frac{\partial H(\psi^{(j)}(t), x^{(j)}(t), y^{(j)}(t), u^{(j)}(t))}{\partial x_i^{(j)}} - \frac{\partial H(\psi^{(j)}(t+h_j), x^{(j)}(t+h_j), y^{(j)}(t), u^{(j)}(t+h_j))}{\partial y_i^{(j)}}, \quad (7)$$

$$t \in [t_{j-1}; t_j - h_j], y_i^{(j)} = x_i^{(j)}(t - h_j), i = \overline{1, n_j};$$

$$\frac{d\psi_i^{(j)}}{dt} = - \frac{\partial H(\psi^{(j)}(t), x^{(j)}(t), y^{(j)}(t), u^{(j)}(t))}{\partial x_i^{(j)}}, t \in [t_j - h_j; t_j]. \quad (8)$$

Теорема. Нехай $\left(\hat{u}^{(1)}(t) \in U^1, \hat{u}^{(2)}(t) \in U^2, \dots, \hat{u}^{(N)}(t) \in U^N \right)_{\substack{t \in [t_0; t_1] \\ t \in [t_1; t_2] \\ t \in [t_{N-1}; t_N]}}$ такі вектори допустимих керувань системи (1) за умов (2), (3), що траєкторія цієї системи $\left(\hat{x}^{(1)}(t), \hat{x}^{(2)}(t), \dots, \hat{x}^{(N)}(t) \right)_{\substack{t \in \tau_1 \\ t \in \tau_2 \\ t \in \tau_N}}$ задовольняє умову (4) і критерій якості (5) досягає свого мінімуму. Для оптимальності пари (\hat{x}, \hat{u}) необхідно існування таких ненульових вектор-функцій $\psi^{(1)}(t), \dots, \psi^{(N)}(t)$, що відповідають векторам керувань і розв'язків системи (1) за умов (2), (3), щодля $t \in [t_{j-1}, t_j]$ виконується умова максимуму

$$H_j(\psi^{(j)}(t), x^{(j)}(t), y^{(j)}(t), u^{(j)}(t)) = M_j(\psi^{(j)}(t), x^{(j)}(t), y^{(j)}(t)),$$

де $M_j(\psi^{(j)}(t), x^{(j)}(t), y^{(j)}(t))$ – верхня межа значень функції H_j для фіксованих значень функцій $\psi^{(j)}(t), x^{(j)}(t), y^{(j)}(t)$ і $u^{(j)}(t) \in U^j, j = \overline{1, N}$.

У моменти часу t_j виконуються співвідношення

$$\psi_o(t_j) \leq 0, M_j(\psi^{(j)}(t_j), x^{(j)}(t_j), y^{(j)}(t_j)) = 0.$$

У роботі доведено теорему про необхідні умови оптимальності керування для класу задач, математичними моделями яких є рівняння із запізненням зі зміною вимірності фазового простору.

Список використаних джерел:

1. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 390 с.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы. [Текст] / Н.Н. Красовский – М. : Наука, 1968. – 475 с.
3. Габасов Р.Ф. Теория оптимальных процессов / Р.Ф. Габасов, Ф.М. Кириллова. – М. : Высшая школа, 1971. – 503 с.
4. Бублик Б.Н. Основы теории управления / Б.Н. Бублик, Н.Ф. Кириченко. – К. : Высшая школа, 1975. – 328 с.
5. Харатишвили Г.Л. Принцип максимума в теории оптимальных процессов с запаздыванием / Г.Л. Харатишвили. – 1961. – № 1. – С. 39-42.
6. Сопронюк Ф.О. Моделирование та оптимізація систем управління з розгалуженням структур / Ф.О. Сопронюк. – Чернівці : Рута, 1995. – 155 с.

Є. В. Геделевич

Хмельницький національний університет, м. Хмельницький

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО РИЗИКУ

В умовах ринкової економіки та розвитку інформаційних технологій сприяє виникненню ризиків у будь-якій діяльності, в тому числі промислових підприємств. Важливість вивчення вдосконалення діяльності промислових підприємств є значною, оскільки промислові підприємства є складовими промислового комплексу країни, який виступає інструментом розвитку країни.

Одним з вагомих ризиків на промислових підприємствах виступає операційний, який обумовлений невизначеністю стану і функціонування внутрішнього середовища.

Операційний ризик виникає в операційній діяльності промислового підприємства, яка узагальнює в собі такі сфери:

- 1) постачання;
- 2) виробнича сфера;
- 3) збут;
- 4) інша операційна діяльність.

Операційні ризики можуть призвести до отримання збитків від основної діяльності підприємства. Вони є наслідком прорахунків у виробничій сфері, постачанні та збутовій політиці.

Таким чином, операційні ризики є складним економічним процесом, який необхідно чітко визначити для ефективного прийняття рішення, тобто прогнозування та складання стратегічного плану.

В наш час найбільш чіткими методами математичного моделювання і прогнозування дослідження економічних процесів та явищ є економіко-математичне моделювання на основі моделей.

Економіко-математичні моделі – моделі економічних об'єктів або процесів, при описі яких використовуються математичні засоби [1].

Незважаючи на те, що у вивченні економічних процесів та явищ задіяна побудова моделей, тобто моделювання, що містить значний обсяг знань, моделювання досліджуваного об'єкта є індивідуальним.

Процес моделювання складаються з наступних етапів:

- 1) постановка економічної проблеми (можуть бути інші види проблем);
- 2) формалізація задачі у вигляді математичної моделі;
- 3) дослідження моделі і пошук оптимальних рішень з широким використанням різних математичних методів;
- 4) практична перевірка одержаних за допомогою моделей результатів.

Розглянемо детальніше перший етап. На цьому етапі формулюється сутність проблеми, враховуються всі припущення, пов'язані з особливостями об'єкта дослідження, виділяються найважливіші характеристики

досліджуваного об'єкта, вивчається його структура та зв'язок між складовими, формулюється мета дослідження та можливі шляхи її досягнення. При неправильному виборі мети інколи втрачається зміст дослідження, що може призвести до небажаних наслідків. Якщо дослідження переслідує декілька цілей, то необхідно виділити основні і кожній із них поставити у відповідність єдиний критерій ефективності [2, с.11].

В даному випадку сутністю проблеми є визначення операційного ризику промислового підприємства для підвищення його ефективної діяльності.

Метою дослідження є побудова та дослідження економіко-математичних моделей оптимізації операційного ризику в системі управління промислового підприємства як інструменту підвищення його конкурентоспроможності.

Об'єкт дослідження – операційна діяльність промислових підприємств та фактори впливу на неї.

Отже, для виділення найважливіших характеристик досліджуваного об'єкта необхідно детальніше вивчити складові операційної діяльності та фактори впливу на неї.

Можна стверджувати, що необхідно і актуально продовжувати досліджувати економіко-математичне моделювання операційного ризику для ефективної діяльності підприємства, підвищуючи якість операційної діяльності.

Список використаних джерел:

1. Сайт Вікіпедія. Вільна енциклопедія [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://uk.wikipedia.org/wiki/Економіко-математичне_моделювання.
2. Глушик М.М. Математичне програмування: Підручник для студентів вищих навчальних закладів / М.М. Глушик, І.М. Копич, В.М. Сороківський. – Львів: Вид-во «Новий світ – 2000», 2009. – 280 с.

Л. В. Гладун, В. Е. Прокопець

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

РУХ ЦІЛКОМ КЕРОВАНОЇ СИСТЕМИ ДО МЕЖИ ПРИ НАЯВНОСТІ ПЕРЕШКОДИ

Рух керованої системи описується системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_2 x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_1 x_1 + bu,\end{aligned}$$

де x_1, x_2 – фазові координати, a_1, a_2, b – довільні константи, які відмінні від нуля, u – параметр керування, при чому $|u| \leq 1$. У фазовому просторі задана перешкода довільного радіусу і розміщення:

$$(x_1 - x_{1n})^2 + (x_2 - x_{2n})^2 \leq r_n^2,$$

де x_{1n}, x_{2n} – координати центру перешкоди, r_n – її радіус. Під межею будемо розуміти одну із осей фазового простору.

Потрібно знайти оптимальні траєкторії руху системи до межі при наявності перешкоди, а також час руху по ним [1-6].

Нехай перешкода розміщена у другій чверті (рис. 1).

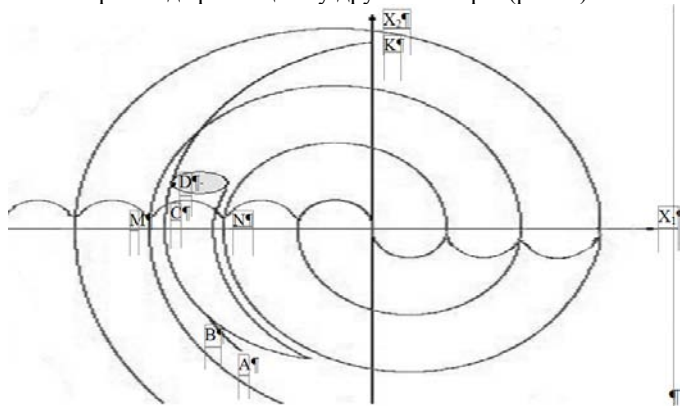


Рис. 1. Оптимальна траєкторія при оминанні перешкоди

Рух системи відбувається по траєкторіях, які мають вигляд концентричних еліпсів.

Під непроникною областю будемо розуміти область, із довільної точки якої не існує траєкторії, по якій можна оминати перешкоду. Непроникна область тут складається з двох частин, які лежать вище і нижче півеліпса MN відповідно. В точках перетину траєкторій з півеліпсом відбувається зміна параметра керування u .

$u = 1$. Знайдено оптимальну траєкторію руху системи ABCDK, по якій можна оминати перешкоду, при чому рух по її частинах АВ та CD здійснюється під дією керування $u = -1$, а по ВС і DK – при $u = 1$. Час руху системи:

$$T = \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \left(\begin{array}{l} \arcsin \left(\frac{\sqrt{\frac{a_2}{a_1}} x_2^{(B)} c_i - d_i x_1^{(B)} - \frac{d_i b}{a_1}}{-(c_i^2 + d_i^2)} \right) + \arcsin \left(\frac{\sqrt{\frac{a_2}{a_1}} x_2^{(C)} c_i - d_i x_1^{(C)} + \frac{d_i b}{a_1}}{-(c_i^2 + d_i^2)} \right) + \\ + \arcsin \left(\frac{\sqrt{\frac{a_2}{a_1}} x_2^{(D)} c_i - d_i x_1^{(D)} - \frac{d_i b}{a_1}}{-(c_i^2 + d_i^2)} \right) + \arcsin \left(\frac{-c_i \sqrt{R^2 - b^2} + \frac{d_i b}{a_1}}{-(c_i^2 + d_i^2)} \right) \end{array} \right),$$

де $R = \sqrt{(x_2^{(K)})^2 - \frac{b^2}{a_1}}$, $c_i = x_1^i - \frac{b}{a_1}$, $d_i = x_2^i \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$, $i = A, B, C, D$.

Аналогічно знайдено вигляд непроникних областей для перешкод в інших четвертях, а також час руху системи по оптимальним траєкторіям, що їх оминають.

Розв'язана задача швидкодії та розроблений алгоритм розв'язку задачі. Встановлено вигляд непроникних зон при наявності перешкоди та знайдено оптимальні траєкторії руху системи до межі.

Список використаних джерел:

1. Крак Ю.В. Теорія керування / Ю.В. Крак, О.Л. Левович. – К. : Либідь, 2003. – 380 с.
2. Лавренюк С.П. Варіаційне числення й оптимальне керування / С.П. Лавренюк. – К. : НВК, 1992. – 108 с.
3. Васильев В.П. Численные методы решения задач / В.П. Васильев. – М. : Наука, 1980. – 400 с.
4. Бублик Б.И. Основы теории управления / Б.И. Бублик, Н.Ф. Кириченко. – К. : Вища школа, 1975. – 328 с.
5. Болтянский Б.М. Математические методы оптимального управления / Б.М. Болтянский. – М. : Наука, 1969. – 367 с.
6. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М. : Иностран. лит., 1960. – 400 с.

В. О. Гнатюк, У. В. Гудима

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

МЕТОД СІЧНОЇ ПЛОЩИНИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОЇ У РОЗУМІННІ СІМ'Ї ОПУКЛИХ ФУНКЦІЙ АПРОКСИМАЦІЇ КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННОВИМІРНИМ ПІДПРОСТОРОМ

Нехай S – компакт, X – лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел сепарабельний нормований простір, $C(S, X)$ – лінійний над полем дійсних чисел простір неперервних однозначних відображень g компакта S в X , неперервних на S , з нормою $\|g\| = \max_{s \in S} \|g(s)\|$, $K(X)$ – сукупність компактів простору X , $\tilde{C}(S, K(X))$ – множина багатозначних півнеперервних зверху на S відображень a компакта S в X таких, що для кожного $s \in S$ $a(s) \in K(X)$, V – скінченновимірний підпростір простору $C(S, X)$, $\{p_s\}_{s \in S}$ – сім'я заданих на X опуклих ліпшіцевих з константою l функцій таких, що відображення $s \in S \rightarrow p_s(x)$ неперервне на S при кожному $x \in X$. Ставиться задача відшукування величини

$$\alpha_V^*(a) = \inf_{g \in V} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s(y - g(s)). \quad (1)$$

Відображення $g^* \in V$ таке, що $\max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s(y - g^*(s)) = \alpha_V^*(a)$, на-

зивається екстремальним елементом для величини (1).

У роботі для відшукування величини (1) та її екстремального елемента побудовано збіжний метод, який базується на ідеї методу січних площин розв'язування задачі опуклого програмування, отримано двосторонні оцінки, які дозволяють знайти величину (1) з наперед заданою точністю.

М. Б. Демчук*,

О. Г. Наконечний**

*Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне,

**Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

ЧИСЛОВИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ НА ОСНОВІ МОДЕЛЕЙ ЦЕМЕНТАЦІЇ ҐРУНТУ З ВІЛЬНИМИ РУХОМИМИ МЕЖАМИ

Інколи виникає необхідність прокласти тунель у крейдяній породі. Су-ха крейда є міцною породою. Однак за достатньо великого вмісту вологи в ній вона стає м'якою [1]. Тому перед прокладанням тунелю в крейдяній породі її варто закріпити, щоб мати достатньо часу для встановлення тимчасових кріплень за дощової погоди. Цементация, за якої структура ґрунту не руйнується, є тим методом його стабілізації, що зазвичай використовується у цьому випадку. Під час цементации цементний розчин через інжектор під тиском нагнітається в ґрунт, що закріплюється [2]. Від того наскільки якісно закріплено ґрунт суттєво залежить продуктивність прокладання тунелю в ньому. Режим цементации визначається еволюцією просторового розподілу концентрації цементу в ґрунті, що закріплюється [3, с.1195]. Тому математичне моделювання цієї еволюції є важливим. За тисків в інжекторі порядку $12 \cdot 10^5$ Па, структура сухої крейдяної породи не руйнується [4, с.12]. У роботі [5, с.122-123] наведено аргументи на користь того, що за таких тисків нагнітання еволюцію просторового розподілу концентрації цементу в ґрунті можна моделювати задачею з вільною рухомою межею. Однак порівняння результатів розрахунків згідно таких моделей із результатами польових досліджень, ще не виконувалось. Інформативність такого порівняння залежить від похибок величин, що порівнюються [6, с.47]. Тому важливо коректно оцінювати похибки розрахунків. У роботі [7] представлено модифікацію числового моделювання [5], в якій забезпечено правомірність використання континуального підходу. Ця модифікація призводить тільки до зменшення часу нагнітання на 3,3%. Тобто кінцеві положення фронтів нагнітань і їх похибки методу розрахунку, отримані в роботі [7], співпадають із відповідними положеннями та похибками, отриманими в роботі [5]. Оскільки континуальний підхід є більш загальним поняттям, ніж тип континуальної моделі, ми вважаємо, що модифікувати числове моделювання [7] з метою забезпечення правомірності застосування континуальних моделей із вільними рухомими межами в ньому не потрібно. Криволінійні сітки, на яких викону-

ються розрахунки в роботі [7, с.177], можуть мати хаотичні розміщення своїх вузлів на деяких часових шарах. Однак це не призводить до неузгодженості результатів цих розрахунків. Тому різниці схеми, згідно яких виконуються розрахунки в роботі [7], є умовно стійкими. Таким чином, оцінюючи похибки цих розрахунків, похибками заокруглення можна знехтувати. У роботі [7, с.177] похибки методів розрахунків кінцевих положень фронтів нагнітань оцінено за припущення, що невизначеностями кінцевих положень вільних меж, які обумовлені невизначеністю у виборі методу інтерполювання фронту нагнітання на кожному часовому шарі, можна знехтувати. Метою даної роботи є числова перевірка цього припущення.

Список використаних джерел:

1. Arsena-hotel.com. Химические и биохимические породы. Часть 5. – Режим доступу: http://arsena-hotel.com/gruntovedenie/karakteristika_porod/khimicheskie5/
2. Moretrench. Grouting methods, 2010 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.moretrench.com/services_article.php?Grouting-Methods-Compensation-Grouting-www.Moretrench.com-52 .
3. Bouchelaghem F. Mathematical and numerical filtration-advection-dispersion model of miscible grout propagation in saturated porous media / F. Bouchelaghem, L. Vulliet // Int. J. for Num. and analytical methods in Geomech. – 2001. – № 12. – P. 1195-1227.
4. Warren C. Geotechnical aspects of the Strood and Higham railway tunnel relining and refurbishment [Електронний ресурс]: (Proceedings of the 10th Congress of the International Association for Engineering Geology and the Environment – Engineering geology for tomorrow's cities. «IAEG2006») / C. Warren, I Tromans. Електронні дані. – London: The Geological Society of London, 2006. – Режим доступу: <http://www.iaeg.info/iaeg2006/start.htm>
5. Демчук М.Б. Про моделі промислового циркулярного нагнітання цементного розчину в сухий ґрунт / М.Б. Демчук // Штучний інтелект. – 2011. – № 2. – С. 122-130.
6. Демчук М.Б. Узгоджена модель нагнітання цементного розчину в насичене пористе середовище / М.Б. Демчук // Наукові записки НАУКМА. Серія комп'ютерні науки. – 2011. – Т. 125. – С. 46-51.
7. Демчук М.Б. Застосування континуального підходу в моделях промислової цементації ґрунтів / М.Б. Демчук // Математичні машини та системи. – 2013. – № 3. – С. 170-177.

Т. О. Дерев'янку

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ГІПЕРБОЛІЧНИМИ СИСТЕМАМИ НАПІВЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

В області $\Pi = (0, l) \times (0, T)$ розглянемо напівлінійну систему гіперболічних рівнянь першого порядку

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t; \omega) + \lambda(x, t; \omega) \frac{\partial y}{\partial x}(x, t; \omega) = f(y, x, t; \omega) + g(y, x, t; \omega) \dot{w}(t; \omega), (x, t) \in \Pi,$$

де $y: \Pi \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ – вектор-функція розв’язку; λ – відображення з $\bar{\Pi} \times \Omega$ на простір $n \times n$ дійснозначних матриць:

$$\lambda(x, t; \omega) = d \dot{u} \ g \lambda_1(x, t; \omega), \lambda_2(x, t; \omega), \dots, \lambda_{m_1}(x, t; \omega);$$

$f: \mathbb{R}^n \times \Pi \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ – задана нелінійна функція; g – відображення з $\bar{\Pi} \times \mathbb{R}^n \times \Omega$ на простір дійснозначних матриць; \dot{w} – білий шум.

Зауважимо, що в одновимірному випадку довільну напівлінійну гіперболічну систему першого порядку з не діагональною характеристичною матрицею можна завжди звести до напівлінійної гіперболічної системи з діагональною характеристичною матрицею [1].

Розглянемо множини

$$I = \{1, 2, \dots, n\},$$

$$I_0 = \{i \in I \mid \lambda_i(x, t; \omega) > 0, (x, t; \omega) \in \Pi \times \Omega\},$$

$$I_1 = \{i \in I \mid \lambda_i(x, t; \omega) < 0, (x, t; \omega) \in \Pi \times \Omega\},$$

для яких $m_1 = \text{card}(I_0)$, $m_2 = \text{card}(I_1)$.

Для системи визначимо початкові та крайові умови:

$$y(x, 0; \omega) = y^0(u(x), x; \omega), (x; \omega) \in [0, l] \times \Omega,$$

$$y_i(0, t; \omega) = \gamma_i^0(y_{j \in I_0}(0, t), u^1(t), t; \omega), i \in I_0, (t; \omega) \in [0, T] \times \Omega,$$

$$y_i(l, t; \omega) = \gamma_i^l(y_{j \in I_1}(l, t), u^2(t), t; \omega), i \in I_1, (t; \omega) \in [0, T] \times \Omega,$$

де $y^0: U \times [0, l] \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$; $\gamma^0: \mathbb{R}^{n-m_1} \times U^1 \times \mathbb{R} \times \Omega$, $\gamma^l: \mathbb{R}^{n-m_2} \times U^2 \times \mathbb{R} \times \Omega$ – нелінійні функції; вектор функції керувань u, u^1, u^2 неперервно-диференційовні та приймають значення в компактах U, U^1, U^2 , які є підмножинами просторів $\mathbb{R}^{r_0}, \mathbb{R}^{r_1}, \mathbb{R}^{r_2}(r_0, r_1, r_2 \times \mathbb{N})$, відповідно.

Нехай цільовий функціонал має вигляд

$$J(y, u, u^1, u^2) = E \left(\int_0^l \Phi(y(x, T), x) dx + \iint_{\Pi} F(y(x, t), x, t) dx dt \right),$$

де $\Phi: \mathbb{R}^n \times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$, $F: \mathbb{R}^n \times [0, l] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ – нелінійні функції.

Отже задача полягає в мінімізації цільового функціоналу на множині допустимих керувань та відповідних траєкторій, які є розв’язками напівлінійної стохастичної гіперболічної системи.

Список використаних джерел:

1. Рождественский Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. – М. : Наука, 1978. – 592 с.
2. Turo J. Study of first order stochastic partial differential equations using integral contractors / J. Turo // Applicable analysis. – Vol. 70 (3-4). – P. 281-291.
3. Дерев’яно Т.О. Задача оптимального керування виродженою напівлінійною гіперболічною системою з нескінченним горизонтом планування / Т.О. Дерев’яно // Науковий вісник Ужгородського ун-ту, 2013. – Вип. 24. – № 2. – С. 48-62.

В. В. Довгай

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

ОСОБЛИВОСТІ ПІДГОТОВКИ СПЕЦІАЛІСТІВ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ НЕДЕТЕРМІНОВАНИХ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ МОДЕЛЮВАННЯ ЇХ ФУНКЦІОНУВАННЯ

Дослідження та оптимізація багатьох технічних систем, а надто таких, де суттєвим є вплив випадкових факторів, вимагає проведення серії експериментів, які, у випадку реалізації для цієї мети натурних випробувань, пов'язані, як правило, із великими затратами часових та матеріальних ресурсів. Невпинний прогрес у розвитку комп'ютерних технологій дозволяє в значній мірі уникнути цих затрат, якщо застосовувати методи дослідження та оптимізації згаданих систем за допомогою адекватного моделювання їх функціонування у відповідному середовищі, де враховано також вплив випадкових факторів. Вказаний підхід буде доцільним та ефективним, але тільки при наявності висококваліфікованих спеціалістів, здатних як розробляти алгоритми для обробки та аналізу експериментальних даних, так і створювати цифрові моделі функціонування технічних систем у відповідному середовищі, де діють випадкові фактори. На випуск таких спеціалістів і слід орієнтуватися вищим технічним учбовим закладам при складанні навчальних програм.

Щоб досягти високого рівня засвоєння студентами навчальних дисциплін, в яких викладаються методи статистичної обробки результатів серії експериментів, від студентів перш за все слід вимагати вміння створювати конкретні алгоритми на основі цих методів. При формуванні вхідних потоків експериментальних даних з необхідними випадковими збуреннями для перевірки ефективності та оптимізації реалізованих алгоритмів не варто покладатися на готові пакети прикладних програм, бо детальної документації для них, як правило, знайти неможливо. Тому майбутній спеціаліст повинен сам уміти створювати відповідне програмне забезпечення для цієї мети за допомогою алгоритмічних мов програмування високого рівня. Випадкова складова у цьому програмному забезпеченні найчастіше базується на алгоритмі формування псевдовипадкових чисел, що є значеннями рівномірно розподіленої на проміжку $[0;1]$ випадкової величини. Можна рекомендувати наступний алгоритм генерації таких псевдовипадкових чисел x_k ($k = 1, 2, \dots$)

$$\begin{cases} y_k = Ay_{k-1} \pmod{M}, \\ x_k = \frac{y_k}{M}, \end{cases}$$

реалізований ще в програмному забезпеченні для БЭСМ-6 при $A = 5^5$, $M = 2^{26}$, y_0 – непарне число з проміжку від 1 до 67108863. Перевірка за допомогою правостороннього критерію χ^2 на рівні ймовірності 0,95

непараметричної гіпотези про відповідність рівномірному закону розподілу одержаної таким чином послідовності із 100 і більше чисел показує, що підстав для відхилення такої гіпотези не існує. Всі інші розподіли, в тому числі і дискретні, імітуються шляхом відповідних перетворень x_k . Одержані результати моделювання вхідного потоку експериментальних даних утворюють одну реалізацію випадкової вибірки, яка і подається на вхід розробленого алгоритма з наступним аналізом його роботи та необхідним вдосконаленням чи оптимізацією всієї технічної системи, до чого також повинен бути підготовлений майбутній спеціаліст.

М. П. Дяченко, В. О. Людвиченко

Інститут комп'ютерно-інформаційних технологій, МАУП, м. Київ

ПРО КОМП'ЮТЕРНУ ТЕХНОЛОГІЮ ОБЧИСЛЕННЯ КОРЕНІВ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ СКАЛЯРНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАДАНОЮ ТОЧНІСТЮ ЗА НЕВ'ЯЗКОЮ

Вступ. Поява суперкомп'ютерів та мереж комп'ютерів відкрила нові можливості для моделювання і проведення обчислювального експерименту у фундаментальних і прикладних дослідженнях, зокрема використання як лінійних, так і нелінійних математичних моделей для опису і дослідження різних реальних процесів та явищ. В якості таких моделей виступають різні типи нелінійних рівнянь математичної фізики -- диференціальні рівняння в частинних похідних, інтегральні рівняння або системи таких рівнянь.

Поряд із побудовою нелінійних математичних моделей актуальною проблемою є також вибір методів їх розв'язання. У більшості випадків такі задачі розв'язуються з використанням відомих варіаційно-проекційних методів, таких як метод Гальоркіна, колокації, тощо і тим самим зводяться до розв'язування систем нелінійних скалярних (алгебраїчних та трансцендентних) рівнянь [1-3].

При розв'язанні систем нелінійних скалярних рівнянь (СНСР) тієї або іншої розмірності n ($n \geq 2$) ставляться задачі обчислення: одного кореня або всіх (по можливості) ізольованих коренів в заданій області $\Omega \subset R^n$. Проблема обчислення всіх ізольованих коренів таких нелінійних систем рівнянь (глобального їх розв'язання) характеризується тим, що для них апіорі невідомі ні кількість цих коренів, ні область $\Omega \subset R^n$, в якій вони розташовані.

В доповіді розглядаються питання розробки і використання комп'ютерної технології для розв'язання класів задач обчислення коренів систем нелінійних скалярних рівнянь (СНСР) із заданою точністю за нев'язкою, а саме:

- виділення за певними ознаками класів задач обчислення коренів СНСР;
- методи і алгоритми відокремлення підобластей $\Omega_j \subset \Omega \subset R^n$, $j = 1, \dots, m$, яким належать ізольовані корені $x_j^* = (x_{j1}^*, x_{j2}^*, \dots, x_{jn}^*)$ в залежності від розмірності СНСР і наявного інформаційного оператора;

- ітераційні методи і алгоритми для обчислення із заданою точністю за нев'язкою ε -коренів $x_{\varepsilon,j}^*$, $j=1,\dots,m$;
- використання для розв'язання різних класів задач обчислення - коренів СНСР наявного програмного забезпечення, в якому реалізовані або мають бути реалізовані відповідні алгоритми на основі указаних методів.

1. Постановка і виділення класів задач. Нехай маємо систему нелінійних скалярних рівнянь (СНСР)

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

де $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Система нелінійних рівнянь (1) може бути як сумісною, так і несумісною, яка не має коренів. Нехай система рівнянь (1) сумісна і має m ($m \geq 1$) коренів $x_j^* = (x_{j1}^*, x_{j2}^*, \dots, x_{jn}^*)$ таких, що $x_j^* \in \Omega \subset R^n$,

$$\Omega = \left\{ x: a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n \right\}, f(x_j^*) = 0, j = 1, \dots, m.$$

Для системи нелінійних скалярних рівнянь (1) може ставитися одна із задач: обчислити один будь-який ε -корінь $x_\varepsilon^* \in \Omega \subset R^n$ або обчислити всі (по можливості) ε -корені $x_{\varepsilon,j}^* \in \Omega \subset R^n$ в заданій області $\Omega = \left\{ x: a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n \right\}$, які забезпечують задану точність $\varepsilon \geq 0$ розв'язку за нев'язкою, а саме

$$\min_{x \in \Omega} F_1(x) = \min_{x \in \Omega} \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ |f_i(x)| \right\} = F_1(x_\varepsilon^*) \leq \varepsilon \quad (2)$$

або

$$\min_{x \in \Omega} F_2(x) = \min_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^m f_i^2(x) = F_2(x_\varepsilon^*) \leq \varepsilon. \quad (3)$$

Таким чином, задача обчислення будь-якого ε -кореня $x_\varepsilon^* \in \Omega \subset R^n$ або всіх (по можливості) ε -коренів $x_{\varepsilon,j}^* \in \Omega \subset R^n$ відповідно зводиться до задачі обчислення будь-якої ε -точки глобального мінімуму $x_\varepsilon^* \in \Omega \subset R^n$ або всіх (по можливості) ε -точок глобального мінімуму $x_{\varepsilon,j}^* \in \Omega \subset R^n$ функції $F_1(x)$ або функції $F_2(x)$, значення глобального мінімуму якої дорівнює нулю:

$$\mathit{glob} \min_{x \in \Omega} F_k(x) = F_k(x_j^*) = 0, k = 1, 2.$$

У випадках несумісності СНСР (1)

$$\mathit{glob} \min_{x \in \Omega} F_k(x) = F_k(x^*) > 0, k = 1, 2.$$

Задача обчислення ε -коренів СНСР може бути віднесена до того чи іншого класу за такими ознаками:

- 1) розмірність n СНСР, тобто кількість рівнянь: кількість рівнянь мала, $2 \div 5 \leq n \leq 7 \div 9$, значна кількість -- $7 \div 9 \leq n \leq 20 \div 50$ та велика кількість рівнянь, $20 \div 50 \leq n \leq 100 \div 1000$;
- 2) структура і властивості функцій $f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$: функції алгебраїчні, трансцендентні, s раз ($s = 0, 1, 2$) диференційовані; задовольняють умову Ліпшиця з відомими константами, тощо;
- 3) вимоги до обчислення ε -коренів СНСР із заданою точністю $\varepsilon \geq 0$ за нев'язкою (2):
 - обчислити будь-який ε -корінь в околі заданої точки $x^0 \in \Omega$,
 - обчислити всі (по можливості) відокремлені ε -корені системи рівнянь в заданій області Ω ;
 - 4.інформаційний оператор I , тобто задана інформація про функції $f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, яка може бути використана для обчислення ε -коренів СНСР:
 - за заданими формулами обчислення в будь-якій точці $x \in \Omega$ значень функцій $f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, та значення їх перших частинних похідних, константи Ліпшиця цих функцій;
 - за заданими формулами обчислення в будь-якій точці $x \in \Omega$ значень функцій $f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, та константи Ліпшиця цих функцій;
 - за заданими формулами обчислення в будь-якій точці $x \in \Omega$ значень функцій $f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$.

2. Послідовність кроків комп'ютерної технології для обчислення ε -коренів СНСР:

- на основі аналізу апріорної інформації про математично змодельований природничий процес або явище і очікувані розв'язки, приймається рішення про область розташування розв'язків відповідного нелінійного функціонального (операторного) рівняння та відповідну область $\Omega \subset R^n$ розташування коренів СНСР;
- здійснюється відокремлення розв'язків, тобто знаходження в заданій області Ω підобластей $\Omega_j \subset \Omega$, $j = 1, \dots, m$, єдиності ізольованих коренів СНСР;
- в відокремлених підобластях $\Omega_j \subset \Omega \subset R^n$ ізольованих коренів обчислюються ε -корені СНСР відповідним ітераційним алгоритмом.

3. Методи відокремлення підобластей $\Omega_j \subset \Omega$ для знаходження ізольованих ε -коренів

В залежності від розмірності СНСР і наявного інформаційного оператора можуть бути використані:

- методи побудов ε - сіток [4-6] для знаходження підобластей $\Omega_j \subset \Omega$ ізольованих ε -коренів у випадках, коли система рівнянь (1) невеликої розмірності,, $2 \div 5 \leq n \leq 7 \div 9$;
- метод мултистарту для виділення підобластей $\Omega_l \subset \Omega$ і обчислення початкових точок $x_l^0 \in \Omega_l \subset R^n$, $l = 1, \dots, L$, для знаходження ε -коренів у випадках, коли система рівнянь (1) значної розмірності,, $7 \div 9 \leq n \leq 20 \div 50$;
- метод Монте-Карно для обчислення початкових точок $x_l^0 \in \Omega \subset R^n$, $l = 1, \dots, L$, $F_1(x_l^0) \leq \Delta < 1$, у випадках, коли система рівнянь (1) має велику розмірність,, $20 \div 50 \leq n \leq 100 \div 1000$.

4. Ітераційні алгоритми для обчислення відокремлених ε -коренів

В залежності від того, який інформаційний оператор використовується для обчислення ε -коренів із мінімізації функції нев'язок (2) або (3), алгоритми можуть бути застосовані такі [1-3]:

- алгоритми нульового порядку; які використовують інформацію про значення функцій $f(x)$ та їх константи Ліпшица (оцінки перших частинних похідних);
- алгоритми першого порядку; які використовують як значення функцій $f(x)$, так і значення їх перших частинних похідних.

Такими алгоритмами є модифіковані алгоритми простої ітерації та Ньютонна, алгоритми узагальнених градієнтів та випадкового пошуку і швидкого спуску, тощо.

Вказані алгоритми для розв'язання задачі мінімізації функції нев'язок $F_1(x)$ укладаються в наступну ітераційну схему

$$x^{r+1}_i = x^r_i + \alpha_r p^r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

яка забезпечує побудову послідовності точок, що сходиться до ε – кореня. Ці алгоритми визначаються: вибором початкової точки $x^0 \in \Omega \subset R^n$, способами знаходження вектора спуску $p^r = (p^r_1, \dots, p^r_n)$ та обчислення довжини кроку α_r і критерієм зупинки ітераційного процесу (4), а саме

$$F(x^r) \leq \varepsilon,$$

який і забезпечує обчислення ε – кореня.

5. Про використання наявного _програмного забезпечення для розв'язання класів задач обчислення ε -коренів СНСР:

- доступдо потужних обчислювальних ресурсів у хмарі;
- розпаралелювання обчислень з використанням багатопроцесорних дискретних відеокарт персональних комп'ютерів на основі технології NVIDIA CUDA.

Список використаних джерел:

1. Бейко І.В. Задачі, методи і алгоритми оптимізації : навчальний посібник / І.В. Бейко, П.М. Зінько, О.Г. Наконечний. – Рівне: НУВГП, 2011. – 624 с.
2. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ : справочное пособие / В.В. Иванов. – К. : Наук. думка, 1986. – 584 с.
3. Т-ефективні алгоритми наближеного розв'язання задач обчислювальної та прикладної математики / В.К. Задірака, М.Д. Бабич, А.І. Березовський та ін. – К. : Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2003 р. – 261 с.
4. Бабич М.Д. Об одном алгоритме приближенного решения систем нелинейных уравнений / М.Д. Бабич, Л.Б. Шевчук // Кибернетика. – 1982. – №2. – С. 74-78.
5. Семенов В.Ю. Новый метод локализации корней трансцендентных уравнений / В.Ю. Семенов // Компьютерная математика. – 2004. – № 1. – С. 143-151.
6. Евтушенко Ю.Г. Параллельный поиск глобального экстремума функций многих переменных / Ю.Г. Евтушенко, В.У. Малкова, А.А. Станевичюс // Журн. выч.математ. и мат. физики. – 2009. – Т. 49, №2. – С. 255-269.
7. Параллельные вычисления CUDA. – Режим доступа: <http://www.nvidia.ru/object/cuda-parallel-computing-ru.html/>
8. Сандерс Д., Кэндрот Э. Технология CUDA в примерах / Д. Сандерс, Э. Кэндрот. – М., ДМК, 2011.

М. П. Дяченко, В. О. Людвиченко, Т. А. Тарасенко

Інститут комп'ютерно-інформаційних технологій, МАУП, м. Київ

ПРО ОБЧИСЛЕННЯ ВАРТОСТІ ХАРЧУВАННЯ ЛЮДИНИ НА ОСНОВІ МОДЕЛЕЙ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ І ЗАДАЧІ ДІЄТИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

«Ми живемо не для того, щоб їсти,
а їмо задля того, щоб жити».

Сократ

Серед потреб людини – їжа (білки, вуглеводи, жири, вітаміни та мікроелемент, а також повітря і вода) стоїть на першому місці для забезпечення її життя і життєдіяльності. А тому оцінювання вартісної величини (у грошових одиницях) харчування людини достатнього для забезпечення нормального функціонування її організму та збереження здоров'я -- актуальна проблема при здійсненні управління життям суспільства та його соціально-орієнтованої ринкової економіки.

Вартісна оцінка купівельної спроможності окремої особи або сім'ї купити певний (у відповідності до науково обґрунтованих норм) набір продуктів харчування для забезпечення свого життя та життєдіяльності характеризує відповідний життєвий рівень (зокрема прожитковий мінімум) окремої особи та сім'ї (із різною кількістю її членів).

Проблема обчислення оцінок вартості харчування людини розглядається на основі:

- вибіркового статистичного методу з використанням інформації про триразове на день харчуванні в їдальнях та кафе вибраного міста або регіону;

- середньостатистичних цін на продукти харчування, які мають бути закуплені у відповідності до науково-обґрунтованих норм для приготування їжі на сніданок, обід і вечерю;
- вибіркового статистичного методу з використанням інформації про одноразове на день харчуванні в їдальнях або кафе та про середньостатистичні ціни на продукти харчування, які мають бути закуплені для приготування їжі на сніданок і вечерю;
- середньостатистичних цін на продукти харчування і задачі дієти лінійного програмування для знаходження мінімального за вартістю набору продуктів харчування для приготування їжі.

Список використаних джерел:

1. Закон України про прожитковий мінімум // Відомості Верховної Ради (ВВР). – 1999. – № 38. – С. 348.
2. Людвиченко В.О. Прожитковий мінімум і обчислення його вартості / В.О. Людвиченко, Т.А. Тарасенко // Журн. «Персонал». – 2010. – № 2. – С. 18-21.
3. Нормы физиологических потребностей в пищевых веществах энергии для различных групп населения СССР. Министерство здравоохранения СССР. – М., 1991.
4. Ульяновченко О.В. Дослідження операцій в економіці : підручник для студентів вузів / О.В. Ульяновченко. – Харків : Гриф, 2002. – 580 с.
5. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посібник / Р.К. Чорней, О.Ю. Дюженкова, О.Б. Жильцов та ін. – К. : МАУП, 2003. – 328 с.

О. А. Дячук, Р. З. Подолець

ДУ «Інститут економіки та прогнозування НАН України», м. Київ

ІНТЕГРОВАНІЙ ПІДХІД ДО МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ ЕНЕРГЕТИЧНОГО БАЛАНСУ УКРАЇНИ

Енергетичні баланси характеризують наявні паливно-енергетичні ресурси (ПЕР) в країні та ефективність їх використання, що визначається співвідношенням між постачанням (видобуток, виробництво, чистий імпорт) та споживанням різних видів ПЕР [1, 2].

Аналізуючи енергетичний баланс України та порівнюючи його з балансами світової економіки та економічно-розвиненими країнами [3, 4] можна стверджувати, що його структура не є оптимальною і потребує комплексу заходів для її оптимізації за соціально-економічними та екологічними критеріями розвитку держави. Крім того, економіка України має великий рівень енергоємності та вуглецеємності, що в декілька разів перевищує середній рівень ЄС. В той же час доходи населення в Україні майже в шість разів нижчі ніж в середньому по ЄС, а тарифи на тепло-комунальні послуги для населення нижче за економічно обґрунтовані.

Шляхи оптимізації енергетичного балансу України мають базуватися на заходах із енергозбереження, енергоефективності, скорочення використання вуглецемістких енергоресурсів, інтенсивного використання відновлю-

вальних джерел енергії, впровадженні інноваційних технологій тощо. Спирок конкретних заходів зазначеного типу дуже великий і потребує використання комп'ютерних засобів для визначення технічних умов та екологічних наслідків їх реалізації, оцінки необхідних інвестицій або зміни тарифної політики, вивільнення або збільшення робочих місць, тощо.

Тому для вибору найбільш продуктивних заходів оптимізації енергетичного балансу країни за різними часовими періодами їх імплементації необхідно використовувати комплекс моделей енергетичного, соціально-економічного, екологічного та іншого характеру, які в сукупності своїй будуть утворювати інтегрований модельний інструментарій для підтримки прийняття рішень в зазначеному процесі [5].

На сьогоднішній день, в ДУ «Інститут економіки та прогнозування НАН України» ведуться роботи по створенню такого інтегрованого модельного інструментарію. Розроблено і постійно удосконалюються оптимізаційна економіко-математична модель із заданим попитом (типу «знизу-вгору») усіх основних енергетичних потоків України (модель «TIMES-Україна» [6]) та обчислювальна модель загальної рівноваги (ОМЗР) економіки України (типу «зверху-вниз») [5], в основі якої лежить розширена таблиця витрати-випуск України (матриця суспільних рахунків). Розпочато розробку моделі електроенергетичного сектору з використанням програмного пакету WASP [7].

Модель «TIMES-Україна» дозволяє проводити дослідження різних енерго-екологічних сценаріїв (набору заходів, умов та припущень) оптимізації енергетичного балансу України на довгостроковий період. Модель WASP дозволить коректніше представити роботу електростанцій завдяки врахуванню більш детальних їх техніко-економічних характеристик. ОМЗР дозволяє оцінити економічні та деякі соціальні наслідки впровадження досліджуваних енерго-екологічних сценаріїв.

Як показує досвід розвинених країн, розроблення стратегічних документів енергетичного, соціально-економічного, екологічного характеру завжди має наукове та експертне супроводження, що ґрунтується на використанні комплексу модельних засобів підтримки прийняття рішень. Україна значно відстає в цьому, однак запит на такого роду супроводження вже достатньо високий.

Список використаних джерел:

1. Подолець Р.З. Енергетичний баланс України: моделювання та прогнозування / Р.З. Подолець. – К. : Інститут економіки та прогнозування НАНУ, 2007. – 174 с.
2. Лїр В.Е. Організаційно-методологічні аспекти розробки, економічного аналізу та прогнозування зведеного енергетичного балансу України / В.Е. Лїр // Економіка і прогнозування. – 2004. – № 2. – С. 101-115.
3. Key World Energy Statistics [Електронний ресурс] / International Energy Statistic. – Режим доступу: <http://www.iea.org/media/training/presentations/statisticsmarch/BalancesofNonOECDCountries.pdf>
4. Енергетичний баланс України [Електронний ресурс] / Державна служба статистики України. – Режим доступу: <http://www.ukrstat.gov.ua/>

5. Подолець Р.З. Комплексне моделювання розвитку енергетичних систем / Р.З. Подолець, О.А. Дячук, М.Г. Чепелев // Інформаційні технології та моделювання в економіці: на шляху до міждисциплінарності: монографія / За ред. д.ф.-м.н., проф. В.М. Соловйова та ін. – Черкаси: Брама-Україна, 2013. – С. 256-278.
6. Подолець Р.З. Стратегічне планування у паливно-енергетичному комплексі на базі моделі «TIMES-Україна» / Р.З. Подолець, О.А. Дячук // Наук. доп. НАН України; Ін-т екон. та прогноз. – К., 2011. – 150 с.
7. Wien Automatic System Planning (WASP) Package [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www-pub.iaea.org/MTCD/publications/PDF/CMS-16.pdf>

Г. В. Журавська, Т. П. Демидюк

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ЗА ДОПОМОГОЮ МОВИ ПРОГРАМУВАННЯ ПРОЦЕСІНГ

Одним з основних напрямів процесу інформатизації сучасного суспільства є інформатизація освіти, що представляє собою систему методів, процесів та програмно-технічних засобів. Комп'ютерні технології дають можливість зробити навчання більш ефективним, дозволяючи створити яскраве мультисенсорне середовище навчання, розвинути інтелектуальні та творчі здібності студентів, що сприяє кращому засвоєнню матеріалу.

Важливу роль серед дисциплін фундаментального циклу підготовки випускників інженерних спеціальностей грає курс вищої математики. Серед кредитних модулів дисципліни «диференціальні рівняння» та «математична фізика» мають універсальне застосування, але часто ці дуже важливі розділи залишаються для студентів лише «сухими» математичними формулами.

Рівняння математичної фізики представляють собою диференціальні рівняння в частинних похідних другого та більш високих порядків. Але при математичному моделюванні конкретного фізичного процесу одного рівняння недостатньо, тому математичне формулювання повинно містити в собі окрім основного рівняння ще й додаткові, що описують процес на границі досліджуваного об'єкта в будь-який момент часу та у всіх внутрішніх точках у початковий момент часу. Рівняння з початковими та граничними умовами називаються задачами математичної фізики.

Метою нашого проекту було отримання візуалізації таких задач за допомогою мови програмування «Процесінг». Ця мова програмування знаходиться у вільному доступі, є сі-подібною та спеціалізується на візуалізації [1]. Зазвичай працює з допомогою графічних примітивів, але є можливість підключити OpenGL, дозволяє реалізацію 2D та 3D моделей, а також вивод в форматі PDF. Зручна в користуванні, так як є крос-платформеною мовою, працює на GNU/Linux, MacOSX, Windows, а також на мобільній платформі Android. «Процесінг» має можливість підключати понад 1000 бібліотек.

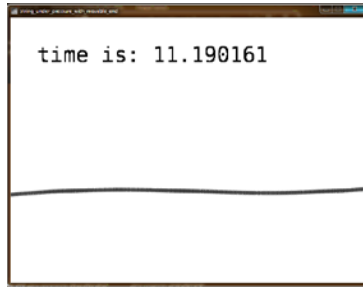


Рис. 1

На рис. 1 видно результат програми на мові «Процесінг».

Досліджувалася задача коливання струни, один кінець якої жорстко, а інший рухається.

Розв'язок такої задачі, отриманий методом відокремлення змінних, має вигляд:

$$U(x,t) = \frac{A \sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t}{\sin \frac{\omega}{a} l} + 2A\omega \frac{a}{l} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\omega^2 - \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2} \cdot \sin \frac{\pi n a}{l} t \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

де x – координата точки струни, t – момент часу в котрий виконується спостереження, $U(x,t)$ – функція, котра повертає положення точки з координатою x в момент часу t , l – довжина стержня

Як це працює? В код програми записано рівняння, що було описано вище та інші параметри струни. Програма виконується блоками, їх в програмі два. Спершу програма з допомогою рівняння вираховує положення кожної точки струни при певному заданому часі. Ця процедура організована за допомогою циклу: в рівняння підставляються значення ікса від нуля до l та отримуються значення положень точок струни. Далі ці значення записуються в масив. Отримавши ці значення, програма переходить в другий блок.

В другому блоці реалізується візуалізація. Графічно, для зручності струна побудована з еліпсів, що побудовані по координатах, що відповідають координатам нашої струни. Координати, котрі знаходяться в масиві значень з першого блоку програми, ми використали, як координати центрів для еліпсів, щоб побудувати струну. Після того, як еліпси побудовано, ми отримуємо статичне зображення струни в певний момент часу. На цьому закінчується другий блок.

Після виконання двох блоків до параметру t додається 0.01 і код виконується повторно. Після цього зображення замінюється іншим, з параметром $t+0.01$. Це означає що далі ми отримаємо струну в наступний момент часу. І так може продовжуватись нескінченно, доки користувач не зупинить програму. Код виконується досить швидко і можемо спостерігати анімацію коливань струни. Також на екран виводиться поточне значення часу.

Отримані результати можуть бути використаними як ілюстрації при вивченні курсу математичної фізики студентами напряму підготовки «Прикладна механіка».

Мова програмування «Процесінг» також може бути корисна і для інженера. На основі вищеописаного алгоритму можна створити програму для обрахунку напружень або деформацій в стержні. На прикладі консольно закріпленої балки з прикладеним на вільному краю зусиллям можливо отримати розподіл напружень. І за таким же принципом, як в програмі для розповсюдження тепла, візуально показати ці напруження та деформації. Також є можливість виконувати великий об'єм розрахунків та робити графіки на основі даних.

Список використаних джерел:

1. Режим доступу: processing.org
2. Innovation in Science and Technology. Part II. X International Students Conference. Conference Proceedings . April 9, 2013. – Kyiv, 2013. – P. 12-13.

Г. В. Журавська, Т. П. Демидюк

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

МОВА ПРОГРАМУВАННЯ ПРОЦЕСІНГ ДЛЯ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Одним з основних напрямів процесу інформатизації сучасного суспільства є інформатизація освіти, що представляє собою систему методів, процесів та програмно-технічних засобів. Комп'ютерні технології дають можливість зробити навчання більш ефективним, дозволяючи створити яскраве мультисенсорне середовище навчання, розвинути інтелектуальні та творчі здібності студентів, що сприяє кращому засвоєнню матеріалу.

Важливу роль серед дисциплін фундаментального циклу підготовки випускників інженерних спеціальностей грає курс вищої математики. Серед кредитних модулів дисципліни «диференціальні рівняння» та «математична фізика» мають універсальне застосування, але часто ці дуже важливі розділи залишаються для студентів лише «сухими» математичними формулами.

Рівняння математичної фізики представляють собою диференціальні рівняння в частинних похідних другого та більш високих порядків. Але при математичному моделюванні конкретного фізичного процесу одного рівняння недостатньо, тому математичне формулювання повинно містити в собі окрім основного рівняння ще й додаткові, що описують процес на границі досліджуваного об'єкта в будь-який момент часу та у всіх внутрішніх точках у початковий момент часу. Рівняння з початковими та граничними умовами називаються задачами математичної фізики.

Метою нашого проекту було отримання візуалізації таких задач за допомогою мови програмування «Процесінг». Ця мова програмування

знаходиться у вільному доступі, є сі-подібною та спеціалізується на візуалізації [1]. Зазвичай працює з допомогою графічних примітивів, але є можливість підключити OpenGL, дозволяє реалізацію 2D та 3D моделей, а також вивод в форматі PDF. Зручна в користуванні, так як є крос-платформеною мовою, працює на GNU/Linux, MacOSX, Windows, а також на мобільній платформі Android. «Процесінг» має можливість підключати понад 1000 бібліотек.

Досліджувалася крайова задача для рівняння теплопровідності, що відповідає такій фізичній постановці: мідний стрижень певної довжини, що має густину $\rho = 8,96 \text{ г/см}^3$, коефіцієнт теплопровідності $k = 385 \text{ МДж/мК}$ та теплоємність $c = 385 \text{ Дж/кгК}$, нагріто посередині до початкової температури 160°C . Кінці стрижня теплоізовані, отже, стрижень поступово остигає. Розв'язок такої задачі, отриманий методом відокремлення змінних, має вигляд:

$$U(x,t) = \frac{41}{\rho c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{2l}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{k}{\rho c}} t\right)$$

де x – координата точки стержня, t – момент часу, в який виконується спостереження, $U(x,t)$ – функція, котра повертає значення температури в заданій точці і в заданий момент часу, l – довжина стержня.

Як це працює? В код програми записано рівняння теплопровідності та інші параметри стержня. Програма виконується блоками, їх в програмі два. Спершу програма вираховує температуру в кожній точці стержня при певному заданому часі. Ця процедура організована з допомогою циклу: в рівняння підставляються значення ікса від 1 до l та отримуються значення температури в кожній точці. Далі значення записуються в масив значень температури. Отримавши ці значення програма переходить в другий блок.

В другому блоці коду реалізується візуалізація. Графічно, для зручності, стержень складений з прямокутників, що побудовані по координатах, які відповідають координатам нашого стержня. Щоб показати температуру в кожній точці потрібно зафарбувати кожен прямокутник кольором відповідного відтінку. Тут використовується таке позначення кольору: «RGB». Це означає, що для того щоб вивести на екран певний колір, потрібно вказати три параметри: R – кількість червоного, G – кількість зеленого, B – кількість синього. Разом ці параметри дають бажаний колір. Замість першого параметра програма підставляє значення з масиву температури. Якщо температура близька до нуля, то прямокутник зафарбується в темно-синій колір, чим більша буде температура, тим більшим буде значення R при визначенні кольору і прямокутник зафарбується в світло-червоний колір. Варіювання показника дозволяє змінювати відтінок прямокутника.

Після виконання двох блоків коду, програма збільшує змінну «t» на 1 секунду і проходить попередні два блоки коду заново, з новим значенням часу. Попереднє зображення стрижня замінюється новим. І так може

продовжуватись до нескінченості, поки користувач не зупинить програму. Також програма виводить на екран значення температури на краях і посередині стрижня і час. В результаті ми маємо динамічну картинку температури стрижня.

Отримані результати можуть бути використаними як ілюстрації при вивченні курсу математичної фізики студентами напряму підготовки «Прикладна механіка».

Мова програмування «Процесінг» також може бути корисна і для інженера. На основі вищеописаного алгоритму можна створити програму для обрахунку напружень або деформацій в стержні. На прикладі консольно закріпленої балки з прикладним на вільному краю зусиллям можливо отримати розподіл напружень. І за таким же принципом, як в програмі для розповсюдження тепла, візуально показати ці напруження та деформації. Також є можливість виконувати великий об'єм розрахунків та робити графіки на основі даних.

Список використаних джерел:

1. Режим доступу: processing.org.
2. Innovation in Science and Technology. Part II. X International Students Conference. Conference Proceedings . April 9, 2013. – Kyiv, 2013. – P. 12-13.

Т. О. Заболотько, С. Д. Івасишен

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м.Київ

ПОВНЕ АНАЛІТИЧНЕ ОПИСАННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЕНТАМИ

При математичному моделюванні деяких реальних процесів виникають параболічні рівняння з різними особливостями та виродженнями, зокрема рівняння зі зростаючими на нескінченності коефіцієнтами. Важливим поняттям для таких рівнянь і, взагалі, для всіх параболічних рівнянь є фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК), точна інформація про який дозволяє одержувати досить точні результати в теорії задачі Коші та навіть теорії крайових задач.

У доповіді розглядається рівняння

$$\partial_t u(t, x) = \sum_{|k| \leq 2b} a_k(t) \partial_x^k u(t, x) + a \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} (x_j u(t, x)),$$

$$t \in (0, T], x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

в припущенні, що a – дійсне число, b – натуральне число, $a_k \cdot |k| \leq 2b$, – неперервні на відрізку $[0, T]$ комплекснозначні функції такі, що

$$\exists \delta > 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}^n :$$

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|=2b} a_k(t) (i\sigma)^k \leq -\delta |\sigma|^{2b},$$

де i – уявна одиниця. Для рівняння (1) дається повне аналітичне описання ФРЗК. Цей результат дозволяє побудувати та вивчити ФРЗК для рівняння вигляду (1) у випадку, коли коефіцієнти a_k залежать усіх змінних.

Н. В. Задорожня, Я. І. Єлейко

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ЗАСТОСУВАННЯ КЛАСТЕРНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ОЦІНКИ СЕРЕДНЬОГО РІВНЯ ЗНАТЬ МАТЕМАТИКИ ПО РЕГІОНАХ УКРАЇНИ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ЗОВНІШНЬОГО НЕЗАЛЕЖНОГО ОЦІНЮВАННЯ

У світі давно існує практика проведення тестового контролю та діагностики для оцінювання рівня знань випускників шкіл та тестування абітурієнтів для прийому у вищі навчальні заклади. Результати таких тестувань широко застосовують для аналізу рівня знань школярів, знаходження слабих і сильних місць в національній системі середньої освіти для подальшого підвищення надійності та валідності тесту.

Українським аналогом такого оцінювання рівня знань є Зовнішнє Незалежне оцінювання (ЗНО). Досвід України в емпіричному дослідженні тестового контролю рівня знань учнів доволі малий порівняно з багаторічним досвідом країн Європи і США, і тому система ЗНО відповідно знаходиться на стадії корекції і удосконалення.

Проведемо аналіз результатів тестування ЗНО з математики 27 регіонів України за останні п'ять років і класифікуємо їх за ступенем однорідності. Ця задача може бути розв'язана з використанням теорії розпізнавання образів, до якої відноситься кластерний аналіз.

Кластерний аналіз – це сукупність методів класифікації багатомірних спостережень або об'єктів, заснованих на визначенні поняття відстані між об'єктами з наступним виділенням з них груп, «згустків» спостережень (кластерів, таксонів) [1, с.4].

Слід зазначити, що різні методи кластеризації породжують різні кластерні рішення для одних і тих же даних. Тому в залежності від вхідних даних і бажаних результатів варто наперед визначитися з методами. Проаналізуємо за допомогою методу k -середніх з використанням евклідової відстані (її доцільно обирати, якщо спостереження належать до генеральних сукупностей, які підпорядковуються багатомірним нормальним законам, а компоненти вектора спостережень є незалежними і мають одну й ту саму дисперсію) [2, с.164-165]

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} .$$

У кластеризації цим методом дослідник наперед задає кількість кластерів і об'єкти переміщуються з одних кластерів в інші з метою отримати найбільш значущий результат при проведенні дисперсійного аналізу [2].

Аналіз результатів тестування в розрізі регіонів України здійснено за допомогою програмного пакету для статистичного аналізу STATISTICA.. Як критерій підібрано середній бал і дисперсія, що припадають на регіон. Усі розрахунки здійснені за даними Українського Центру Оцінювання Якості Освіти [3]. За результати кластеризації отримано об'єднання регіонів, результати якого наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

*Результат кластеризації результатів ЗНО з математики
за 2009-2013 роки*

Клас-тери/Рік	2009	2010	2011	2012	2013
Високий рівень	Закарпатський, Івано-Франк., Львівський, Чернівецький, м. Київ	Закарпатський, Івано-Франк., Львівський, Сумський, м. Київ	Івано-Франк., Львівський, м. Київ	Закарпатський, Івано-Франк., Львівський, Чернігівський, м. Київ	Дніпропетровський, Івано-Франк., Львівський, м. Київ
Середній рівень	АР Крим, Волинський, Дніпропетровський, Донецький, Запорізький, Київський, Львівський, Миколаївський, Одеський, Рівненський, Сумський, Харківський, Хмельницький, Черкаський	Вінницький, Волинський, Дніпропетровський, Донецький, Запорізький, Київський, Миколаївський, Одеський, Рівненський, Херсонський, Хмельницький, Чернівецький, Чернігівський	АР Крим, Дніпропетровський, Донецький, Закарпатський, Київський, Одеський, Рівненський, Сумський, Харківський, Хмельницький, Черкаський, Чернігівський	Дніпропетровський, Донецький, Житомирський, Запорізький, Київський, Миколаївський, Одеський, Полтавський, Рівненський, Сумський, Харківський, Херсонський, Хмельницький, Черкаський, м. Севастополь	Донецький, Житомирський, Закарпатський, Запорізький, Київський, Кіровоградський, Миколаївський, Одеський, Рівненський, Сумський, Харківський, Херсонський, Черкаський, Чернігівський
Низький рівень	Вінницький, Житомирський, Кіровоградський, Луганський, Полтавський, Тернопільський, Херсонський, Чернівецький, м. Севастополь	АР Крим, Житомирський, Кіровоградський, Луганський, Полтавський, Тернопільський, Харківський, Черкаський, м. Севастополь	Вінницький, Волинський, Житомирський, Запорізький, Кіровоградський, Луганський, Миколаївський, Полтавський, Тернопільський, Херсонський, Чернівецький, м. Севастополь	АР Крим, Вінницький, Волинський, Кіровоградський, Луганський, Тернопільський, Чернівецький	АР Крим, Вінницький, Волинський, Луганський, Полтавський, Тернопільський, Хмельницький, Чернівецький, м. Севастополь

В кожного кластера є свої середні бали і дисперсія. Порівняємо їх з середнім балом і дисперсією всієї України за відповідні роки. Розглянемо коефіцієнти варіації для кожного кластера і коефіцієнт варіації як відношення квадратного кореня дисперсії до середнього балу України, які наведені в лінійному графіку (рис. 1).

Аналізуючи таблицю 1 бачимо, що у всіх роках в кластер Високого рівня з середнім балом 154 стабільно входили Івано-Франківський і Львівський регіони і м. Київ. У кластері Середньому рівні з оцінкою в 151 балів перебували без зміни свого рівня регіони Донецьку, Києва, Одеси і Рівне. А от в Низький рівень протягом п'ять років входили лише Луганська і Тернопільська області і середня оцінка кластера рівна 150,5 бали.

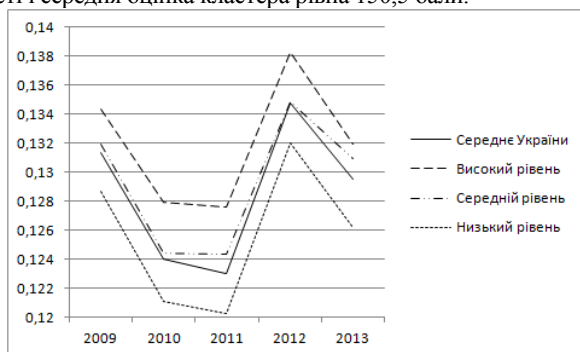


Рис. 1. Порівняльний графік коефіцієнтів варіації кластерів і середніх значень України

Як видно з графіку, у 2010-2011 роках спостерігається падіння рівня середніх балів. Зокрема, у 2011 році в кластер Низького рівня увійшло 12 регіонів, що є рекордом за всі п'ять років. А от у 2012 році спостерігається різке підвищення рівня оцінок, в кластер Середнього рівня об'єднано 15 регіонів, що є найбільшою кількістю за всі п'ять років, і всього 7 регіонів в кластері Низького рівня.

Такий розподіл дає можливість проаналізувати середній рівень знань України в розрізі регіонів, що дозволить провести педагогічні заходи щодо підвищення ефективності технології здобуття знань математики в середніх школах, наприклад в регіонах, які найчастіше потрапляють в кластер Низького рівня. Цей аналіз показує не рейтинг конкретного регіону і його середніх загальноосвітніх навчальних закладів, а здатність учня самостійно опанувати навчальний матеріал поза межами свого закладу, що скоріш залежність не лише від організації роботи навчального закладу, а й від педагогічної майстерності вчителів і від активного застосування інформаційних технологій.

Список використаних джерел:

1. Мандель И.Д. Кластерный анализ / И.Д. Мандель. – М. : Финансы и статистика, 1988. – 176 с.

2. Бахрушин В.С. Методи аналізу даних : навчальний посібник для студентів / В.С. Бахрушин. – Запоріжжя : КПУ, 2011. – 268 с.
3. Офіційний сайт Українського центру оцінювання якості освіти. – Режим доступу: <http://testportal.gov.ua/>

В. І. Іваненко

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

СИСТЕМА РІШЕННЯ І НЕСТОХАСТИЧНА ВИПАДКОВІСТЬ

Поняття «Система Рішення» (СР) у теорії рішень вводиться аналогічно поняттю «система керування» у теорії керування [1]. Аналіз СР вимагає двох математичних моделей: моделі Ситуації, що вимагає Прийняття Рішень (СПР), і моделі того, хто має приймати рішення (ТПР). Аналіз моделей СПР ставить питання про існування невизначеності у СПР. Наводяться необхідні і достатні умови існування невизначеності у СПР [2; 3]. Основною складовою задачі рішення, яка виникає у СР, є підзадача упорядкування можливих рішень, тобто задача вибору ТПР-ом критерію оптимальності. Вперше фон Нейман і Моргенштерн навели модель ТПР у вигляді сукупності аксіом, які породжують один і тільки один критерій оптимальності. Власне розвиток цього підходу створює історію сучасної теорії рішень, що далі пов'язана з іменами Севіджа, Анскомба і Аумана, ДеГроота та інших (варто уваги те, що у колишньому СРСР і досі в Україні майже не було досліджень математичних моделей таких ТПР, які самостійно приймають рішення).

Аксиоматика, наведена у [1], зокрема принцип гарантованого результату для масових явищ, виявилась необхідними і достатніми умовами існування критерію оптимальності, який використовує суб'єктивний опис механізму генерації наслідків у вигляді деякої сім'ї скінченно-адитивних мір. Аналіз цього результату встановлює його зв'язок з «випадковими у широкому сенсі» (за А.М. Колмогоровим) явищами, до яких перш за все слід віднести т. з. нестохастичні масові явища, що, зокрема, спостерігаються у соціально-економічних системах. У [1] доведена теорема існування та єдиності т. з. статистичної закономірності усякого масового явища у вигляді сім'ї скінченно-адитивних мір. Власне саме це і пояснює той факт, що узагальнення принципу гарантованого результату на масові явища призвело до появи критерію оптимальності, що містить статистичну закономірність.

В основному тексті доповіді наведені точні формулювання усіх згаданих вище тверджень.

Список використаних джерел:

1. Ivanenko V.I. Decision Systems and Nonstochastic Randomness / V.I. Ivanenko. – New York : Springer, 2010. – 272 p.
2. Иваненко В.И. К моделированию стохастических ситуаций принятия решений / В.И. Иваненко, В.М. Михалевич // Системные исследования и информационные технологии. – 2010. – №1. – С. 78-80.

3. Іваненко В.И. К вопросу о неопределенности в задачах принятия решений / В.И. Иваненко, В.М. Михалевич // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – №2. – С. 116-119.

В. А. Іванюк, В. В. Понеділок

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РЯДІВ ВОЛЬТЕРРИ

Функціональні ряди Вольтерри досить давно використовуються в математичному моделюванні нелінійних динамічних систем. Як і будь-який універсальний апарат, апарат рядів Вольтерри, поряд з очевидними перевагами має і недоліки [1-3].

Основні проблеми при використанні рядів Вольтерри полягають у складності розв'язання оберненої задачі, тобто ідентифікації ядер Вольтерри, а також при чисельній реалізації прямої задачі, оскільки уточнення математичної моделі шляхом формування багатовимірних ядер високого порядку призводить до занадто складних моделей.

Метою дослідження є розробка алгоритмів чисельної реалізації інтегральних рядів Вольтерри та їх програмна реалізація на основі технологій паралельних обчислень.

Функціональний ряд Вольтерри можна подати наступним чином:

$$y(t) = F(t) = \sum_{m=1}^n f_m(t),$$

$$f_m = \int_0^t \dots \int_0^t K_m(s_1, \dots, s_m) \prod_{i=1}^m x(t - s_i) ds_i, t \in [0, T], \quad (1)$$

де $x(t)$, $y(t)$ – відповідно вхідний і вихідний сигнали об'єкта, n – деяке натуральне число, T – час перехідного процесу.

Застосувавши метод квадратур до (1) обраховуються n -вимірні оператори Вольтерри [2]:

$$y(t_i) = \sum_{j=1}^i A_j K_1(t_j) x(t_i - t_j) +$$

$$+ \sum_{j=1}^i \sum_{g=1}^i A_{jg} K_2(t_j, t_g) x(t_i - t_j) x(t_i - t_g) +$$

$$+ \sum_{j=1}^i \sum_{g=1}^i \sum_{l=1}^i A_{jgl} K_3(t_j, t_g, t_l) x(t_i - t_j) x(t_i - t_g) x(t_i - t_l) + \dots, \quad (2)$$

де A_j , A_{jg} , A_{jgl} – коефіцієнти, які визначають квадратурний метод.

На основі (2) реалізовано програмні засоби в середовищі Matlab із використанням паралельних засобів. Для ефективної роботи програмних засо-

бів важливе значення має апаратна частина обчислювальної частини, зокрема використання багатоядерних відеокарт з підтримкою технології CUDA.

Список використаних джерел:

1. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К. : Наукова думка, 1986. – 542 с.
2. Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. / А.В. Манжиров, А.Д. Полянин – М. : Изд-во «Факториал Пресс», 2000. – 384 с.
3. Пупков К.А. Функциональные ряды в теории нелинейных систем / К.А. Пупков, В.И. Капалин, А.С. Ющенко – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1976. – 448 с.

С. Д. Івасишен

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

ПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ ТА ПАРАБОЛІЧНІ МОДЕЛІ

Параболічні рівняння (ПР) вперше були одержані при вивченні засобами математики явищ поширення тепла та дифузії. Французький математик і фізик Ж. Фур'є, який вперше вивів рівняння теплопровідності, вважається основоположником теорії ПР. Ця теорія привертала та продовжує привертати увагу багатьох дослідників. Причиною цього є виключна практична важливість ПР і те, що їх дослідження пов'язано з розвитком найрізноманітніших розділів математики. Математичні моделі, які описуються задачами для ПР, природно називати параболічними моделями.

У доповіді коротко простежується розвиток теорії ПР. Особлива увага приділяється тим результатам цієї теорії, в одержанні яких брали участь автор і його учні. Аналізується також вплив на розвиток теорії ПР відомих класичних монографій С.Д. Ейдельмана, А. Фрідмана, О.О. Ладженської, Н.М. Уральцевої і В.О. Солонникова.

В. П. Іващенко, Г. Г. Швачич, М. А. Ткач

Национальная металлургическая академия Украины, г. Днепропетровск

О ПРОБЛЕМЕ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ КОНЦЕПЦИИ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ВЕКТОРОВ РЕШЕНИЙ

Численное решение типичной задачи вычислительной теплофизики, в особенности, трехмерной и нестационарной, порождает огромное количество численной информации [1-3]. В этой связи большое значение приобретает проблема систематизации и интерпретации этой информации в видимые и физически наблюдаемые характеристики. Построение графиков или изолиний при решении задач средствами вычислительной техники является широко распространенным способом вывода информации. Одна-

ко используемые для этого сервисные пакеты программ базируются на обработке массивов сеточных данных и, как правило, не используют при этом априорной информации о методах ее построения. Это можно объяснить разве только тем, что в практике использование методов конечно-разностной дискретизации сложилось устойчивое мнение о неопределенности изменения искомой функции в интервале между узловыми точками сеточной области. Однако, например, обычная процедура построения численно-аналитических схем на отрезках рядов Тейлора, показывает, что профиль сеточной функции между узлами конкретен и зависит от порядка аппроксимации исходного дифференциального уравнения [4].

Утверждение 1. Для одномерных начально-краевых задач параболического типа, после построения таблицы решений $\{Y_{p,1}\}$, $p = \overline{1, 2m-1}$, оказывается справедливым аппроксимация сеточных функций между узлами отрезком ряда Тейлора:

$$Y_{p+\varepsilon_x,1}(\varepsilon_x) = Y_{p,1} + \varepsilon_x Y_{p,2} + \varepsilon_x^2 Y_{p,3}, \quad (1)$$

где $\varepsilon_x \in [-1, 1]$, а тейлоровские компоненты $Y_{p,2}$ и $Y_{p,3}$ вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} Y_{p,3} &= \frac{1}{2} [Y_{p+1,1} + Y_{p-1,1} - 2Y_{p,1}] \\ Y_{p,2} &= \frac{1}{2} [Y_{p+1,1} + Y_{p-1,1}] \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Таким образом, для рассмотренного случая профиль изменения искомой функции вполне конкретен. Легко убедиться, что при $\varepsilon_x = \pm 1$ условия в узлах трехточечного шаблона в (1) выполняются тождественно.

Утверждение 2. Численно-аналитическая концепция визуализации векторов решений для двух и трехмерных задач технической теплофизики может базироваться на алгоритмах обработки таблиц информационного типа в базе сечений с одним пространственным измерением (1).

Для каждой сеточной линии трехмерного информационного массива $Y[i, J, r]$ могут быть сопоставлены аппроксимации типа (1), (2). Это означает, что, например, при $k = const$, плоскость сеточных функций может быть покрыта рисунками как вдоль сеточных узлов $i = \overline{1, 2m_x - 1}$ при $J = const$, так и вдоль сеточных узлов $J = \overline{1, 2m_y - 1}$ при $i = const$. При построении некоторых изолиний заданного уровня в поисках требуемого значения могут быть использованы также оба направления одновременно. При этом очевидно, полной информации просмотра области можно достичь и при условии, когда в качестве базовых берутся узлы, имеющие только нечетные номера.

Утверждение 3. Наибольший эффект при визуализации векторов решений достигается в тех случаях, когда можно назначить один процессор на один узел расчета.

Действительно, если базовые узлы имеют нечётные номера, то становится возможным провести расчёты по визуализации во всех узлах одновременно. Работа каждого процессора при этом заключается в вычислении по формулам типа (1), (2) значений функции между узлами за счет изменения аргумента в долях единицы на интервалах $\{-1,0,+1\}$ по координатным направлениям. Алгоритм обработки информационных таблиц базируется при этом на оперировании с функциями типа (1), (2), а в основе рассматриваемого параллельного вычислительного метода на него не накладывается ни каких других ограничений, кроме числа используемых процессоров [5, 6].

Заключение. Предложенный подход численно-аналитической концепции визуализации векторов решений позволяет, во-первых, сократить в два раза количество узлов, используемых для обработки информации, во-вторых, получить столь угодно необходимые данные для построения гладких графиков или изолиний на редких сетках. Максимальные же параллельные формы алгоритма представляют собой предмет особого интереса, так как определяют минимально возможное время реализации алгоритма визуализации на реальных параллельных вычислительных системах [7].

Список использованных источников:

1. Швачич Г.Г. Исследование температурного режима работы печей отжига шахтного типа бунтов проволоки / Г.Г. Швачич, А.В. Соболенко, М.А. Соболенко // Теория и практика металлургии. – 2003. – № 1. – С. 59-62.
2. Коздоба Л.А. Вычислительная теплофизика / Л.А. Коздоба. – К. : Наук. думка, 1992. – 224 с.
3. Швачич Г.Г. Особенности конструирования параллельных вычислительных алгоритмов для ПЭВМ в задачах тепло- и массообмена / Г.Г. Швачич, А.А. Шмукин // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2004. – № 3. – С. 42-47.
4. Шмукин А.А. О численно-аналитическом методе решения задач механики жидкости и газа / А.А. Шмукин // Прикладные вопросы аэродинамики летательных аппаратов. – К. : Наук. думка, 1984. – С. 87-97.
5. Воеводин В.В. Математические модели и методы в параллельных процессах / В.В. Воеводин. – М. : Наука, 1986. – 29 с.
6. Системы параллельной обработки / под ред. Д. Ивенса. – М. : Мир, 1985. – 416 с.
7. Башков С.О. Високопродуктивна багатопроцесорна система на базі персонального обчислювального кластера / С.О. Башков, В.П. Івашенко, Г.Г. Швачич // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія «Проблеми моделювання та автоматизації проектування». – Донецьк : ДонНТУ, 2011. – Вип. 9 (179). – С. 312-324.

М. С. Лящук, Є. Ф. Сопронюк

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ В СИСТЕМАХ ЗІ ЗМІННОЮ ВИМІРНІСТЮ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ

Нехай

$$\frac{dx^{(j)}(t)}{dt} = A_j(t)x^{(j)}(t) + B_j(t)\alpha, \quad t \in \tau_j, \quad (1)$$

за умов зміни вимірності фазового простору

$$x^{(j)}(t_{j-1}) = C_j x^{(j-1)}(t_{j-1}^-), \quad j = \overline{1, N}, \quad x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}, \quad (2)$$

на проміжку $[T_0, T_1]$ з розбиттям $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ ($\tau_j = [t_{j-1}, t_j]$, $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = \overline{1, N-1}$, $\tau_N = [t_{N-1}, t_N]$, $t \in [t_{N-1}, t_N]$) [1], де α – вектор параметрів розмірності r .

Розглянемо задачу: Знайти мінімум функціонала від кінцевого стану системи (1), (2) за параметрами α :

$$\min_{\alpha} \Phi(x^{(N)}(T_1)). \quad (3)$$

Знайдено формули:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_l} = & - \sum_{j=2}^N \bar{\psi}^{(j)T}(t_{j-1}) \left\{ d_l^{(j)} - \left[C_j (A_{j-1}(t_{j-1}) \bar{x}^{(j-1)}(t_{j-1}) + B_{j-1}(t_{j-1}) \bar{\alpha}) - \right. \right. \\ & \left. \left. - (A_j(t_{j-1}) \bar{x}^{(j)}(t_j) + B_j(t_{j-1}) \bar{\alpha}) + \frac{\partial (C_j \bar{x}^{(j-1)}(t_{j-1}))}{\partial t} \right] \times \right. \\ & \left. \times \frac{\left(\frac{\partial \bar{\phi}_j(\bar{x}^{(j-1)}(t_{j-1}^-), t_{j-1}, \bar{\alpha})}{\partial x^{(j-1)}} \right)}{z^{(j-1)}(t_{j-1})} \right\} - \sum_{j=l}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\partial H^{(j)}(\bar{x}^{(j)}(\tau), \bar{\psi}^{(j)}(\tau), \tau, \bar{\alpha}^{(j)})}{\partial \alpha_l} d\tau, \quad l = \overline{1, r}, \end{aligned}$$

де $\psi^{(j)}(t)$ – вектори спряжених змінних, $H^{(j)}(x^{(j)}, \psi, t, \alpha)$ – функції Гамільтона, $d_l^{(j)}$ – l -ий стовпець матриці D_j , $t \in \tau_j$, $j = \overline{1, N}$.

М. М. Каримов, М. М. Кадыров, С. М. Сагатов

Ташкентский государственный технический университет,
г. Ташкент, Узбекистан

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИАЛОГОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ «Тьютор – студент»

В педагогике контроль знаний проводится в начале и в конце периода обучения, а также в другие сроки, установленные регламентом образовательного процесса. Обучение с применением машинного тьютора позволяет оперативно контролировать знания, теоретически – в любой момент времени. Этот момент определяется не организационными, а когнитивными условиями. Одним из средств контроля состояния знаний является тестирование. Для компьютерного тестирования необходима электронная версия тестовых наборов, программные средства для ведения диалога «тьютор-студент», а также средства для поддержки и ведения тестовых наборов, т.е. базы данных тестов. Как правило, компьютерные средства автоматизированных систем обучения имеют развитый сервис для ввода и редактирования текстовой форме тестов.

Как известно из классической теории приема-передачи информации [1], процесс передачи связывает источник, канал передачи и приемник информации. Однако в случае, когда обмен сообщениями осуществляют субъекты, которые имеют знания, их поведение необходимо описать как на уровне физических сигналов, так и на знаковом уровне. Этот знаковый уровень касается языковой коммуникации, которая как раз и имеет место при обучении человека. Для описания информационных процессов восприятия человека используется конструкция, известная в когнитивной психологии как «перцептивный цикл Нейсера», описывающая информационные процессы восприятия человека.

Проблемы общения и взаимодействия присутствуют во всех перечисленных процедурах, имеющих отношение к процессам принятия решения и передачи информации в ходе обучения. Общение можно рассматривать как взаимодействие двух агентов, которые имеют интеллектуальные средства, такие, как память и способность делать умозаключение из знаний, которые хранятся в этой памяти. Если рассматривать общение с точки зрения одного агента, то другим агентом может быть среда, в которой действует этот агент. То есть когда другого агента нет, то умственная деятельность лица относительно поиска решения ситуационных задач (или просто планирование поведения), когда она не обращается к партнеру, можно интерпретировать как «общение с самим собой». Во всех случаях нужна модель общения, которая необходима для построения гибридных интеллектуальных (программных) систем, т.е. таких, которые их создают люди и средства ЭВМ.

В контексте общения партнеров, которые имеют интеллект, рассмотрим сначала, каким образом воспринимается человеком информация, которая поступает из внешней среды, в частности какие модели этого восприятия

предлагают специалисты из когнитивных процессов и как эти модели могут быть использованы в интеллектуальных компьютерных системах.

При разработке формальной модели диалогового процесса важным является адекватность модели психологии диалога, или ее адекватность теории процесса восприятия и переработки информации человеком. В том случае, когда в основу формальной модели диалога возложены удачные психологические модели, можно ожидать, что программные диалоговые агенты естественным образом унаследуют гибкость и универсальность системы восприятия и переработки информации человеком.

Среди множества моделей, предлагаемых когнитивной психологией, имеющие отношение к диалогу, следует остановиться на моделях, описывающих диалог на уровне инвариантного процесса синтеза сообщений, поскольку этот процесс зависит от характера задачи, решаемой в диалоге. Поэтому психология диалога, чтобы быть полезной в прикладном аспекте, должна обеспечивать симуляцию некой «машины общения» на уровне, инвариантной относительно предметной области.

Таким образом, нужно рассматривать информационное взаимодействие как деятельность двух интеллектуальных агентов, которые будут считаться «партнерами» диалога, цель которого является общей для обоих партнеров, и такая цель является попыткой получить информацию от одного партнера для ассимиляции этой информации в систему знаний другого.

Список использованной литературы:

1. Ус М.Ф. Теорія інформації: Конспект лекцій / М.Ф. Ус. – Черкаси : РВВ ЧУ, 2000. – 61 с.

В. М. Карпенко*,
В. М. Стасенко**,
М. С. Нікорюк***,
О. В. Карпенко ****

*ДП «Науканафтогаз» НАК «Нафтогаз України», м. Вишневе,

**НАК «Нафтогаз України», м. Київ,

***Донецький національний технічний університет, м. Донецьк,

****Інститут геофізики НАН України, м. Київ

МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ОСВОЄННЯ ПАЛИВНО-ЕНЕРГЕТИЧНИХ РЕСУРСІВ ФОНДОМ СВЕРДЛОВИН

Вступ. Процес освоєння паливно-енергетичних ресурсів (ОПЕР), що складаються з вуглеводневих (ВВ) і геотермальних (ГТР)ресурсів, є тривалим і складним науково-виробничим процесом. Процес ОПЕР є перспективним у напрямку заміни видобутку ресурсів ВВ на видобуток ГТР, як енергетично необмеженого, екологічно чистого, ергономічно безпечного, найбільш економічно ефективного власного ресурсу.

Процес ОПЕР має стійку технологічну структуру, що включає: парк бурових установок (БУ) – $N_{\text{бу}}$; накопичений фонд експлуатаційних сверд-

ловин (ФЕС) – N_c , щорічний новий фонд експлуатаційних (НФЕС) – N_{ce} і розвідувальних (НФРС) – N_{cp} свердловин; річний – $dW_0(t_0)/dt$ і накопичений видобуток паливно-енергетичних ресурсів (ПЕР) – $W_0(t)$ з фонду свердловин. Процес ОПЕР має наступні технологічні параметри: продуктивність роботи парку БУ – $\eta = N_c / N_{by}$, якість розкриття продуктивних горизонтів – β , успішність геологорозвідувальних робіт (ГРР) – α , середню продуктивність однієї свердловини – q (для ВВ – q_v , для ГТР – q_g), кінцевий видобуток ВВ – $W_{omv}(t \rightarrow \infty)$.

Проблема. Техніко-економічна оцінка обсягів та ефективності процесів освоєння ВВ і ГТР ставиться вперше і вимагає наукового обґрунтування.

Розв'язок проблеми. В роботі [1] наведені результати досліджень з оцінки видобутку ГТР з однієї свердловини – q_g , у енергетичному еквіваленті – МВт теплової енергії. За результатами даних досліджень встановлено, що на даний час $q_v \approx q_g$.

Модель процесу освоєння ВВ ресурсів має складну структуру, що складається з накопиченого ФЕС, щорічного буріння експлуатаційних і пошуково-розвідувальних свердловин. Сказане моделюється рівнянням виду

$$\begin{aligned} q_v C_{N_{c0}} + q_v \eta n_e \frac{dN_{by}}{dt} + \alpha q_v \eta (n_p + n_{p0}) \frac{d^2 N_{by}}{dt^2} = \\ = W_{0v}(t) + \eta \frac{dW_{0v}(t)}{dt} + \alpha \eta \frac{d^2 W_{0v}(t)}{dt^2} \end{aligned}$$

де q_v – середня продуктивність однієї свердловини; $\alpha = n_p / (n_p + n_{p0})$ – коефіцієнт успішності ГРР; n_e , n_p , n_{p0} – коефіцієнти кількості НФЕС, НФРС і непродуктивних розвідувальних свердловин; $\eta = (n_e + n_p) / (n_e + n_p + n_{p0})$ – коефіцієнт продуктивності БУ; $W_{0v}(t)$ – накопичений видобуток з ФЕС;

$$\begin{aligned} \eta \frac{dW_{0v}(t)}{dt} = \eta q_v n_e \frac{dN_{by}(t)}{dt} \approx \eta q_v n_e \frac{\Delta N}{\Delta t} - \text{видобуток з НФЕС;} \\ \alpha \eta \frac{d^2 W_{0v}(t)}{dt^2} = \alpha \eta q_v (n_p + n_p) \frac{d^2 N_{by}(t)}{dt^2} \approx \alpha \eta q_v (n_p + n_p) \frac{\Delta^2 N}{\Delta t^2} - \\ \text{видобуток з НФРС.} \end{aligned}$$

Висновки. 1. Розроблена математична модель процесу освоєння ПЕР, що включає ВВ і ГТР на основі фонду свердловин.

2. Дослідження моделі (1) освоєння ВВ показали, що модель враховує наступні технічні, технологічні і природні параметри: парку БУ, продуктивності парку БУ, продуктивності свердловини, ефективності розкриття продуктивних горизонтів, успішності ГРР, динаміки видобутку на

протязі року, динаміки накопиченого видобутку з нового фонду продуктивних свердловин за всі роки експлуатації свердловин, динаміки накопиченого видобутку з загального фонду продуктивних свердловин за всі роки експлуатації свердловин, падіння видобутку.

3. Аналіз промислової ефективності освоєння ПЕР показав, що процес освоєння ГТР є у двічі більш економічним з точки зору витрат на генерацію теплової енергії, повністю екологічно безпечним, оскільки не використовує палива, стабільним, а ресурси у 100 000 разів більшими ніж усі паливно-енергетичні ресурси України разом взяті.

Список використаних джерел:

1. Карпенко В.М. Геотермальні ресурси України / В.М. Карпенко, В.М. Стасенко, О.В. Карпенко // Геоінформатика. – 2013. – №2 (46). – С. 1-18.

А. В. Кінаш*,
Я. М. Чабанюк**,
У. Т. Хімка*,

*Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

**Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів

УМОВА ДИСИПАТИВНОСТІ ДЛЯ ГРАНИЧНОГО ДИФУЗІЙНОГО ПРОЦЕСУ

Розглядається стохастичний процес з дифузійним збуренням[1], що визначається стохастичним диференціальним рівнянням:

$$du^\varepsilon(t) = C(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^2))dt + \varepsilon^{-1}C_0(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^2))dt + \sigma(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^2))d\omega(t), \quad (1)$$

де $u(t)$ – випадкова еволюція, $t \geq 0$; $C_0(u; x)$ – сингулярне збурення функції регресії $C(u; x)$; $x(t)$ – марковський процес в просторі X з стаціонарним розподілом $\pi(B)$, $B \in \mathbf{X}$, генератором \mathbf{Q} та потенціалом до нього \mathbf{R}_0 ; $\omega(t)$ – вінерівський процес; $\sigma(u; x)$ – дифузія [1].

Усереднена функція регресії визначається зі співвідношення:

$$C(u) = \int_x \pi(d \mathfrak{X}) C(u; x).$$

Виконується умова балансу:

$$\text{PC}_0(x) \equiv 0.$$

Теорема. Нехай існує функція Ляпунова $V(u) \in C^1(\mathbf{R}^d)$, така що виконується умова[2]:

$$a(u)V'(u) < -c_1V(u),$$

де $a(u) = \int_x C_0(u; x)\mathbf{R}_0 C'_0(u; x)\pi(d \mathfrak{X}) + \int_x C(u; x)\pi(d \mathfrak{X})$

Виконується умова:

$$\sup_{K^d} \|\sigma(u)\| < c_2.$$

Гранична дифузія $\sigma(u)$ визначається зі співвідношення $\sigma(u)\sigma^*(u) = B(u)$, де $B(u)$ має вигляд:

$$B(u) = 2 \int_x C_0(u; x) \mathbf{R}_0 C_0(u; x) \pi(d \mathfrak{X}) + \int_x \sigma^2(u; x) \pi(d \mathfrak{X}).$$

Тоді система (1) асимптотично дисипативна [2].

Список використаних джерел:

1. Королук В.С. Стохастичні моделі систем : навч. посібник/ В.С. Королук. – К. : Либідь, 1993. – 136 с.
2. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р.З. Хасминский. – М. : Наука, 1969. – 368 с.

V. G. Kitushin*,

F. L. Bik**,

P. G. Ali Zada***

*Novosibirsk technical university, Russia,

**Novosibirsk technical university, Russia,

***OKAN University, Istanbul, Turkey

IMPROVEMENT OF THE RELIABLE POWER SYSTEMS POST CRISIS-CHAOS DEVELOPMENT DESIGNING (APPROACH AND METHODS)

The existing situation in Russia and in the former USSR and former Eastern Socialist republics power electrical systems (PES) allows to confirm: warranty of the firm development – none, reliable execution function – none, consolidation effort on decision of these problems – none.

Their energy strategy to 2030 is already collapsed. Forecasted the growing of the load in 2008-2009 yeas was broke by the incomprehensibly whence financial crisis, fell all general schemes of the PES development, moldered all, the countries ware left approximately on the consumption of 1990.

They have no any generalized theories. But there are some fragments, which get here. Know-how of the work is concluded in that, you suppose to use here the elements of the system realized management, too.

Just it goes the complex process of production and distribution its energy according general conception which answer new realities. To their count-calculate list pertain the conceptions:

- designing and programming (planning);
- development and management development;
- power system reliability and accuracy and other conceptions group, in accordance with these main.

The great number the conception's specialists of the different fields are concerned with this problem as theoretically, so practically. However, to fill

these notions by contents and to reveal them in sufficient volume for practical use always remains actual. But here, it is important to note – it was created during the former USSR disintegrations some determined methodical breakup between the technical system approach and the former USSR power systems monumental governing approach.

Both approaches are intended the presentation of power electrical system (PES), as an object of management, – *operationally open system*, – where there are unambiguous relationship of «input/output» and the PES management problem is reduced just to its modeling and study.

The first turned out problem to be insolvent is the PES management in condition of the market relations, because it is intended for achievement «*integer*» in «*determined the known*» external environments. The second – became «*lead*» in condition, where due to the reliability of the external ambience change is disappeared, i.e. what has noted by P.Druker – «*has approached the era of the absence of the regularities*». The attempt to «*suture*» this breakup is undertaken with one or another degree of the success, insofar manages to select «*operated organization*».

The report addresses the following questions: proposed methodological approach (the power electrical system (PES) as a social-technical system; the PES reliability; the PES as a potentially self-organizing system; the Conceptual model of the development PES; the PES development mechanisms and its management), designing of the reliable power systems (the PES designing and programming (planning); the mechanisms of the country energy development; the structure and work on the PES development; the PES «Developments» forecast).

К. Г. Коваленко, В. І. Сівецький, О. Л. Сокольський

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ФОРМУВАННЯ ПОГОНАЖНИХ ВИРОБІВ МЕТОДОМ ВІЛЬНОЇ ЕКСТРУЗІЇ

Більшість розплавів полімерних матеріалів відносяться до в'язкопружних рідин, процес течії та деформування яких супроводжується проявом пружних ефектів. В даний час необхідність врахування вискоеластичних властивостей при розрахунку розмірів формуючих каналів розплаву не піддається сумніву. Дослідження в цьому напрямку тривають, в тому числі із застосуванням числових методів розрахунку.

Актуальним є розробка і застосування методик комп'ютерного моделювання при проектуванні екструзійних головок, що дозволить досягти максимальної продуктивності при найвищому рівні стабільності конфігурації виробів [1, 2].

Метою даної роботи є моделювання процесу течії розплаву полімеру в каналах формуючих інструментів промислових екструдерів та в

зоні утворення вільної поверхні екструдату і дослідження взаємозв'язку в'язкопружних властивостей полімеру, геометричних параметрів формуючих каналів та полімерних погонажних виробів з виходом на розробку методики профілювання формуючих інструментів.

Складність проблеми полягає у необхідності врахування при математичному моделюванні течії розплаву полімеру на виході з формуючого інструменту з врахуванням здатності полімеру запасати пружну енергію деформації. Аналіз всіх плюсів і недоліків в'язкопружних реологічних моделей, порівняння їх розповсюдженості та точності описання ефектів розбухання екструдату була обрана модель Фан-Гьєн-Таннера (ФТТ), так як її матеріальні реологічні константи можуть бути визначені експериментальним шляхом для бажаного полімерного матеріалу [3, 4].

Для в'язкопружної моделі ФТТ загальний тензор напружень розкладається у в'язкопружну компоненту τ_1 і чисто в'язку компоненту τ_2 обчислюється як:

$$\exp\left[\frac{\varepsilon\lambda}{\eta_1}\tau_1\right]\tau_1 + \lambda\left[\left(1 - \frac{\xi}{2}\right)\tau_1^{\nabla} + \frac{\xi}{2}\tau_1^{\Delta}\right] = 2\eta_1 D \quad (1)$$

де λ – час релаксації; η_1 – коефіцієнт в'язкості для в'язкопружної компонент тензора напруження; ξ і ε – матеріальні константи (зсувна в'язкість і поведінка подовження); τ_1^{∇} , τ_1^{Δ} – відповідно верхня і нижня конвективні похідні по часу в'язкопружного напруження; D – швидкість зміни тензора деформації.

Було розроблено алгоритм для чисельного моделювання течії в'язкопружної рідини у вихідній області формуючої насадки екструдера. Алгоритм включає в себе визначення параметрів екструдату в зоні вільної поверхні на виході з фільтри з урахуванням в'язкопружної поведінки полімерів за певних граничних умов.

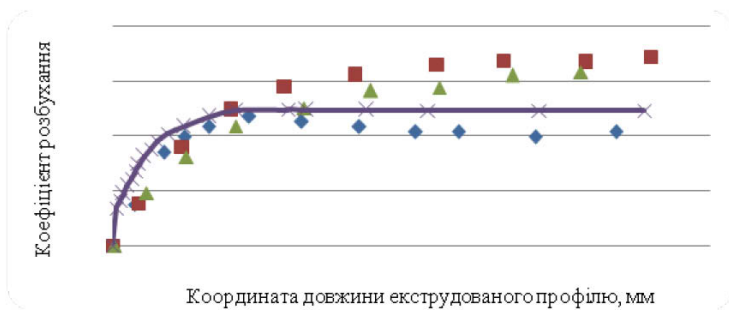
Експериментальне визначення реологічної константи моделі ФТТ здійснене шляхом дослідження розбухання полімерного матеріалу при екструзії зразків на фільтрі діаметром 8 мм довжиною 40 мм.

Для визначення часу релаксації розплаву для реологічної моделі ФТТ, визначалась масова та об'ємна продуктивності Q і лінійна швидкість формування U та довжина ділянки розбухання екструдованого профілю l_{λ} . На базі вказаних параметрів час релаксації визначався як:

$$\lambda = \frac{l_{\lambda}}{U} \quad (2)$$

Параметр подовження розплаву ε під час проведення числових експериментів змінювався до досягнення найбільшої збіжності розрахункової форми екструдату з експериментальною. Отриманий таким чином параметр подовження приймався в якості вихідного.

Результати числового моделювання розбухання екструдату і натурних експериментів при різних швидкостях потоку на виході з формуючого інструменту представлені на рис. 1.



Координата довжини екструдованого профілю, мм
 експериментальні дані при: ■ – $Q=0,23$ см³/сек,
 ▲ – $Q=0,56$ см³/сек, ◆ $Q=1,29$ см³/сек;

× – результат числового моделювання за усереднених значень λ , ϵ

Рис. 1. Залежність коефіцієнту розбухання екструдату круглого поперечного перетину (ПВХ) на виході з формуючого інструменту

На рис. 1 суцільною лінією зображений результат числового моделювання ефекту розбухання екструдату з експериментально встановленого часу релаксації λ та визначеного числовим моделюванням матеріального параметру подовження розплаву ϵ . З рисунку видно, що результати числового моделювання за визначених реологічних параметрів описують розбухання екструдату на виході з формуючого інструменту з точністю до 8%, що дає можливість використовувати розроблений алгоритм для подальшого моделювання течії полімерів при формуванні різних типів погонажних профілів з використанням реологічної моделі ФТТ.

В ході числових та натуральних експериментів встановлена кореляція між ними, що підтверджує адекватність розробленої аналітичної моделі та створеної програми скінченоелементної моделі. Матеріальні параметри, отримані на основі експериментальних даних можуть бути використані для подальшого моделювання процесів формування різного типу погонажних виробів.

Перевірка достовірності розробленої методики оцінки ефекту розбухання полімерних матеріалів була проведена в умовах діючого виробництва в режимі вільної екструзії, тобто без тягнучого пристрою.

Результати проведених чисельних досліджень процесу зміни конфігурації екструдованого струменя розплавів полімерів на виході з формуючого інструменту екструдера є основою для уточненого моделювання процесів вільної екструзії та проектування нових екструзійних головок. Результати також можуть бути застосовані для обґрунтування доцільних режимів процесу екструзії з метою поліпшення якісних характеристик погонажних виробів.

Список використаних джерел:

1. Ахназарова С.Л. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии / С.Л. Ахназарова, В.В. Кафаров. – 2-е изд. доп. перераб. – М. : Высш.шк., 1985. – 327 с.

2. Guillet Seriai M. Quantitative evaluation of extrudate swell from viscoelastic properties of polystyrene / Guillet M.Seriai // *Rheol. Acta* . – 1991. – №30. – P. 540-548.
3. Kostic M.M. Design of Extrusion Dies / M.M. Kostic, L.G. Reifschneider // *Encyclopedia of Chemical Processing*. – 2006. – P. 633-649.
4. Коваленко К.Г. Дослідження ефекту розбухання при екструзійному формуванні полімерних розплавів / К.Г. Коваленко, О.Л. Сокольський, М.А. Романченко // *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»* – 2013. – № 26. – С. 84-88 с.

О. Є. Коваленко

Інститут проблем математичних машин і систем НАН України, м. Київ

ІНТЕГРАЦІЯ ЗНАНЬ В АГЕНТНО-ОРІЄНТОВАНІ СИСТЕМИ ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Гнучкість сучасних систем підтримки прийняття рішень (СППР) забезпечується шляхом застосування сучасних інформаційних технологій – сервіс-орієнтованих, агентно-орієнтованих, хмарних. Застосування агентно-орієнтованого підходу до побудови СППР дозволяє «інтелектуалізувати» процес прийняття рішень на основі використання формальних моделей знань. При цьому необхідно вирішити такі задачі, як формалізація та структурування процедур прийняття рішень, представлення їх у вигляді набору сервісів різних рівнів, створення агентно-орієнтованого середовища для підтримки визначених сервісів, створення моделей та метамodelей знань для проблемних областей, забезпечення механізмів та засобів використання знань у агентному середовищі. Стандарти FIPA, що стосуються організації агентних середовищ базуються на моделі деліберативних BDI-агентів. При цьому очікування агента описуються його базою знань, бажання визначають цілі, а наміри визначають вмотивовані дії. Уніфікація моделі знань агентно-орієнтованого середовища здійснюється на основі спільної метамodelі знань для конкретної предметної сфери (семантичного домену). Базова метамodelь знань для сервісів СППР та механізми інтеграції знань в агентне середовище реалізуються на основі OWL-DL. Адекватне і компактне представлення знань в агентах забезпечується за рахунок декомпозиції загального семантичного домена на множину під доменів, пов'язаних з вузловими концептами глосарію предметної сфери. Структурні елементи моделі середовища СППР представляються як ієрархія процедур прийняття рішень та процесів, що реалізуються в рамках цих процедур. При цьому кожному типу процесу ставиться у відповідність окремий концепт, властивості якого визначають роль, а конкретизація визначає специфіку реалізації процесу в заданих умовах і обмеженнях. Реалізація запропонованих підходів може бути здійснена в середовищі JADE з урахуванням особливостей представлення знань у заданому семантичному домені. Агентно-орієнтовані СППР органічно інтегруються в архітектуру засобів ситуаційного управління – ситуаційних центрів.

І. Б. Ковальська

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПРО НАБЛИЖЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИМИ СУМАМИ ЗІГМУНДА $\bar{\psi}$ – ІНТЕГРАЛІВ В МЕТРИЦІ L_p .

Нехай $f(x)$ сумовна, 2π – періодична функція і

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f, x)$$

її ряд Фур'є, де

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt.$$

Нехай $L(0, 2\pi)$ – множина сумовних на $(0, 2\pi)$ 2π – періодичних функцій.

$L_p, 1 \leq p < \infty$, – простір 2π – періодичних сумовних на $(0, 2\pi)$ в

p – му степені функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_{L_p} = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$.

Надалі будемо вважати, що $\|f\|_{L_p} = \|f\|_p$.

Нехай η – деякий клас сумовних 2π – періодичних функцій. Тоді, якщо $f \in L_p^{\psi}$, і крім того, $f_p^{\psi} \in \eta$, то будемо говорити, що функція $f(x)$ належить до класу $L_p^{\psi}\eta$.

Розглянемо величини відхилень узагальнених сум Зігмунда

$$U_n^{\varphi, \sigma}(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\varphi(k)}{\varphi(n)} \sigma\left(\frac{k}{n}\right) \right) A_k(f, x)$$

порядку $n-1$ від функцій із класів $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{A}$, коли \mathfrak{A} – деяка підмножина в просторі L_p :

$$\mathfrak{A} = S_p = \left\{ h : \|h\|_p \leq 1 \right\}$$

і верхні грані цих відхилень на класах $L^{\bar{\psi}}\mathfrak{A}$:

$$\mathcal{E}_n(L^{\bar{\psi}}\mathfrak{A})_s = \sup_{f \in L^{\bar{\psi}}\mathfrak{A}} \left\| \delta_n(f; x) \right\|_s = \sup_{f \in L^{\bar{\psi}}\mathfrak{A}} \left\| f(x) - U_n^{\varphi, \sigma}(f, x) \right\|_s.$$

При цьому покладемо $L^{\bar{\psi}}S_p = L_p^{\bar{\psi}}(1 < p < \infty)$. Отримаємо точні порядкові оцінки верхніх граней відхилень $\delta_n(f; x)$ у випадку, коли $f(\cdot)$ – $\bar{\psi}$ – інтеграл деякої функції $g \in L$ і тому

$$S\left[\delta_n(f; x; U_n^{\varphi, \sigma})\right] = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varphi(k)}{\varphi(n)} \sigma\left(\frac{k}{n}\right) (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) + \sum_{k=n}^{\infty} a_k(f) \cos kx + b_k \sin kx.$$

Означимо функції μ_k і $\tilde{\mu}_k$ наступним чином:

$$\mu_k = \begin{cases} \frac{\varphi(k)}{\varphi(n)} \frac{\psi_1(k)}{\bar{\psi}^2(k)} \sigma\left(\frac{k}{n}\right), 0 \leq k < n, \\ \frac{\psi_1(k)}{\bar{\psi}^2(k)}, k \geq n \end{cases}$$

$$\tilde{\mu}_k = \begin{cases} \frac{\varphi(k)}{\varphi(n)} \frac{\psi_2(k)}{\bar{\psi}^2(k)} \sigma\left(\frac{k}{n}\right), 0 \leq k < n, \\ \frac{\psi_2(k)}{\bar{\psi}^2(k)}, k \geq n \end{cases} \quad (1)$$

Через p позначимо множину пар (ψ_1, ψ_2) , для яких справедливі співвідношення:

$$1) \sup_k |\mu_k| \leq Av(n); \quad (2)$$

$$2) \sup_{m \in N} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\mu_{k+1} - \mu_k| \leq Av(n); \quad (3)$$

де

$$v(n) = \max \left\{ \sup \left| \frac{1}{\varphi(n)} \right| \left| \varphi(k) \frac{\psi_1(k)}{\bar{\psi}^2(k)} \sigma\left(\frac{k}{n}\right) \right|; \right. \\ \left. \sup \left| \frac{1}{\varphi(n)} \right| \left| \varphi(k) \frac{\psi_2(k)}{\bar{\psi}^2(k)} \sigma\left(\frac{k}{n}\right) \right|; \sup |\bar{\psi}(k)| \right\} < \infty, A = const.$$

Ці співвідношення повинні виконуватися і для $\tilde{\mu}_k$.

В прийнятих позначеннях справедливе наступне твердження:

Теорема 1. Нехай $1 < s \leq p < \infty, (\psi_1, \psi_2) \in p$. Тоді знайдуться сталі

$C_{p,s}^{(1)}$ і $C_{p,s}^{(2)}$ для яких при всіх $n \in N$ виконуються нерівності

$$C_{p,s}^{(2)} v(n) \leq \mathcal{E}_n(L_p^{\bar{\psi}}) \leq C_{p,s}^{(1)} v(n)$$

при цьому $C_{p,s}^{(1)}$ і $C_{p,s}^{(2)}$ – сталі, залежні тільки від p і s .

Список використаних джерел:

1. Степанець А.И., Кушпель А.К. Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций / А.И. Степанець, А.К. Кушпель. – К. : Институт математики АН УССР, 1984. – 44 с. – (Препринт 84.15)

2. Marcinkevicz J. Sur les multiplicateurs des series de Fourier / J. Marcinkevicz // *Studia Math.* – 1939. – S. 78-91.
3. Бари Н.К. Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. – М. : Физмат ГИЗ, 1961. – 936 с.

О. Є. Колосов, В. І. Сівецький, В. С. Кривошесєв, О. П. Колосова

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО ТА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-СТАТИСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ОДЕРЖАННЯ ПОЛІМЕРНИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Вступ. Сучасний етап розвитку хімічної, машинобудівної, будівельної, та ряду інших галузей промисловості характеризується існуванням на ринку величезної кількості полімерних композиційних матеріалів (ПКМ), які розрізняються між собою не тільки складами і фізико-механічними властивостями, але й технологією одержання. Розвиток технологічних процесів переробки різних ПКМ, численні сфери застосування таких матеріалів вимагають ясного розуміння закономірностей процесів формування кінцевого продукту з детермінованими фізико-механічними та структурними характеристиками.

Слід відзначити, що виготовлення виробів з ПКМ – порівняно складний технологічний процес, що базується на використанні певних фізико-хімічних закономірностей. Адже в залежності від умов формування ПКМ змінюються його фізико-механічні властивості. Тому вибір і обґрунтування режимних параметрів формування, а також параметрів формуючого обладнання, мають принципове значення.

Одна з важливих складових розв'язання цієї проблеми – оптимізація режимних параметрів технологічних процесів та конструктивно-технологічних параметрів реалізуючого обладнання для формування, переробки, а також створення ПКМ з певним, заздалегідь заданим комплексом властивостей. Не менш важливим є здійснення направленої фізико-хімічної модифікації існуючих ПКМ з метою покращання їх експлуатаційних властивостей.

Таким чином, для обґрунтованого проектування параметрів технологічних процесів виготовлення виробів і конструкцій з ПКМ доцільним є широке використання методів моделювання (як математичного, так і експериментально-статистичного) цих процесів [3]. Крім того, застосування математичних методів планування експерименту для оптимізації режимних параметрів базових процесів одержання ПКМ дозволяє істотно скоротити спектр і кількість необхідних експериментів, а також суттєво зменшити фінансові і часові витрати на їх проведення.

У свою чергу, знайдені оптимальні технологічні параметри УЗ-обробки, а саме частота, амплітуда, інтенсивність, час, температура, тиск,

можуть використовуватись для детермінації конструктивно-технологічних параметрів реалізуючого УЗ-технологічного обладнання (ванн для об'ємного озвучування, просочувального, дозувального і активаційного обладнання).

Вирішення вищезазначених проблемних ситуацій в базових технологіях одержання ПКМ, у тому числі армованих волокнистими наповнювачами, дозволяє направлено вибирати режимні параметри нових енергоощадних технологій їх одержання та прогнозувати властивості одержуваних матеріалів на основі створених адекватних експериментально-статистичних моделей [4].

Постановка задачі. Метою досліджень є аналіз ефективності використання методів математичного та експериментально-статистичного моделювання для оптимізації технологічних параметрів ультразвукового одержання реактопластичних полімерних композиційних матеріалів на основі епоксидних олігомерів.

Використовувані матеріали, експериментально-статистична обробка результатів вимірювань та методика оптимізації технологічних і режимних параметрів формування.

Як полімерну реактопластичну матрицю у складі ПКМ використовували епоксидну композицію (ЕК) у складі епоксидного олігомеру (ЕО) марки ЕД-20, що затверджували аміним твердником – діетилентріаміном ДЕТА. Вимірювали крайовий кут змочування Θ , змочувальну здатність $\cos\Theta$, динамічну вязкість η ЕО, а також температуру склування T_c затверділого полімеру на основі ЕД-20. Рідкою композицією на базі ЕД-20 просочували джгут на основі скловолокна і органоволокна, в результаті чого будували кінетичні криві просочування (залежність висоти підйому h ЕО по волокну у залежності від часу просочення).

УЗ-дію (або УЗ-коливання – УЗК) здійснювали при частоті $f = 17\text{--}44$ кГц, амплітуді $A = 20\text{--}100$ мкм, інтенсивності $I = 5\text{--}15$ Вт/см² і температурі $T = 50\text{--}70$ °С протягом часу $\tau = 25\text{--}35$ хв.

Обробку результатів вимірювань та оптимізацію технологічних і режимних параметрів формування ПКМ здійснювали з використанням D-оптимального плану реалізації експерименту. Синтез D-оптимального плану та статистичну обробку отриманих експериментальних даних проводили за допомогою програмного продукту STAT-SENS [5], який побудований на базі узагальненого критерію оптимізації Харінгтона і так званої функції бажаності D .

Результати оптимізації технологічних характеристик епоксидних олігомерів і зв'язуючих на їх основі, що були піддані ультразвуковій обробці.

Для визначення впливу параметрів УЗ-обробки на технологічні властивості ЕО марки ЕД-20 і експлуатаційні властивості затверділих ЕК на його основі були проведені експериментальні дослідження згідно з синтезованим D-оптимальним планом експерименту для кожної залежної змінної [5].

У зв'язку з великою кількістю факторів для полегшення розрахунків була вибрана структура моделі 1-го порядку для кожної змінної, яка має такий вигляд:

$$Y_{\mathcal{K}} = c_0 + c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + c_3 \cdot X_3 + c_4 \cdot X_4 + c_5 \cdot X_5, \quad (1)$$

де X_i – вхідні параметри (фактори), що означають відповідно: $f_{УЗ}$ – частота УЗК, кГц (X_1); A – амплітуда УЗК, мкм (X_2); I – інтенсивність УЗК, Вт/см² (X_3); T – температура УЗ-обробки, °С (X_4); τ – час УЗ-обробки, хв (X_5); Y_i – вихідні параметри, що уособлюють такі технологічні і експлуатаційні властивості: η – динамічна в'язкість, Па·с (Y_1); Θ_{\min} – мінімальне значення крайового кута змочування ЕО по матеріалу наповнювача (скляної підложки), ° (Y_2); h_{\max} – максимальна висота підйому ЕО по скловолокнистому наповнювачу, мм (Y_3); T_c – температура склування затверділого полімеру, °С (Y_4); $c_0, c_1, c_2, \dots, c_5$ – константи рівняння (1), що підлягають визначенню.

Було встановлено, що точка оптимуму, отримана для функції бажаності $d(D) = 0,99997$ при кількості обчислень її значень, що становить 21120, досягається за таких значень вхідних факторів: $X = 16$ (кГц); $X_2 = 10$ (мкм); $X_3 = 4$ (Вт/см²); $X_4 = 80$ (°С); $X_5 = 35$ (хв).

Значення вихідних функцій технологічних (Y_1 – Y_3) показників ЕО і ЕК та експлуатаційних (Y_4) показників ЕП на їх основі у знайденої точці оптимуму становить: $Y_1 = 0,8427$ (Па·с); $Y_2 = 19,25$ (°); $Y_3 = 3,024$ (мм); $Y_4 = 121,24$ (°С).

Висновки.

1. На основі використання математичних методів планування експериментів отримано адекватні статистичні моделі, які описують вихідні змінні у залежності від вхідних змінних, що отримані при розв'язанні задач прогнозування технологічних і експлуатаційних властивостей ПКМ на базі ЕО, одержаних в процесі УЗ-модифікації.
2. Отримані математичні залежності дозволяють прогнозувати технологічні параметри процесів приготування просочувальних композицій і просочування, тобто оптимізувати відповідні технологічні режими формування ПКМ.

Список використаних джерел:

1. Цыплаков О.Г. Научные основы технологии композиционно-волоконистых материалов. Часть 1 / О.Г. Цыплаков. – Пермь : Пермское книжное узд-во, 1974. – 317 с.
2. Полимерные композиционные материалы. Структура. Свойства. Технологии: [учебное пособие] / М.Л. Кербер, В.М. Виноградов, Г.С. Головкин и др. ; под ред. А.А. Берлина. – СПб. : Профессия, 2008. – 560 с.
3. Воронков А.Г. Эпоксидные полимеррастворы для ремонта и защиты строительных изделий и конструкций : учебное пособие / А.Г. Воронков, В.П. Ярцев. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2006. – 92 с.
4. Математичне моделювання базових процесів виготовлення полімерних композиційних матеріалів із застосуванням ультразвукової модифікації / О.С. Колосов, В.І. Сівецький, Є.М. Панов та ін. – К. : ВД «Едельвейс», 2012. – 268 с.
5. Статюха Г.О. Розробка комп'ютерної системи підготовки та обробки даних у межах застосування експериментально-статистичної методології для хіміко-технологічних систем / Г.О. Статюха, А.Г. Петрань. // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2000. – №1. – С. 100-106.

I. М. Конет

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ГІПЕРБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ШАРАХ

Розглядається задача побудови обмеженого на множині

$$D = \left\{ (t, r, \varphi, z); t > 0; (r, \varphi) \in \Omega_2 = \langle a; b \rangle \times [0; 2\pi]; z \in K_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \right. \\ \left. \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (I_{j-1}; I_j), I_0 \geq 0; I_k < I_{k+1}; I_{n+1} \equiv l < +\infty \right\}$$

2π – періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку диференціальних рівнянь гіперболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{j2}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + a_{j1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z), \\ z \in I_j; j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$u_j \Big|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z); \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z); z \in I_j; j = \overline{1, m+1},$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{z=l_0} = g_0(t, r, \varphi); \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1} \Big|_{z=l} = g_l(t, r, \varphi),$$

умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0; j = 1, 2; k = \overline{1, n}$$

та відповідними крайовими умовами на межі проміжку $\langle a; b \rangle$,

де a_{ij} , a_{j2} , χ_j , α_{js}^k , β_{js}^k – деякі невід'ємні сталі;

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; c_{1k} c_{2k} > 0; |\alpha_{11}^0| + |\beta_{11}^0| \neq 0; |\alpha_{22}^{n+1}| + |\beta_{22}^{n+1}| \neq 0;$$

$$f(t, r, \varphi, z) = \{ f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z) \};$$

$$g^1(r, \varphi, z) = \{ g_1^1(r, \varphi, z), g_2^1(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^1(r, \varphi, z) \};$$

$$g^2(r, \varphi, z) = \{ g_1^2(r, \varphi, z), g_2^2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^2(r, \varphi, z) \};$$

$g_0(t, r, \varphi)$, $g_l(t, r, \varphi)$ – задані обмежені неперервні функції;

$u(t, r, \varphi, z) = \{ u_1(t, r, \varphi, z), u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z) \}$ – шукана функція.

Розв'язок розглянутої задачі побудовано в залежності від структури проміжку $\langle a; b \rangle$ у двох випадках:

1. $\langle a; b \rangle = (0; +\infty)$;
2. $\langle a; b \rangle \equiv (R_0; +\infty), R_0 > 0$.

Точні аналітичні розв'язки розглянутих задач побудовано у замкнутій формі методом інтегральних та гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна). Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики неоднорідних середовищ (задачі акустики, гідродинаміки, теорії коливань механічних систем).

В. Коновал, В. Мороз

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

РЕАЛІЗАЦІЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО МЕТОДУ ДЛЯ АНАЛІЗУ СТІЙКОСТІ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНИХ СИСТЕМ

Моделювання перехідних процесів у складних електроенергетичних системах, які описують тисячами диференціальних рівнянь, є достатньо проблемною задачею навіть для сучасного рівня обчислювальної техніки і методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь. Проблема полягає в тому, що у випадку застосування числових методів на поведінку досліджуваної системи накладається ще й поведінка використаного числового методу. Внаслідок дискретизації числовими інтеграторами неперервної моделі динамічної системи в отриманій цифровій моделі з'являються додаткові нулі та полюси результуючої дискретної передатної функції. У результаті складність цифрової моделі електроенергетичної системи зростає у кілька разів порівняно з математичною моделлю, що узгоджується з гіпотезою фон Ноймана, за якою найпростішим описом об'єкта, що досяг певного порогу складності, є власне сам об'єкт, а будь-яка спроба строгого формального опису цифрової моделі призводить до ускладнення.

Іншою проблемою є реалізація обчислень перехідних процесів в електроенергетичних системах у реальному часі або й у десятки, сотні разів швидше для оперативного керування системами.

Традиційний у моделюванні електроенергетичних систем підхід до розв'язування звичайних диференціальних рівнянь з використанням відомих числових методів зустрічається з проблемами зростання часу розрахунку і накопичення похибок, що спостерігається у випадку складних електроенергетичних систем. Як вихід на основі інтегральних перетворень, а саме – методу відображення нулів і полюсів, запропоновано ефективні рекурентні формули для розв'язування задач стійкості електроенергетичних систем.

Ефективність пропонуваного способу порівняно з традиційними числовими методами показано на прикладах елементарних динамічних ланок з дійсним полюсом і парою комплексно-спряжених полюсів.

М. М. Коpecь

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

СИСТЕМА ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ РІККАТІ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Розглядається задача мінімізації функціонала

$$I(u, z) = \frac{1}{2} \int_0^l z^2(t_1, x) dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{\partial z(t_1, x)}{\partial t} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^l [z^2(t, x) + u^2(t, x)] dx dt \quad (1)$$

на розв'язках крайової задачі

$$\frac{\partial^2 z(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial z(t, x)}{\partial x} + u(t, x), \quad (2)$$

$$z(t_0, x) = f(x), \quad \frac{\partial z(t_0, x)}{\partial t} = g(x), \quad (3)$$

$$z(t, 0) = 0, \quad z(t, l) = 0, \quad (4)$$

де $0 \leq x \leq l$, $t_0 \leq t \leq t_1$, дійсні числа a , $t_0 \geq 0$, $t_1 > t_0$, $l > 0$ та функції $f(x) \in L_2(0, l)$, $g(x) \in L_2(0, l)$ задані. Позначимо через Ω наступну множину $\Omega = \{(t, x) : t \in [t_0, t_1], x \in [0, l]\}$.

Функція $u(t, x) \in L_2(\Omega)$ називається допустимим керуванням. Для фіксованого допустимого керування $u(t, x)$ під розв'язком $z(t, x)$ задачі (2)-(4) розуміємо узагальнений розв'язок $z(t, x) \in W_2^{1,0}(\Omega)$. Допустиме керування $u(t, x)$, на якому реалізується мінімум функціонала (1), називається оптимальним керуванням. Для оптимального керування отримана формула

$$u(t, x) = - \int_0^l R_{21}(t, x, s) z(t, s) ds - \int_0^l R_{22}(t, x, s) y(t, s) ds,$$

в якій функції $y(t, s)$ і $z(t, s)$ визначаються із співвідношень

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z(t, s)}{\partial t} = y(t, s), \\ \frac{\partial y(t, s)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 z(t, s)}{\partial s^2} - \\ - \int_0^l R_{21}(t, s, \lambda) z(t, \lambda) d\lambda - \int_0^l R_{22}(t, s, \lambda) y(t, \lambda) d\lambda, \\ z(t_0, s) = f(s), y(t_0, s) = g(s), \\ z(t, 0) = 0, z(t, l) = 0, y(t, 0) = 0, y(t, l) = 0, \end{array} \right.$$

причому функції $R_{ij}(t, x, s)$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, є розв'язком нелінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial R_{11}(t, x, s)}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 R_{12}(t, x, s)}{\partial s^2} + a^2 \frac{\partial^2 R_{21}(t, x, s)}{\partial x^2} - \\ & - \int_0^l R_{12}(t, x, \lambda) R_{21}(t, \lambda, s) d\lambda + \delta(x-s) = 0, \\ & \frac{\partial R_{12}(t, x, s)}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 R_{22}(t, x, s)}{\partial x^2} + R_{11}(t, x, s) - \int_0^l R_{12}(t, x, \lambda) R_{22}(t, \lambda, s) d\lambda = 0, \\ & \frac{\partial R_{21}(t, x, s)}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 R_{22}(t, x, s)}{\partial s^2} + R_{11}(t, x, s) - \int_0^l R_{22}(t, x, \lambda) R_{21}(t, \lambda, s) d\lambda = 0, \\ & \frac{\partial R_{22}(t, x, s)}{\partial t} + R_{12}(t, x, s) + R_{21}(t, x, s) - \int_0^l R_{22}(t, x, \lambda) R_{22}(t, \lambda, s) d\lambda = 0, \end{aligned} \right. \quad (5)$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака, і задовольняють наступним додатковим умовам

$$R_{12}(t, x, 0) = 0, R_{12}(t, x, l) = R_{22}(t, x, 0) = 0, R_{22}(t, x, l) = 0,$$

$$R_{11}(t_1, x, s) = \delta(x-s), R_{12}(t_1, x, s) = R_{21}(t_1, x, s) = 0, R_{22}(t_1, x, s) = \delta(x-s).$$

Розв'язок системи інтегро-диференціальних рівнянь (5) поданий в явній формі.

Список використаних джерел:

1. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования : монография / Г. Дёч ; пер. с нем. Г. А. Вольперт. – М. : Наука, 1971. – 288 с.
2. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами : Справ. пособие / А.Г. Бутковский. – М. : Наука, 1979. – 224 с.

К. В. Косаревич

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ПРО ІСНУВАННЯ ТА ФОРМУ «ВИПРАВЛЕНОЇ» РІВНОВАГИ ЗА НЕШОМ У ГРІ З ВИПАДКОВИМИ СТРАТЕГІЯМИ ДЛЯ КЛАСУ КВАДРАТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВИТРАТ

Нехай деякий однорідний продукт виробляють два підприємства, причому одне з них виходить на ринок вперше і, відповідно, використовує при кількісній конкуренції випадкову стратегію, а інше підприємство – детерміновану стратегію. Нехай обсяг випуску «новачка» q_1 є абсолютно неперервною випадковою величиною зі щільністю розподілу $f(x; \lambda)$, де $\lambda > 0$ – змінний параметр розподілу (невідомий на момент початку взаємодії виробників). Припустимо також, що функція $f(x; \lambda)$ така, що $E q_1 < \infty$, $E q_1^2 < \infty$, $\forall \lambda > 0$, $E(\cdot)$ – оператор математичного сподівання.

Стратегія першого виробника випадкова, тому свою функцію ви-
 грашу він максимізує, обираючи сподіваний обсяг випуску Eq_1 , причому
 $Eq_1 = \int xf(x; \lambda) dx = \varphi(\lambda)$.

Конкурентну взаємодію двох виробників з випадковою стратегією
 одного з них представимо як гру

$$G = (I, S_1, S_2, \{E_i(i, j)\}, \in),$$

де $I = \{1, 2\}$ – множина гравців, $S_i = [0; \infty)$ – множина допустимих стра-
 тегій гравця $i \in I$, $EP_i(Eq_1, q_2) = E(q_i D^{-1}(\sum_{j \in I} q_j) - c_i(q_i))$ – функція вигра-
 шу (сподіваний прибуток) гравця $i \in I$.

Відповідні задачі оптимізації набудуть вигляду:

$$E(q_1 D^{-1}(\sum_{j \in I} q_j) - c_1(q_1)) \rightarrow \max_{Eq_1 \in S_1}$$

для першого виробника та

$$E(q_2 D^{-1}(\sum_{s \in I} q_s) - c_2(q_2)) \rightarrow \max_{q_2 \in S_2}$$

для другого виробника.

Означення. «Виправленою» рівновагою за Нешом в грі G з випад-
 ковою старатегією одного гравця називатимемо набір $q^* = ((Eq_1)^*, (q_2)^*)$
 сподіваного випуску першого виробника та випуску другого виробника
 такий, що

$$EP_1(q^*) \geq EP_1(Eq_1, (q_2)^*), \forall Eq_1 \geq 0,$$

$$EP_2(q^*) \geq EP_2((Eq_1)^*, q_2), \forall q_2 \geq 0.$$

Нехай обернена функція попиту є лінійною, тобто $D^{-1}(\sum_{i \in I} q_i) =$
 $= a - b \sum_{i \in I} q_i$, де $a > 0$ – потенціал ринку, $b > 0$ – показник еластичності
 попиту на ринку.

Теорема. Нехай виконуються умови:

$$c_i(q_i) = c_1^{(i)} q_i^2 + c_2^{(i)} q_i + c_3^{(i)}, \forall i \in I;$$

$$c_1^{(i)} = c_1, c_2^{(i)} = c_2, c_3^{(i)} = c_3, \forall i \in I;$$

$$\psi(Eq_1) = k_1 (Eq_1)^2 + k_2 Eq_1 + k_3.$$

Тоді при $k_1 > \frac{b^2}{4(b+c_1)^2}$ та $1 - \frac{b}{2(b+c_1)} \leq k_2 \leq \frac{(a-c_2)(b+2c_1)}{2(b+c_1)^2}$ набір

$$(Eq_1)^* = \frac{(a-c_2)(b+2c_1) - 2k_2(b+c_1)^2}{4k_1(b+c_1)^2 - b^2},$$

$$(q_2)^* = \frac{(a-c_2)(2k_1(b+c_1) - b) + b}{4k_1(b+c_1)^2 - b^2},$$

є «виправленою» рівновагою за Нешом в грі G з випадковою старате-
 гією одного гравця.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

При решении задач динамики требуется иметь аналитические выражения зависимостей, то есть функций времени, представленных дискретными значениями (таблицами), полученными экспериментально или в результате расчетов. Основой многих методов идентификации является представление динамических моделей в виде решений дифференциальных уравнений. В данной работе предлагается метод получения аналитического выражения функций времени посредством представления экспериментально полученных данных в виде решения однородного линейного разностного уравнения.

Согласно соответствующим положениям теории динамических систем [1, 2] всякую непрерывную, ограниченную по модулю функцию времени можно с наперед заданной точностью аппроксимировать интегралом однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами на конечном отрезке $t_0 \leq t \leq t_k$ или на всей полуоси $0 \leq t \leq +\infty$, если функция стремится к пределу при $t \rightarrow +\infty$.

В работе показано, что эти положения справедливы и для дискретных значений функции в равноотстоящих точках в случае представления зависимостей решениями однородного линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами.

В рамках исследования к однородному линейному разностному уравнению

$$f[(k+n)T] + a_{n-1}f[(k+n-1)T] + \dots + a_1f[(k+1)T] + a_0f(kT) = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющему начальным условиям $f(0) = f_0$, $f(T) = f_1$, $f(2T) = f_2, \dots, f[(n-1)T] = f_{n-1}$, было применено z-преобразование. Используя теорему сдвига, теорему линейности, а также согласно определению z-преобразования установлена зависимость

$$b_{n-(i+1)} = \sum_{s=0}^i a_{n-s} f_{i-s}; \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

где $b_{n-(i+1)} \equiv 0$ при $i \geq n$; $a_{n-s} \equiv 0$ при $s > n$; f_{i-s} – значения функции $f(kT)$ при $k = i - s$.

Придавая i последовательно значения

$$i = \underbrace{0, 1, 2, \dots, n-1}_n, \underbrace{n, n+1, \dots, n+m-1}_m, \quad m \geq n,$$

получено соотношение $f = Fa$, где F – матрица, элементами

$f = (f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+m-1})$; F – прямоугольная ($m \times n$) – матрица, элементами которой являются значения функции $f(kT)$ от f_0 до f_{n+m-2} ; a – столбец коэффициентов разностного уравнения, $a = (a_{n-1}, \dots, a_0)$.

Для получения улучшенной точности аппроксимации во всех точках отрезка аппроксимации, применен метод нахождения псевдообратной матрицы [3], который требует вычисления определителей и эффективно реализуется на ЭВМ.

Точность аппроксимации оценивалась по относительной величине среднего квадрата ошибки

$$\bar{E} = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{n+m-1} [f(kT) - f^0(kT)]^2}{\sum_{k=0}^{n+m-1} [f(kT)]^2}},$$

где $f(t)$ – заданная функция, которую нужно аппроксимировать разностным уравнением n -го порядка, $f^0(t)$ – наилучшее приближение (по методу наименьших квадратов) к функции $f(t)$.

Изложенный метод позволяет получить необходимое аналитическое выражение функции времени, заданной посредством экспериментальных данных. Поскольку начальными условиями решения разностного уравнения есть значения аппроксимирующей функции, то данный метод более предпочтителен, чем аппроксимация функции интегралом дифференциального уравнения, при котором начальные условия неизвестны. Результаты решения тестовых задач показали, что точность представления функции не зависит от порядка аппроксимирующих уравнений.

Список использованной литературы:

1. Неймарк, Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы / Ю.И. Неймарк. – М. : Либроком, 2010. – 336 с.
2. Степаньянц Г.А. Теория динамических систем / Г.А. Степаньянц. – М. : Либроком, 2010. – 312 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М. : Физматлит, 2004. – 560 с.

В. Р. Кукурба*,
Я.М. Чабанюк**,
О.М. Маланчук***,
С.А. Семенюк****

*Национальний університет «Львівська політехніка», м. Львів,

**Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів,

***Львівський національний медичний університет ім. Д. Галицького, м. Львів,

****ІІІ «Логіка», м. Львів

ПРОЦЕДУРА СТОХАСТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ МОДЕЛІ ТЕСТУВАННЯ З НАПІВМАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕННЯМИ

Розглядається процедура стохастичної оптимізації для моделі тестування програмного забезпечення на основі величини продукту [1]. Ця модель відноситься до моделей на основі кількості помилок. Даний під-

хід досліджує кількості помилок у визначених тестових інтервалах. Вважається, що помилки розподілені на основі неоднорідного пуассонового процесу, в яких вихідні дані збираються в процесі тестування ПЗ протягом фіксованих або випадкових часових інтервалів. Також розглядається зв'язок цієї моделі та моделі на основі часу між помилками. Моделі цього типу концентрують увагу на час між виявленнями помилок. У даній задачі процес виявлення помилок описується напівмарковським процесом.

У випадку напівмарковського процесу розглядається відповідність кількостей помилок на тестових ітераціях неоднорідному пуассонівському розподілу. При цьому закон розподілу часових проміжків між виявленнями помилок може описуватися функцією розподілу відмінною від експоненційної. В даній статті розглядається функція інтенсивності моделі тестування програмного продукту з індексом величини проекту.

Функція інтенсивності виявлення помилок для даної моделі [1] має наступний вигляд

$$\lambda(t) = \alpha \beta^{s+1} t^s \exp(-\beta t) \quad (1)$$

де α коефіцієнт, що характеризує загальну кількість помилок в ПЗ, β коефіцієнт, що характеризує загальну тривалість процесу виявлення помилок, s індекс величини проекту.

Оскільки α , β та s в (1) визначається під дією процесу Пуассона кількості помилок на сусідніх інтервалах. Лінійність функції інтенсивності $\lambda(t)$ відносно α не дозволяє отримати таку процедуру. Тому α , отримане з моделі є постійним для процедури стохастичної оптимізації відносно параметрів β та s . З іншої сторони з природи параметру β в (1) слідує, що він змінюється мало при наборі достатньої статистики помилок.

Таким чином отримуємо єдино можливу процедуру стохастичної оптимізації для параметра s з функцією регресії

$$\lambda(s, t) = \alpha \beta^{s+1} t^s \exp(-\beta t). \quad (2)$$

Отже отримуємо процедуру стохастичної оптимізації згідно (2) параметра s

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{a(t)}{2b(t)} [\alpha \beta^{s(t)+b(t)+1} t^{s(t)+b(t)} e^{-\beta t} - \alpha \beta^{s(t)-b(t)+1} t^{s(t)-b(t)} e^{-\beta t}] \quad (3)$$

Функція інтенсивності виявлення помилок $\lambda(s, t)$ згідно (2) має єдиний максимум.

Теорема. Якщо функції $a(t) > 0$ $b(t) > 0$ задовольняють умовам

$$\int_{t_0}^{\infty} a(t) dt = \infty, \int_{t_0}^{\infty} a^2(t) dt < \infty, \int_{t_0}^{\infty} a(t)b(t) dt < \infty, t_0 > 0,$$

то для процедур стохастичної оптимізації (3) має місце збіжність

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = s_0\} = 1,$$

де s_0 таке, що

$$\max \lambda(s, t) = \lambda(s_0, t).$$

Дослідження на різних ітераційних проміжках для набору помилок Trivial отриманого з реальних тестувань програмного продукту (3).

К-сть ітерацій	Значення α	Значення β	Значення s моделі	Значення s процедури	Загальна к-сть помилок (модель)	Загальна к-сть помилок (процедура)
800	73.295	0.001748	0.168	0.174	67.968	67.834
900	72.954	0.001714	0.165	0.17	67.727	67.606
1000	75.742	0.001664	0.16	0.166	70.43	70.283
1100	74.277	0.001637	0.157	0.163	69.129	68.993
1200	72.784	0.001626	0.156	0.162	67.763	67.629
1300	71.639	0.001604	0.154	0.16	66.747	66.61

В таблиці показані результати, на кількох проміжних інтервалах, що відображають зміну значень параметрів моделі та граничних значень процедури.

Висновки Побудовано процедуру стохастичної оптимізації для індексу величини програмного продукту, яка дозволяє оцінити кількість залишкових помилок, що в свою чергу дає можливість передбачити матеріальні витрати на тестування та його доцільність.

Процес знаходження помилок описується напівмарковським процесом, це дозволяє досліджувати статистичні результати, що відповідають неоднорідному пуассонівському процесу. Останнє в свою чергу дає більшу гнучкість для формального опису процесу.

Список використаних джерел:

1. Оцінювання та прогнозування надійності програмного забезпечення на основі моделі з індексом складності проекту / В.С. Яковина, Я.Й. Чабанюк, М.М. Сенів, У.Т. Хімка // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2011. – № 2. – С. 152-160.
2. Оптимізація моделі тестування програмного забезпечення з показником величини проекту / Я.М. Чабанюк, В.Р.Кукурба, Л.Б. Гнатів та ін. // Вісник НУ «ЛП». Серія «Комп'ютерні науки та інформаційні технології». – № 694. – С. 81-89.

Г. М. Кулик

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», м. Київ

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ СУМАМИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА

Розглядається питання наближення періодичних функцій сумами Валле-Пуссена

$$\sigma_n^p(f; x) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^n S_k(f; x)$$

де $S_k(f; x)$ – частинні суми Фур'є. Через W^r позначаємо клас 2π – періодичних функцій $f(x)$, які мають неперервні частинні похідні до порядку

$(r-1)$ а похідні r -го порядку $f^{(r)}(x)$ майже скрізь задовольняють нерівність $\left|f^{(r)}\right| \leq 1$. Установлено що для відхилення

$$E_n(W^r; \sigma_n^p(f; x)) = \sup_{f \in W^r} \left\| f(x) - \sigma_n^p(f; x) \right\|_C = \frac{4}{\pi^2 n^r} \ln \frac{n}{p+1} + q(n, p, r)$$

має місце оцінка знизу

$$E_n(W^r; \sigma_n^p(f; x)) \geq \frac{1}{p(p+1)(n-p+1)} - \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^r} - \frac{c}{n^r},$$

де c – додатня постійна величина яка не залежить від n, p, r , причому c, r . Використовуючи метод Степанця О.І. для відхилення $E_n(W^r; \sigma_n^p(f; x)) = E_n$ отримано оцінку зверху

$$E_n \leq \frac{1}{(n+1)^r} \left[\frac{r\tilde{\theta}}{\ln 2(1-\tilde{\theta})} + \frac{2(\pi+1)}{\pi^2} + 4 + \frac{10}{\pi^2(1-\tilde{\theta})} + \frac{4}{\pi^2} + \left(\frac{1}{\tilde{\theta}} - 1 \right) \right] + O\left(\int |t| \geq \frac{\pi n}{2} \left| \tilde{\tau}_n^p(t) \right| dt \right),$$

де

$$\tilde{\theta} = \frac{p+1}{n+1}, \quad \tilde{\tau}_p^n(t) = \frac{1}{n} \int_0^\infty \tau_p^n(t) \cos\left(vt + \frac{r\pi}{2}\right) dv,$$

$$\tilde{\tau}_p^n(t) = \begin{cases} 0, & v \in \left[0, 1 - \frac{p}{n}\right], \\ \frac{nv - n + p}{p+1} \frac{1}{n^r v^r}, & v \in \left(1 - \frac{p}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right], \\ \frac{1}{n^r v^r} & v \in \left(1 + \frac{1}{n}, \infty\right). \end{cases}$$

Дослідження показали, що на класах функцій найкраще наближення дає сума

$$\sigma_n(f; x; \eta) = \frac{1}{[\eta(n) - n + 1]} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]} S_k(f; x), \text{ де } \eta(n) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(n)\right)$$

де $[\eta]$ – ціла частина числа η

Список використаних джерел:

1. Ефимов А.В. О приближении периодических функций суммами Валле-Пуссена / А.В. Ефимов // Изв. АН СССР. Сер.мат. – 1953. – Т. 23, №5. – С. 737-770.
2. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. – К. : Наукова думка. 1981. – 339 с.

А. В. Куниць

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

**ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ СТАЦІОНАРНИХ
ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ АБО ДИФУЗІЇ
В ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ**

Стационарне рівняння теплопровідності або дифузії

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = -f(x, \varphi, z)$$

в циліндричній системі координат (x, φ, z) у випадку, коли розв'язок $u = u(x)$ не залежить ні від z , ні від φ має вигляд

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[xk(x) \frac{du}{dx} \right] = -f(x, u), \quad x \in (0, R), \quad (1)$$

При $x = 0$ ставиться умова обмеження $|u(0)| < \infty$, яка еквівалентна умові

$$\lim_{x \rightarrow 0} xk(x) \frac{du}{dx} = 0. \quad (2)$$

При $x = R$ ставиться звичайна крайова умова

$$u(R) = \mu_2. \quad (3)$$

Для задачі (1)-(3) у статті [1] на нерівномірній сітці $\bar{\omega} = \{x_j \in [0, R], j = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = R\}$ побудовано точну триточкову різницеву схему та доведено існування та єдиність її розв'язку. На основі цієї схеми побудовано триточкову різницеву схему порядку точності $\bar{m} = 2[(m+1)/2]$ (m – натуральне, $[\cdot]$ – ціла частина).

$$a_1^{(\bar{m})} y_{x,0}^{(\bar{m})} = -\varphi^{(\bar{m})}(x_0, y^{(\bar{m})}), \quad y_N^{(\bar{m})} = \mu_2,$$

$$\frac{1}{x_j} \left(a^{(\bar{m})} y_{\bar{x}}^{(\bar{m})} \right)_{\bar{x}, j} = -\varphi^{(\bar{m})}(x_j, y^{(\bar{m})}), \quad j = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\text{де } a^{(\bar{m})}(x_1) = \frac{h_1}{V_1^{(\bar{m})1}(x_1)}, \quad a^{(\bar{m})}(x_j) = \frac{h_j}{V_1^{(\bar{m})j}(x_j)}, \quad j = 2, 3, \dots, N-1,$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_0, u) = \frac{u_0 - Y_1^1(x_1, u)}{V_1^{(\bar{m})1}(x_1)},$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_j, u) = \frac{1}{\bar{h}_j} \sum_{\alpha=1}^2 (-1)^\alpha \left[Z_\alpha^{(m)j}(x_j, u) + (-1)^\alpha \frac{Y_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j, u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{x_j V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)} \right],$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1,$$

де $V_1^{(\bar{m})1}(x_1), Y_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j, u), Z_\alpha^{(m)j}(x_j, u), V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j), j = 3 - \alpha, 4 - \alpha, \dots, N + 1 - \alpha, \alpha = 1, 2$, значення чисельного розв'язку задач Коші

$$\frac{d Y_{\alpha}^j(x, u)}{dx} = \frac{Z_{\alpha}^j(x, u)}{k(x)}, \quad \frac{d Z_{\alpha}^j(x, u)}{dx} = -f(x, Y_{\alpha}^j(x, u)) - \frac{Z_{\alpha}^j(x, u)}{x},$$

$$x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha},$$

$$Y_{\alpha}^j(x_{j+(-1)^{\alpha}}, u) = u_{j+(-1)^{\alpha}}, \quad Z_{\alpha}^j(x_{j+(-1)^{\alpha}}, u) = k(x) \frac{du}{dx} \Big|_{x=x_{j+(-1)^{\alpha}}},$$

$$\frac{dV_1^1(x)}{dx} = \frac{1}{k(x)}, \quad x_0 < x < x_1, \quad V_1^1(x_0) = 0,$$

$$\frac{dV_{\alpha}^j(x)}{dx} = \frac{(-1)^{\alpha+1}}{xk(x)}, \quad x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha}, \quad V_{\alpha}^j(x_{j+(-1)^{\alpha}}) = 0,$$

отримані за допомогою будь-яких однокрокових методів порядку точності \bar{m} , а $Y_1^{(\bar{m})1}(x_1, u)$, $Z_1^{(m)1}(x_1, u)$ значення чисельного розв'язку задач Коші

$$\frac{d \Psi^1(x, u)}{dx} = \frac{Z_1^1(x, u)}{k(x)}, \quad \frac{d Z_1^1(x, u)}{dx} = -f(x, Y_1^1(x, u)) - \frac{Z_1^1(x, u)}{x},$$

$$0 < x < x_1, \quad Y_1^1(0, u) = u_0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} Z_1^1(x, u) = 0,$$

отримані методом рядів Тейлора

$$Y_1^{(\bar{m})1}(x_1, u) = u_0 - h_1^2 \frac{f(x_0, u_0)}{4k(x_0)} -$$

$$- \sum_{p=3}^{\bar{m}} \frac{h_1^p}{p!} \left[\sum_{j=0}^{p-2} \binom{p-1}{j} \frac{p-j-1}{p-j} \frac{d^{p-j-2} f}{dx^{p-j-2}} \Big|_{x=x_0} \frac{d^j}{dx^j} \frac{1}{k(x)} \Big|_{x=x_0} \right],$$

$$Z_1^{(m)1}(x_1, u) = -\frac{h_1}{2} f(x_0, u_0) - \sum_{p=2}^m \frac{h_1^p}{(p-1)!(p+1)} \frac{d^{p-1} f}{dx^{p-1}} \Big|_{x=x_0}.$$

Чисельні експерименти підтверджують теоретичні висновки.

Список використаних джерел:

1. Kunynets A.V. Exact three-point difference scheme for nonlinear stationary differential equations in cylindrical coordinates / A.V. Kunynets, M.V. Kutniv // Журнал обчислювальної та прикладної математики (Серія «Обчислювальна математика»). – 2011. – Вип. 2(105). – С. 51-68.

А.М. Кух

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

3D МОДЕЛЮВАННЯ ЗАСОБАМИ T-FLEX

Цей спосіб створення 3D моделі є «класичним» для більшості CAD-систем. Мова йде про створення 3D моделі в 3D просторі. Спосіб створення моделі в сучасних CAD-системах передбачає:

- 3D тіла створюються на основі 3D профілів;
- 3D профілі – на основі 2D ескізів (контурів);
- 2D ескізи створюються лініями зображення на робочій поверхні або на основі геометрії інших тіл (гранях, ребрах, вершинах).

Пропонована схема створення 3D моделі в T-FLEX виглядає так:

- на робочій площині створюється параметричний каркас на основі ліній побудови;
- далі створюється контур, на основі якого далі системою буде побудований 3D профіль, але замість ліній зображення для створення контура використовується штриховка (кольорова заливка);
- 3D профіль система створює автоматично при виході із режиму ескізу на робочій площині;
- створення 3D тіла, вибраної 3D операції, на основі побудованого 3D профілю;
- нові 3D профілі користувач буде не на гранях, вершинах чи ребрах існуючих тіл (як це прийнято), а тільки на робочих площинах і зв'язує все 3D побудова при допомозі змінних, наприклад, положення в просторі 3D профілів або 3D тіл відносно один одного.

Такий підхід, звичайно, незначно збільшує час на створення 3D моделей, але дає більше ступенів свободи в діях при моделюванні, а головне при редагуванні 3D моделей і не заганає конструктора в жорсткі рамки послідовності дій при проектуванні, які визначені розробником CAD-системи.

О. М. Кух, А. М. Кух

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

МОДЕЛЬ ПРОГНОЗУВАННЯ РІВНЯ ЗНАТЬ СТУДЕНТА

Відомо, що мотивація M до навчання залежить від рівня U вимог викладача (кількості знань, які необхідно засвоїти) і рівня знань Z учня: $M = M(U, Z)$. Враховуючи забування, одержуємо, що швидкість збільшення знань описується рівнянням: $dZ/dt = \alpha ZM - \gamma Z$, де α і γ – коефіцієнти навчності і забування студента. Мотивація прямо пропорційна різниці між рівнем вимог U і рівнем знань Z : $M = U - Z$, а коли $U - Z$ перевищує деяку межу C , мотивація зникає ($M = 0$). Тоді швидкість зміни знань студента:

$$\frac{dZ}{dt} = \begin{cases} \alpha Z(U - Z), & U \leq Z + C, \\ -\gamma Z, & U > Z + C, \end{cases}$$

Коли Z низький, швидкість зростання рівня знань невисока із-за відсутності можливості утворення асоціативних зв'язків. По мірі зростання Z вона зростає, але при $Z \rightarrow U$ зменшується за рахунок зниження мотивації. Врахуємо, що складність S , теми курсу, що вивчається, може залежати від рівня знань Z_k студента k -ої теми. Нехай ця залежність виражається як: $Sr = a + b \exp(-cZk)$, де $a, b, c > 0$, $a + b \leq 1$, $b < a$. Складність

теми лежить в інтервалі $[0, 1]$. Мінімальна складність $S = 0$ відповідає дуже простій темі, максимальна $S = 1$ – темі, яку студент не може сприйняти в принципі (потрібно дуже багато часу). Одержуємо:

$$\frac{dZ_{ij}}{dt} = a_j(1 - S_{ij})Z_{ij}(U_i - Z_{ij}) - \gamma_j Z_{ij}, \quad Z_{ij} > 0, U_i > Z_{ij}, a_j, \gamma_j > 0.$$

де Z_{ij} – рівень знань j -ого студента i -ої теми, U_i – рівень вимог вимог вимог, тобто кількість знань, які повинен засвоїти студент. В кінцевому рахунку одержуємо

$$Z_{ij}^{t+1} = Z_{ij}^t + \left(a_j(1 - S_{ij})Z_{ij}^t(U_i - Z_{ij}^t) - \gamma_j Z_{ij}^t \right) \Delta t.$$

Після вивчення теми викладач проводить контрольну роботу (тест) із m задач $K = \{ z_1(1), z_2(1,2), \dots, z_m(4,5) \}$. Якщо для розв'язку задачі $z_k(i)$ достатньо знань i -ого питання, то результат або ймовірність розв'язку R_k рівен рівню засвоєння учнями даного питання: $R_k = Z_i / U_i$. Якщо k -а задача $z_k(r, s)$ комбінованого типу і вимагає знань r -ої і s -ої теми, то за законом множення ймовірностей $R_k = (Z_r / U_r)(Z_s / U_s)$. Програма, що моделює процес навчання, повинна містити цикл по часу t , в якому обчислюється швидкість приросту знань, визначається рівень знань в наступний момент часу $t + 1$, результати виводяться на екран, після чого все повторюється спочатку.

Б. Р. Кушлик

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

КОНЦЕПЦІЯ ПООПЕРАЦІЙНОГО КОНТРОЛЮ ТА ЗАСОБИ ЇЇ РЕАЛІЗАЦІЇ НА ПОЛІГРАФІЧНИХ ПІДПРИЄМСТВАХ

Основною особливістю поопераційного контролю є те, що відповідь на кінцеве питання, відповідає продукт/процес/рішення поставленим до нього вимогам чи ні, можна дати лише при наявності відповідей на усі без винятку поточні питання, що виникають по ходу вияснення відповідності кожного із окремо взятих показників. Основні схеми побудови поопераційного контролю можна визначити виходячи із розуміння наскільки сильно розгалуженою є мережа запитань, на які слід дати відповідь.

Відповідно до цього варто визначити основну концепцію та принципи їх реалізації. Отже, розглядаючи детально два поняття: «контроль» та «поопераційність» можна прийти до таких висновків:

- поопераційність означає отримання певної інформації на кожній окремо взятій стадії виробництва, за якою можна буде виявити недолік чи передбачити його виникнення на наступній стадії;
- контроль передбачає наявність відповідної методики визначення окремого показника та його певних нормативних значень, відповідно до яких можна виявити відповідність чи невідповідність параметра необхідним значенням;
- об'єднане поняття «поопераційний контроль» включає в себе вимоги як до одного, так і до другого слова.

Поопераційний контроль – спосіб отримання інформації про відповідність певних чітко визначених показників нормативним та стандартним значенням за зрозумілою стандартно визначеною методикою, що включає в себе алгоритм визначення показників крок за кроком.

Головним результатом концепції поопераційного контролю має бути можливість у будь-який момент виявити проблему та передбачити виникнення її у майбутньому на будь-якій майбутній операції.

Визначаючи засоби реалізації концепції поопераційного контролю доцільно виразити декілька проблемних питань [1-4]:

- встановлення основного завдання, наприклад, що необхідно визначити, що необхідно виявити, що необхідно передбачити чи запобігти;
- наявність чіткої та зрозумілої структури факторів та параметрів впливу на кінцеве завдання (якість продукту, стан технологічного процесу тощо);
- знання взаємних зв'язків та взаємного впливу певних показників, наприклад, якщо один показник завищений, то другий також однозначно буде завищений;
- наявність методики визначення кожного окремого показника, яка дозволяла б максимально точно його виміряти чи вирахувати;
- наявність приладів та обладнання, що дозволить виміряти чи визначити значення по кожному окремому показнику;
- наявність комплексного показника та методики проведення його обчислень;
- розроблення поопераційного алгоритму, що показуватиме порядок здійснення усіх операцій від найпершої до останньої та забезпечуватиме достатній зворотній зв'язок та реагування на результати отриманих вимірювань.

Розроблено алгоритм оцінювання надійності технологічного процесу. Комплекс заходів включає використання унормованих приладів, апаратно-програмних засобів та способів визначення параметрів, які в цілому сприяють підтриманню стабільності, вчасному виявленні проблеми і можливості її усунути.

Список використаних джерел:

1. Кушлик Б.Р. Актуальні аспекти дослідження надійності технологічного процесу виготовлення малотиражної продукції офсетним способом друку / Б.Р. Кушлик // Технологія і техніка друкарства. – К. : НТУУ «КПІ» ВПІ, 2009. – № 4. – С. 34-39.
2. Кушлик Б.Р. Математичний опис точки друкувального елемента у друкарському контакті офсетного друку / Б.Р. Кушлик // Технологія і техніка друкарства. – К. : НТУУ «КПІ» ВПІ, 2010. – №4. – С. 92-100.
3. Кушлик Б.Р. Аналіз поведінки водно-фарбової емульсії у процесі плоского офсетного друку зі зволоженням друкарських форм / Б.Р. Кушлик // Технологія і техніка друкарства. – К. : НТУУ «КПІ» ВПІ, 2011. – №4. – С. 34-45.
4. Кушлик Б.Р. Загальні закономірності продукування малотиражної продукції / Б.Р. Кушлик // Тези дванадцяті міжнародної науково-технічної конференції студентів і аспірантів «Друкарство молоде». – К. : ВПІ НТУУ «КПІ», 2012. – С. 157-158.

О. І. Кушлик-Дивульська

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

ПОРІВНЯННЯ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАТЬ З МАТЕМАТИКИ

Сьогодні нікого не потрібно переконувати, що запровадження зовнішнього оцінювання (ЗНО) все-таки забезпечило в країні умови для реалізації конституційного права на рівний доступ до вищої освіти.

Автором статті [1] вказано основні недоліки ЗНО з математики: фальсифікація; щорічна зміна правил проведення; недосконалість вибору завдань; зниження рівня освіченості й поява «плоского мислення»; нехтування спеціалізацією школи; велика кількість помилок при оцінюванні завдань; невідповідність між оцінкою, отриманою в загальноосвітньому закладі, і балом на ЗНО; неможливість визначення мотивації абітурієнтом. Водночас, ЗНО має великі переваги: створення рівного доступу до вищої освіти; об'єктивність; подолання продажності; наближення до світових стандартів освіти.

Опрацювання статистичних даних двох груп (одна економічного профілю, а друга – технічного, НТУУ «КПІ») показало, що є слабкою кореляція з коефіцієнтом кореляції $r = 0,299$ між оцінкою, отриманою з вищої математики в першому семестрі і результатами ЗНО для технічного профілю, хоча для економічного – вона є середньою: $r = 0,6715$. Для цих же груп відповідні значення коефіцієнтів кореляції між шкільною оцінкою з математики і результатами ЗНО $r = 0,62$ та $r = 0,73$, між шкільною оцінкою з математики і результатами оцінювання з вищої математики $r = 0,442$ та $r = 0,759$.

Такі значення коефіцієнтів кореляції є частково обґрунтованими, так як для технічного спрямування повинен бути більший бал ЗНО (обрано групу із середнім балом 167), однорівневий підхід при оцінюванні ЗНО є часто неправильним і завищеним. Тому, мабуть, варто враховувати правильність вибору спеціальності абітурієнтом, можливо, і встановлювати у ВНЗ додаткові критерії їх відбору. На мою думку, також потрібно вводити додаткові курси з елементарної математики з метою покращення рівня знань з вищої математики, які в подальшому потрібні для спеціальних курсів.

Список використаних джерел:

1. Вискребенцева М.В. Зовнішнє незалежне оцінювання з математики: переваги та недоліки. [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://Pfto_2013_28_16.pdf.
2. [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://osvita.ua/test/test_article/29724/.

В. В. Листопадава

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ З ПАРАМЕТРАМИ

Математичними моделями ряду важливих задач різних областей сучасної науки і техніки є багатоточкові задачі для диференціальних і інтегродиференціальних рівнянь з параметрами. Вони детально досліджувалися багатьма авторами, серед яких потрібно відзначити роботи А.Ю. Лучки, М.С. Курпеля [1, 2]. Але задачі для диференціальних рівнянь нейтрального типу з параметрами вивчені ще недостатньо. В даному повідомленні розглядається задача:

$$y''(x) + q(x)y''(x - \Delta) + g_1(x)y'(x) + g_2(x)y(x) + g_3(x)y'(x - \Delta) + g_4(x)y(x - \Delta) = f(x) + c(x)\lambda, x \in (a; b), \quad (1)$$

$$y(x_s) = \alpha_s, \alpha_s \in R, s = \overline{1, m}, a = x_1 < x_2 < \dots < x_s < \dots < x_m = b, \quad (2)$$

$$y''(x) = y'(x) = y(x) = 0, x \in (a - \Delta; a), \quad (3)$$

де Δ – постійне запізнення, $\Delta > 0$, $f(x)$ – відома, $y(x)$ – шукана функція, $c(x)\lambda$ – скалярний добуток шуканого вектора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ і відомої векторної функції $c(x) = (c_1(x), c_2(x), \dots, c_l(x))$, $l = m - 2$.

В доповіді обґрунтовано метод зведення задачі (1)-(3) до рівносильного інтегрального рівняння і встановлено умови існування та єдиності розв'язку даної задачі.

Список використаних джерел:

1. Курпель Н.С. Об одной многоточечной краевой задаче для дифференциальных уравнений с параметрами / Н.С. Курпель, А.Г. Марусяк // Укр. мат. журн. – 1980. – №2. – С. 223-226.
2. Лучка А.Ю., Марусяк А.Г. Многоточечная задача для дифференциальных уравнений с параметрами и её решение проекционно-итеративными методами / А.Ю. Лучка, А.Г. Марусяк // Динамические системы дифференциально-разностные уравнения. – Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 53-68

В. В. Лукович

Інститут проблем матеріалознавства
ім. І. М. Францевича НАН України, м. Київ

ПРОСТА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗРАХУНКУ ПОТЕНЦІАЛУ НА ЗОВНІШНІЙ ПОВЕРХНІ ІЗОЛЯЦІЇ МАГІСТРАЛЬНОГО ТРУБОПРОВОДУ

Потенціал U_p в заданій точці зовнішньої поверхні ізоляції трубопроводу має особливість $\ln(1/d)$. Скористаємось цією особливістю для побудови спрощеної математичної моделі розрахунку U_p .

На зовнішній поверхні ізоляції відрізка $[-L, L]$ нескінченного трубопроводу та точкового джерела (анодного заземлення), розміщених в нескінченному однорідному середовищі, потенціал U_p задовольняє рівнянню [1]

$$U_p = \frac{\rho I}{4\pi} \sum_{n=-1}^1 \left[(x - 2Ln)^2 + y_a^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - \frac{\rho}{4\pi} \sum_{n=-1-L}^L \int_{\varphi}^{2\pi+\varphi} J(\xi) \left[(x - \xi + 2Ln)^2 + 2a^2(1 - \cos(\varphi - \theta)) \right]^{-\frac{1}{2}} d\xi ad\theta \quad (1)$$

де ρ – питомий опір землі; I – величина струму анодного заземлення; $x = 0$, $y = ya$ – координати заземлення; $[-L, L]$ – зона захисту; a – радіус труби.

Так як опір трубопроводу на декілька порядків менший від опору землі, величина J практично не залежить від φ . Враховуючи симетрію, інтеграл у виразі (1) матиме вигляд

$$4 \int_0^L J(\xi) \int_0^{\pi} \left[(x - \xi + 2Ln)^2 + 2a^2(1 - \cos\theta) \right]^{-\frac{1}{2}} d\xi ad\theta \quad (2)$$

Проінтегрувавши вираз (2) по θ і замінивши інтеграл на відрізку $[0, L]$ сумою інтегралів на відрізках $[x_{i-1}, x_i]$, замість (2) отримаємо

$$4 \sum_{j=1}^n \frac{J_{j-1} + J_j}{2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{2a}{\sqrt{(x_i - \xi)^2 + 4a^2}} K \left(\sqrt{\frac{2((x_i - \xi)^2 + 2a^2)}{(x_i - \xi)^2 + 4a^2}} \right) d\xi \quad (3)$$

де K – повний еліптичний інтеграл. Поділивши відрізок $[x_{i-1}, x_i]$ на p частин, побудуємо графік залежності цих частин від відстані від точки x_i для $x_i = x_0$. На рис. 1 зображено графік цієї залежності, коли $(x_i - x_{i-1}) / n = 0.001$ м; $a = 0,51$ м; $x_1 = 10, 50, 100$ м. З графіків видно, що в точці x_1 значення $g(x)$ близьке до 0. Тому в співвідношенні (3) замість J_1 візьмемо наближено $J_0 = 0$, замінивши суму відрізків по j лише одним відрізком $j = 0$.

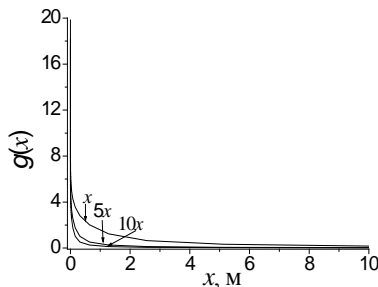


Рис. 1. Графіки залежності доданків суми (6) від $di = x$.

З врахуванням (3) вираз

$$\int_{-L}^L J(\xi) \left[(x - \xi)^2 + a^2 \right]^{-\frac{1}{2}} d\xi = \sum_{j=-n}^{n-1} \frac{J_j + J_{j+1}}{2} \int_{-x_j}^{x_{j+1}} \left[(x_i - \xi)^2 + a^2 \right]^{-\frac{1}{2}} d\xi$$

при $x_{i+1} - x_i \geq 5$ м наближено можемо записати у вигляді

$$\int_{-L}^L J(\xi) \left[(x - \xi)^2 + a^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\xi \approx \sum_{i=-n}^n \frac{J_i}{2} \sum_{j=-1-x_i}^{x_{i+1}} \left[(x_i - \xi)^2 + a^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\xi. \quad (4)$$

Знак \approx використаний тому, що в кожній точці x_i ми знехтували всіма доданками суми крім i -го. З рис. 1 видно, що $g(x)$ відмінний від нуля при $x = 10, 50, 100$ м.

В даній роботі запропоновано точніший метод апроксимації величини $J(x)$ за допомогою виразів

$$J(x) = J_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + 0 \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}$$

на відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ і

$$J(x) = J_i \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + 0 \frac{x_i - x}{x_{i+1} - x_i}$$

на $[x_i, x_{i+1}]$. За такої апроксимації значення J_i поширюється лише до точок x_{i-1} і x_{i+1} , в яких $J_i = 0$, значення J_{i-1} та J_{i+1} в точці x_i дорівнюють нулю.

В результаті замість (4) отримаємо

$$\frac{J_i}{2} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\xi - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \left[(x_i - \xi)^2 + a^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - \xi}{x_{i+1} - x_i} \left[(x_i - \xi)^2 + a^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} d\xi.$$

Проінтегрувавши вирази у фігурних дужках остаточно отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{J_i}{2} \left\{ \ln \frac{x_i - x_{i-1} + \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + a^2}}{a} - \frac{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + a^2} - a}{x_i - x_{i-1}} \right\} + \\ & + \frac{J_i}{2} \left\{ \ln \frac{x_{i+1} - x_i + \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + a^2}}{a} - \frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + a^2} - a}{x_{i+1} - x_i} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Розроблено алгоритм і програму розв'язування системи рівнянь (див. [1]),

$$\begin{aligned} & RJ_i + \frac{\rho J_i}{8\pi} \left\{ \ln \frac{x_i - x_{i-1} + \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + a^2}}{a} - \frac{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + a^2} - a}{x_i - x_{i-1}} \right\} + \\ & + \frac{\rho J_i}{8\pi} \left\{ \ln \frac{x_{i+1} - x_i + \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + a^2}}{a} - \frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + a^2} - a}{x_{i+1} - x_i} \right\} + U = \\ & = \frac{\rho I}{4\pi} \left[(x_i + 2Ln)^2 + y_a^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad i = 1, N. \end{aligned} \quad (6)$$

$$I = J_1(x_{c2} - x_1) + \sum_{i=2}^{N-1} J_i(x_{ci+1} - x_{ci}) + J_N(x_N - x_{cN})$$

Проведено порівняння результатів розв'язків (6) і (7)

$$\begin{aligned}
 RJ_i + \frac{\rho}{4\pi} \sum_{n=1}^1 \sum_{j=1}^N J_j \int_{x_{ij}}^{x_{ij+1}} \left[(x_i - \xi + 2Ln)^2 + a^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\xi + U = \\
 = \frac{\rho I}{4\pi} \sum_{n=1}^1 \left[(x_i + 2Ln)^2 + y_a^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad i = \overline{1, N}; \\
 I = J_1(x_{e2} - x_1) + \sum_{i=2}^{N-1} J_i(x_{ci+1} - x_{ci}) + J_N(x_N - x_{cN}). \quad (7)
 \end{aligned}$$

Різниця між розв'язками не перевищує точності вимірювання на трасі магістрального трубопроводу методом виносного електроду.

На рис. 2 і 3 зображено графіки зміни потенціалів F і U , де $F = U - U_p$, вздовж відрізка трубопроводу для перехідного опору ізоляції 1000 і 200 Ом·м відповідно.

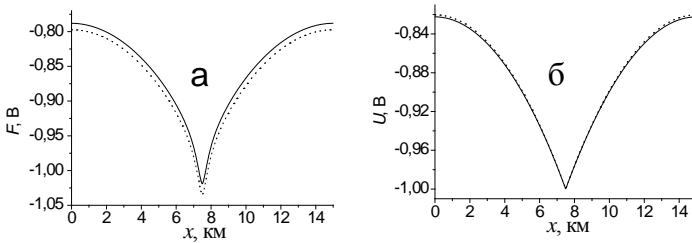


Рис. 2. Зміна потенціалів F (а) і U (б) вздовж відрізка трубопроводу для перехідного опору ізоляції 1000 Ом·м суцільною лінією – за системою (10), (11), пунктирною – за (7), (8).

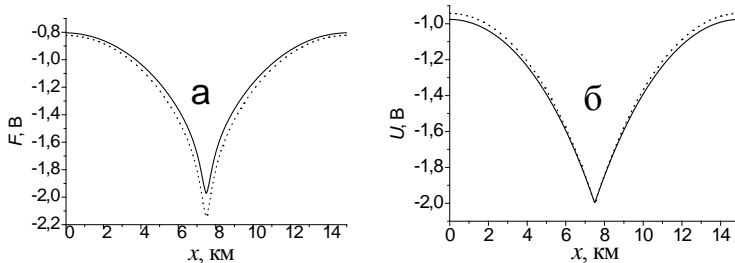


Рис. 3. Зміна потенціалів F (а) і U (б) вздовж відрізка трубопроводу для перехідного опору ізоляції 200 Ом·м суцільною лінією – за системою (10), (11), пунктирною – за (7), (8).

Запропонована методика значно спрощує математичну модель розрахунку параметрів катодного захисту.

Список використаних джерел:

1. Лукович В.В. Спрощена математична модель катодного захисту магістрального трубопроводу / В.В. Лукович // Математические модели и вычислительный эксперимент в материаловедении. – К. : Ин-т пробл. Материаловедения НАН Украины. – 2013. – Вып. 15. – С. 3-13.

О. І. Махович

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ОСОБЛИВОСТІ ЧИСЛОВОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ МОДЕЛІ РОЗПОДІЛЕНОЇ МЕХАНІЧНОЇ ЛАНКИ З ВИКОРИСТАННЯМ РІЗНИХ ФОРМ МАТЕМАТИЧНОГО ОПИСУ

Для дослідження точності числової реалізації моделей ланок із розподіленими параметрами розглянемо модельну задачу побудови і комп'ютерної реалізації моделі типової розподіленої механічної ланки у вигляді довгого пружного валу із поздовжньою деформацією.

Модель довгого пружного валу представляється у вигляді диференціального рівняння в частинних похідних

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (1)$$

із нульовими початковими умовами і крайовими умовами:

$$-E \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = F(0,t); \quad -E \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad (2)$$

де ρ – густина матеріалу стержня, E – модуль Юнга, $u(x,t)$ – поздовжнє зміщення валу в перерізі x у момент часу t .

Для числової реалізації моделі (1), зазвичай, використовують різні різницеві обчислювальні схеми. Однак, при їх застосуванні суттєві похибки в обчислювальний процес вносить ефект Гіббса. Цю проблему можна вирішити за допомогою залучення інших форм математичного опису розподілених ланок, зокрема, інтегральних моделей.

Інтегральну модель довгого пружного валу будемо шукати у вигляді

$$u(t) = \int_0^l K(t-\tau) F(\tau) d\tau, \quad (3)$$

де $u(t)$ — поздовжнє зміщення валу у перерізі $x = l$; $F(t)$ – момент, прикладений у перерізі $x = 0$.

Для знаходження невідомого ядра $K(t, \tau)$, яке має зміст імпульсної перехідної характеристики, скористаємося тією властивістю, що передатна функція об'єкта – це зображення за Лапласом його імпульсної перехідної характеристики.

Передатна функція, яка ставить у залежність поздовжнє видовження валу у перерізі $x=l$ від сили зовнішнього впливу, прикладеної у перерізі $x=0$ має вигляд:

$$W(l, 0; p) = \frac{U(l, p)}{F^*(0, p)} = \frac{1}{p \sqrt{\frac{\rho}{E}} \operatorname{sh} \left(pl \sqrt{\frac{\rho}{E}} \right)}. \quad (4)$$

Перейшовши у простір оригіналів, отримаємо шукане ядро інтегрального оператора

$$K(t-\tau) = 2n, \quad 2n-1 < \frac{t-\tau}{l\sqrt{\frac{\rho}{E}}} < 2n+1, \quad n \in N. \quad (5)$$

Для оцінки точності числової реалізації інтегрального подання розподіленої ланки знайдемо аналітичний розв'язок відгуку при сигналі у вигляді одиничного стрибка.

$$U(l, p) = W(l, 0; p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2 \sqrt{\frac{\rho}{E}} \operatorname{sh}\left(p l \sqrt{\frac{\rho}{E}}\right)}. \quad (6)$$

За даним зображенням знайдемо оригінал, застосувавши зворотнє перетворення Лапласа:

$$u(l, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < l\sqrt{\frac{\rho}{E}}, \\ 2n \left(t - l\sqrt{\frac{\rho}{E}} \right), & (2n-1)l\sqrt{\frac{\rho}{E}} < t < (2n+1)l\sqrt{\frac{\rho}{E}}, \quad n \geq 1, n \in N. \end{cases} \quad (7)$$

Під час дослідження було проведено обчислювальний експеримент із розрахунку поздовжніх коливань довгого пружного валу при вхідному сигналі у вигляді одиничного стрибка. Результати чисельних методів порівнювались із точними аналітичними розв'язками при тому ж вхідному сигналі і знаходились абсолютні похибки розв'язку при використанні інтегрального подання.

Числова реалізація інтегральної моделі проводилась методом квадратур із застосуванням формули лівих прямокутників у середовищі Matlab.

Використовувались такі фізичні параметри пружного валу: модуль Юнга $E = 20 \text{ e}10 \text{ н/м}^2$; густина $\rho = 7500 \text{ кг/м}^3$; $l = 25\text{м}$; дискретизація часової координати із кроком $h = 1.9751\text{e-}04$.

Проведені обчислювальні експерименти показали, що при використанні моделей інтегральної форми, внаслідок відсутності похибок, викликаних ефектом Гіббса, точність числової реалізації була на рівні $4 \cdot 10^{-9} \%$ максимального значення відносної похибки. В той же час, при використанні методу скінченних різниць максимальне значення відносної похибки становило $6,2 \cdot 10^{-3} \%$.

В. Г. Маценко

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ВІКОВОЇ СТРУКТУРИ БІОЛОГІЧНИХ ПОПУЛЯЦІЙ З ВНУТРІШНЬОВИДОВОЮ КОНКУРЕНЦІЄЮ

Моделювання популяційної динаміки з урахуванням зміни вікової структури є однією з важливих задач математичної екології. Моделі динаміки вікової структури широко застосовуються при вивченні проблем демографії, мікробіології, популяційної екології, біоценології тощо.

Класична диференціальна модель динаміки вікової структури запропонована фон Фоерстером і має вигляд [1]

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial t} = -d(\tau, t)x, \quad t, \tau > 0, \quad (1)$$

$$x(0, t) = \int_0^{\infty} b(\tau, t)x(\tau, t)d\tau, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$x(\tau, 0) = \varphi(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (3)$$

де $x(\tau, t)$ – вікова густина популяції в момент часу t , τ – вік особин, $d(\tau, t)$, $b(\tau, t)$ – функції, що характеризують процеси виживання та народжування, $\varphi(\tau)$ – початковий розподіл.

Більш реалістичними є математичні моделі, які описують динаміку вікового складу з урахуванням конкуренції між особинами. В роботі [2] розглянуто випадок міжвікової конкуренції. В даній роботі розглядається випадок внутрішньовидової конкуренції. Для цього в системі (1)-(3) рівняння (1) замінюється на рівняння

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial t} = - \left[d(\tau, t) + \int_0^{\infty} a(\tau, s, t)x(s, t)ds \right] x. \quad (2)$$

Для популяційної задачі (2), (1₂), (1₃) доведена теорема про існування та єдність розв'язку.

Теорема. Нехай функції $d(\tau, t)$, $a(\tau, s, t)$, $b(\tau, t)$, $\varphi(\tau)$ неперервні при $0 \leq \tau < \infty$, $0 \leq s < \infty$, $t \geq 0$, невід'ємні в області визначення, $\varphi(\tau) \in L^1[0, \infty)$. Тоді популяційна задача (2), (1₂), (1₃) має єдиний неперервний разом з похідною вздовж напрямку $t = \text{трезв'язок}$.

Для лімітованих популяцій (популяцій, в яких конкуренції зазнають особини репродуктивного віку) у випадку стаціонарного середовища досліджено питання існування нетривіальних стаціонарних станів. Має місце теорема.

Теорема. Якщо функції d , a , b не залежать від часу, то популяційна задача при умові

$$\int_0^{\infty} b(\tau) e^{-\int_0^{\tau} d(\xi) d\xi} d\tau > 1$$

має єдиний нетривіальний стаціонарний розв'язок $\bar{x}(\tau)$, який є асимптотично стійким.

З популяційною моделлю проведено числові експерименти, результати яких узгоджуються з теоретичними дослідженнями.

Список використаних джерел:

1. Von Foerster H. Some remarks on changing populations / H. Von Foerster // *Kinetics of Cellular Proliferation*. – New York: Grune and Stratton, 1959. – P. 382–407.
2. Маценко В.Г. Об одном классе уравнений математической физики, возникающих в динамике биологических макросистем / В.Г. Маценко // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* – 1981. – № 1. – С. 69-79.

І. П. Мединський, С. Д. Івасишен

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів

ПРО ДЕЯКІ ВИРОДЖЕНІ ПАРАБОЛІЧНІ МОДЕЛІ

Виродженими параболічними моделями зазвичай називають математичні моделі, які описуються задачами для вироджених диференціальних рівнянь із частинними похідними параболічного типу. Виродження рівнянь, види задач для них і, отже, відповідні математичні моделі можуть бути різними.

У доповіді розглядаються математичні моделі у вигляді задачі Коші для різних узагальнень класичного рівняння дифузії з інерцією, до котрого 80 років тому назад прийшов А.М. Колмогоров, вивчаючи випадкові рухи фізичної системи. Це рівняння та його узагальнення є виродженими параболічними рівняннями, які належать до класу ультра параболічних рівнянь і які називаємо виродженими рівняннями типу Колмогорова (ВРК).

Для різноманітних застосувань дуже важливою є детальна інформація про фундаментальні розв'язки задачі Коші (ФРЗК) для ВРК, оскільки ФРЗК є густинами ймовірностей переходу випадкових процесів дифузійного типу, для яких розглянуті рівняння є рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова.

У доповіді робиться короткий огляд результатів, що стосуються побудови, властивостей і застосувань ФРЗК ВРК.

І. Ю. Михайлова

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПОЛІВ У ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСАХ БЕЗКОНТАКТНОЇ ЛАЗЕРНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

Лазерна безконтактна деформація – це зручна для використання технологія перетворення металевих листів у поверхні довільної форми, яка передбачає використання лазерного променя для створення на певних

ділянках поверхні виробу визначених за величиною, знаком та характером розподілу макронапружень. Однак такі особливості цього процесу, як високі градієнти результуючого температурного поля, локальність впливу лазерного випромінювання й висока швидкість протікання, ускладнюють проведення експериментальних досліджень і обумовлюють необхідність вдосконалення методів та засобів математичного моделювання, адаптованих для особливостей даної практичної задачі.

Для моделювання процесу лазерної деформації можна використати енергетичний підхід Волертсона [1]:

$$\theta = \frac{l}{b} \left(\alpha \Delta T - \frac{2\sigma_y}{E} \right),$$

де l – ширина нагрітої ділянки; b – висота деталі; α – коефіцієнт теплового розширення; ΔT – максимальна різниця між температурами на поверхні, на яку діє лазерний промінь, та протилежній до неї на одному рівні; σ_y – границя текучості; E – модуль Юнга.

Цей підхід дозволяє зв'язати кут згину та температурне поле, для моделювання якого використано нестационарне тривимірне квазілінійне рівняння теплопровідності [2]:

$$c(U)\rho(U) \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \lambda(U) \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda(U) \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda(U) \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial z},$$

де c – коефіцієнт теплоємності матеріалу; ρ – густина матеріалу; λ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу; $U(x, y, z, t)$ – температура зразка в точці (x, y, z) в момент часу t .

Вплив лазерного променя враховується у крайових умовах:

$$\lambda \frac{\partial U(x, y, 0, t)}{\partial z} + q(x, y, t) = 0, \quad \lambda \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial \bar{n}} + \alpha[U_c - U(x, y, z, t)] = 0,$$

де $q(x, y, t)$ – щільність потужності променя в точці (x, y) в момент часу t ; \bar{n} – нормаль до поверхні зразка; α – коефіцієнт тепловіддачі.

Для розв'язування рівняння теплопровідності використано метод скінчених різниць, для якого використовується адаптивний алгоритм побудови різницевої сітки [3], неявна схема метода балансу, а для розв'язування систем нелінійних алгебричних рівнянь – метод Ньютона та модифікований метод Гауса для систем з трьохдіагональними матрицями.

В результаті моделювання було отримано температурні поля та кут згину (рис. 1) для пластини зі сталі конструкційної 65Г. Геометричні розміри пластини: $L_x = 20 \text{ mm}$, $L_y = 20 \text{ mm}$, $L_z = 2 \text{ mm}$. Параметри лазера: $q = 25 \text{ Wt} / \text{mm}^2$, $r = 2 \text{ mm}$, швидкість – $10 \text{ mm} / \text{s}$.

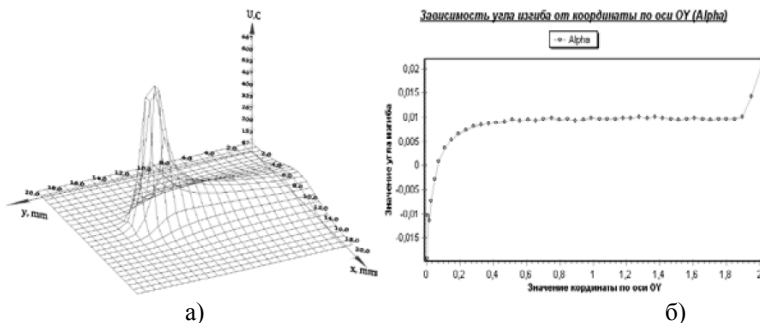


Рис. 1. Температурне поле при $t=1,42c$ (а) та кут згину (б)

Список використаних джерел:

1. Vollertsen F. Laser induced and laser assisted forming technologies / F. Vollertsen // Advanced Technology of Plasticity. – 2005. – ICTP '05. – P. 557-558.
2. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – [5-е изд.]. – М. : Наука, 1977. – 735 с.
3. Лукьяненко С.А. Адаптивные методы моделирования температурного поля при лазерном облучении пластины / С.А. Лукьяненко, И.Ю. Михайлова // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – №6/5 (66). – С. 12-16.

В. Мороз, П. Болкот, І. Снітков, К. Снітков

Національний університет «Львівська політехніка»,
СКБ електромеханічних систем, м. Львів

АНАЛІЗ РЕАЛІЗАЦІЇ ВИЗНАЧЕННЯ КУТА ПРИ ОБРОБЦІ СИГНАЛІВ З ІНДУКЦІЙНИХ ДАВАЧІВ КУТА

Індукційні електромеханічні перетворювачі до цього часу є одним з популярних елементів позиційних систем керування внаслідок доволі простої конструкції, невибагливості до зовнішніх умов і невисокої вартості порівняно з оптичними давачами. Подальше підвищення точності таких давачів можливе лише шляхом застосування математичних методів обробки їх сигналів, оскільки резерв підвищення точності механічного виготовлення практично вичерпано. Розв'язати цю задачу можливо з переходом до цифрових систем вимірювання.

Пряме вимірювання фази сигналу, що поступає з індукційного давача кута можливе лише з невисокою точністю:

- високий рівень «зашумленості» сигналу з обмоток давача значно знижує точність правильного визначення переходу сигналу через нуль і, отже, його фази, внаслідок «розмивання» моменту переходу через нуль;
- для типової частоти збудження давача 1 кГц і необхідної точності 10 кут. сек. швидкість реакції системи повинна складати менше 5 нс, що технічно складно реалізувати.

Запропоновано аналіз та уточнення алгоритмів знаходження кута в системах обробки даних з індукційних електромеханічних перетворювачів кутовимірювальних систем. Спосіб обробки базується на аналітичній залежності

$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2 + 1} dt$, яка реалізована числовим інтегруванням.

В. Мороз, М. Сольський

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

ВПЛИВ МЕТОДІВ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕДАТНИХ ФУНКЦІЙ НА РЕАЛІЗАЦІЮ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ З ОБМЕЖЕНОЮ РОЗРЯДНІСТЮ

У зв'язку зі всебічним впровадженням цифрових систем керування в електромеханіці важливим є дослідження всіх впливів, що можуть спричинити їх некоректну роботу. Однією з малодосліджених проблем у таких системах є вплив на їх поведінку обмеженої розрядності апаратної частини.

Загальноприйнятою є думка, що у випадку зменшення кроку дискретизації система теоретично мала б наблизитися за своєю поведінкою до неперервного прототипу. Проте, наявність у системі обмеженої розрядності при заданні коефіцієнтів дискретної передатної функції призводить до інших, неочікуваних наслідків – зменшення періоду дискретизації викликає відхилення у поведінці отриманої цифрової системи порівняно з неперервним прототипом.

Пояснення цього явища наступне – поліноми з кратними чи близькими коренями є дуже чутливими до похибок у заданні коефіцієнтів. Зменшення кроку дискретизації призводить до переміщення всіх нулів і полюсів дискретної передатної функції до одиниці – тобто, всі корені поліномів чисельника і знаменника стають дуже близькими, внаслідок чого поліноми стають погано обумовленими і, як результат, чутливими до точності задання коефіцієнтів.

Тому важливим є здійснення аналізу впливу методів представлення дискретних передатних функцій на реалізацію цифрових систем керування з обмеженою розрядністю. Показано, що у цифрових системах з обмеженою розрядністю існує мінімальний крок дискретизації, для якого виконується умова стійкості дискретної системи.

Незважаючи на вищезазначені рекомендації, проблема впливу обмеженої розрядності даних, яка значною мірою впливає на синтез і практичну реалізацію цифрових систем, не вирішена та потребує подальших досліджень з точки зору як теорії синтезу цифрових систем, так і з точки зору прикладної математики.

Л. В. Мосенцова

Физико-технологический институт металлов и сплавов НАН Украины, г. Киев

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИНТЕРПРЕТАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Интегральные модели в задачах интерпретации результатов наблюдений. Интегральные уравнения первого рода в весьма общей форме, естественно и эффективно описывают широкий класс экспериментально наблюдаемых явлений. В частности, интегральное уравнение первого рода является основой интегрального метода решения задачи интерпретации наблюдений, связанной с повышением разрешающей способности средств наблюдений, которые содержат неидеальные измерительные элементы. Компьютерная интерпретация определяется как вычислительный процесс восстановления экспериментальных зависимостей, реализующий методы регуляризации, отличающийся повышенной сложностью математической обработки данных и осуществляемый поэтому с помощью вычислительных средств в рамках автоматизированной системы обработки результатов наблюдений.

Метод модельных экспериментов. Эффективность интерпретации экспериментальных зависимостей с применением методов регуляризации Тихонова и Лаврентьева зависит от уровня шумов в правой части решаемого интегрального уравнения. Это обусловлено необходимостью регулярирования устойчивости решения путем увеличения параметра α и соответствующим снижением точности решения. Определение значения параметра регуляризации α в методах Тихонова и Лаврентьева представляет собой наиболее сложный и ответственный этап реализации этих методов. Существуют различные способы определения значения параметра регуляризации α . В различных по эффективности способах используются различные виды дополнительной априорной информации. Для последующей обработки большого количества сходных правых частей эффективным способом выбора оптимального значения α является метод модельных экспериментов учитывающий, наряду с α , регуляризирующее влияние дискретизации аргументов интегрального уравнения.

Применение метода модельных экспериментов связано с построением модельных примеров. Тремя основными (взаимно независимыми) компонентами модельного примера являются: 1) ядро интегрального уравнения, соответствующее аппаратной функции системы наблюдения; 2) точное решение, основные смысловые элементы которого выбираются на основании имеющейся априорной информации максимально близкими к ожидаемым на практике; 3) шумы в экспериментальной правой части интегрального уравнения. Четвертой (вторичной по способу получения) компонентой является имитация экспериментальной правой части интегрального уравнения.

Представляется целесообразной следующая методика компьютерного моделирования при разработке интерпретирующей системы на основе метода модельных экспериментов:

- 1) определение компонент модельного примера;
- 2) алгоритмизация методов интерпретации;
- 3) алгоритмизация; воспроизведения модельных функций;
- 4) выбор начальных значений параметров методов;
- 5) программирование задачи;
- 6) компьютерное моделирование и оптимизация параметров;
- 7) разработка структуры и алгоритмов системы инверсной обработки;
- 8) расчет и выдача оптимизированных значений параметров инверсной обработки данных.

Заключение. Рассмотрен ряд особенностей процессов обработки экспериментальных данных в задачах интерпретации результатов наблюдений. Предложена методика моделирования процессов и систем компьютерной интерпретации экспериментальных зависимостей, включающая реализацию метода модельных экспериментов в моделирующих алгоритмах и структурах.

Список использованной литературы:

1. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К. : Наук. думка, 1986. – 544 с.
2. Мосенцова Л.В. Реализация метода моделирования для решения уравнений Фредгольма I рода в системе MATLAB / Л.В. Мосенцова // Сб. тезисов конф. «Интегральные уравнения». – К. : Изд-во ИПМЭ, 2009. – С. 110-112.

М. О. Мясковська

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕКТРОННИХ ТАБЛИЦЬ MS EXCEL ДЛЯ СТАТИСТИЧНОЇ ОБРОБКИ ДАНИХ ПЕДАГОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Педагогічне дослідження – спеціально організований науковий процес пізнання педагогічного середовища, педагогічних явищ, фактів, суб'єктів та об'єктів педагогічної взаємодії в умовах діяльності, а також зв'язків і відносин між ними. Також, прикладні дослідження спрямовані на поглиблене вивчення окремих аспектів педагогічного процесу, розкриття закономірностей різнобічної педагогічної практики у групах [1].

Методи педагогічного дослідження можна розділити на три групи: методи вивчення педагогічного досвіду, методи теоретичного дослідження і математичні методи [1].

Математичні й статистичні методи в педагогіці застосовують для опрацювання отриманих відомостей методами опитування та експерименту, а також для встановлення кількісних залежностей між явищами, що досліджуються. Вони допомагають оцінити результати експерименту, підвищують надійність висновків, дають підстави для теоретичних висновків, який є одним з класичних критеріїв.

За альтернативною ознакою оцінювали значущість розбіжностей у двох розподілах (то χ^2 бто за відсотком студентів, що отримали певну оцінку на екзамені). У дослідженні важливим є ступінь розбіжності між емпіричними та теоретичними частотами отримання оцінок.

Успішність студентів аналізували за результатами семестрових оцінок з молекулярної фізики до впровадження нових методичних елементів у навчання. Статистична обробка даних педагогічних досліджень опрацьовувались за допомогою програми Microsoft Excel.

Використання прикладних програм для аналізу результатів педагогічних експериментів є доцільним. Багато статистичних критеріїв реалізовані в професійних статистичних пакетах, проте, ці програми є ліцензійними, досить складними і вимагають значних тимчасових витрат для опрацювання. А табличний процесор Microsoft Excel є зручним у використанні, встановлений практично на будь-якому персональному комп'ютері, містить інструменти статистичного аналізу.

Використання електронних таблиць Microsoft Excel дає можливість автоматизувати процес статистичної обробки даних педагогічних досліджень.

Список використаних джерел:

1. Ортинський В.Л. Педагогіка вищої школи : навч. посіб. [для студ. вищ. навч. закл.] / В.Л. Ортинський. – К. : Центр учбової літератури, 2009. – 472 с. – Режим доступу: http://pidruchniki.ws/15290527/pedagogika/metodika_metodi_pedagogichnogo_doslidzhennya.

О. А. Наконечная

Восточноевропейский университет экономики и менеджмента,
г. Черкассы

КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ДАТЧИКОВ СИГНАЛОВ АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ

Комплекс прикладных программ для реализации моделей датчиков сигналов акустической эмиссии (АЭ), методов их идентификации и моделей, обеспечивающих решение задачи восстановления исходных сигналов датчиков (рис. 1) построен на основе модульного принципа в соответствии с которым программы разбиваются на несколько подпрограмм и функций, допускающих их дальнейшее развитие и коррекцию.

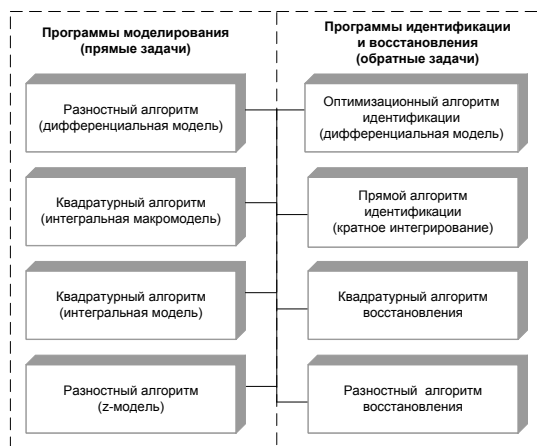


Рис. 1. Программы моделирования и идентификации датчиков, восстановления сигналов

В качестве инструментальной среды для разработки комплекса программ выбран математический пакет MATLAB [1], современный уровень развития которого дает возможность эффективной реализации всех видов вычислительных алгоритмов, предложенных в работе.

В частности, в комплекс программ, реализующих предложенные квадратурные и разностные алгоритмы для решения задачи моделирования динамики датчиков по интегральной макромодели (оператор свертки), интегральной модели в виде уравнения Вольтерра и по разностной z-модели [2-4]. Кроме того, для моделирования датчиков по традиционной дифференциальной модели используется стандартное средство системы Matlab. Программная часть, относится к обратным задачам идентификации и восстановления, тоже имеет в своем составе программы, разработанные (реализуют интегральный метод идентификации, квадратурный и разностный алгоритмы восстановления), а также оптимизационные программы идентификации, которые входят в состав Matlab.

Комплекс обеспечивает решение задач анализа динамики датчиков по заданным математическим моделям или схемам замещения, а также задач получения таких моделей по экспериментальным данным. Кроме того, при наличии моделей различного вида обеспечивается решение задачи восстановления входных сигналов датчиков с оценкой качества соответствующих алгоритмов и их обоснованным выбором для конкретных измерительных каналов систем контроля.

Проведенные вычислительные эксперименты с помощью комплекса программ свидетельствуют об эффективности компьютерного исследования и выбора датчиков по требованиям к системам контроля, которые проектируются и разрабатываются. Решение задачи идентификации обеспечивает определение характеристик датчиков, сопровождающие эти изделия при

комплектовани приборной части измерительных каналов систем контроля. Решение задачи восстановления сигналов обеспечивает создание программ динамической коррекции измерительных каналов. При этом в зависимости от свойств датчиков или трактов прохождения сигналов акустической эмиссии точность измерения может быть повышена в среднем на 3-14 %, что существенно влияет на качество зарегистрированного сигнала.

Список использованной литературы:

1. Іглін С.П. Теорія ймовірностей та математична статистика на базі MATLAB : навч. посіб. / С.П. Іглін. – Харків : НТУ «ХП», 2006. – 612 с.
2. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : справочное пособие / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К. : Наукова думка, 1986. – 544 с.
3. Уидроу Б. Адаптивная обработка сигналов / Б. Уидроу, С.Д. Стирнз. – М. : Радио и связь, 1989. – 376 с.
4. Оппенгейм А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер. – 2-е изд., испр. – М. : Техносфера, 2007. – 856 с.

О. С. Овсак

Головна астрономічна обсерваторія НАН України, м. Київ

МОДЕРНІЗАЦІЯ МЕТОДУ АНАЛІЗУ ВЕРТИКАЛЬНОЇ СТРУКТУРИ ХМАРОВОГО ШАРУ АТМОСФЕРИ ПЛАНЕТИ-ГІГАНТА

Розроблено комплекс програм для визначення характеру зміни з глибиною в атмосфері планети-гіганта аерозольної розсіювальної складової ефективної оптичної глибини формування поля дифузно відбитого нею світла. Аналіз виконується за даними вимірювань альbedo диска або відбивної здатності окремої ділянки планети-гіганта у спектральних смугах поглинання атмосферних газів. Комплекс складається з наступних структурних блоків: розрахунок по теорії Мі коефіцієнтів x_i розкладу індикатриси розсіювання в ряд за поліномами Лежандра та об'ємного коефіцієнта розсіювання σ_0 полідисперсного середовища з заданими показником заломлення і функцією розподілу частинок за розмірами; формування інтерполяційного масиву пар модельних значень альbedo однократного розсіювання ω і геометричного альbedo $A_g \text{ mod}$, або відбивної здатності $\rho \text{ mod}$ для півнескінченного однорідного частково поглинаючого середовища, індикатриси розсіювання якого розрахована в попередньому блоці; визначення значень альbedo однократного розсіювання ω , що відповідають спостережним величинам геометричного альbedo A_g чи відбивної здатності ρ , шляхом їх порівняння з розрахованими у попередньому блоці величинами $A_g \text{ mod}$ чи $\rho \text{ mod}$ для кожної спектральної точки вимірювань (при цьому точно враховуються зміни індикатриси розсіювання з глибиною в атмосфері через молекулярне розсіювання); розрахунок спектральних значень ефективної оптичної глибини $\tau_{eff}(\lambda)$; знаходження за даними про ω й $\tau_{eff}(\lambda)$ розсіюва-

льної $\tau_{\text{eff}}^s(\lambda)$ і поглинальної $\tau_{\text{eff}}^v(\lambda)$ складових $\tau_{\text{eff}}(\lambda)$; визначення за величиною $\tau_{\text{eff}}^v(\lambda)$ кількості поглинального газу NL (в км–амагат) на промені зору, а по ній – значення атмосферного тиску $P(NL)$ і газової складової розсіювальної частини оптичної глибини $\tau_g(\lambda, NL)$ на відповідному рівні атмосфери; знаходження аерозольної розсіювальної складової $\tau_a(\lambda)$ за даними про $\tau_{\text{eff}}^s(\lambda)$ і $\tau_g(\lambda, NL)$; побудова графічної залежності від тиску P значень $\tau_a(\lambda)$ та відношення значень величин $\tau_a(\lambda)/\tau_g(\lambda, NL)$ й виконання їх аналізу. Комплекс програм апробовано при аналізі даних спектрофотометричних вимірювань інтегрального диска Юпітера в діапазоні довжин хвиль 600 – 1000 нм у контурах смуг поглинання метану. Результати розрахунків підтвердили припущення про шаруватість верхньої частини атмосфери й показали, що хмаровий шар, відповідальний за формування поля дифузно відбитого Юпітером світла, сконцентрований на верхніх рівнях атмосфери з тиском до 10 бар. За даними вимірювань A_g Юпітера у 1993 році у верхній частині його атмосфери виявлені три аерозольні шари кінцевої оптичної товщини.

В. І. Панчук

Інститут інформаційно-комп'ютерних технологій МАУП, м. Київ

КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ ЗМИВУ ГРУНТУ З ВИКОРИСТАННЯМ ТЕОРІЇ ПРИМЕЖОВОГО ШАРУ

Для усунення ерозійних процесів, що відбуваються на схилівій поверхні ґрунту під дією інтенсивних дощових потоків, на практиці влаштовують систему канавок, перпендикулярних основному потоку, з метою відводу за межі земельних ділянок зайвої води, зменшення сили потоку [1].

Як і в більшості досліджень, природний процес стікання дощових вод по схилу розглядається як рух суцільного шару води по деякій похилій поверхні, що є, таким чином, певним модельним наближенням до реального процесу [2].

Візуальні спостереження показують, що на поверхні ґрунту, обмеженій двома сусідніми паралельно розміщеними на певній відстані канавками, перпендикулярно орієнтованими щодо напрямку максимального стікання, може існувати стаціонарний режим течії, при якому товщина шару рідини не наростатиме з часом, якщо тільки при відомій інтенсивності опадів відстань між канавками не перевищуватиме деякого відомого для кута нахилу значення.

З огляду малої товщини шару дощового потоку для його опису використовуються рівняння стаціонарного осередненого турбулентного руху по похилій площині типу рівнянь примежового шару [3].

При постановці задачі припускається, що дощові краплі при своєму попаданні наскрізь пронизують потік. Це дозволяє наближено вважати коефіцієнт ефективної в'язкості рідини постійним поперек течії, однак змінним за величиною при зміні швидкості падання крапель, їх розмірів і частоти пульсацій. Можливі випадки, коли кінетична енергія краплі здатна викликати розпушення ґрунту, частинки якого далі попадають у потік і, збільшуючи його ефективну в'язкість, зносяться течією донизу. При цьому інтенсивність змиву ґрунту може виявитися більшою, ніж обчислена за формулою Мірцхулави [4, 5]. Це викликає необхідність подальшого проведення натурних досліджень. Не слід також забувати, що різні типи ґрунтів неоднаково реагують на ударну дію крапель, в одних випадках ґрунти ущільнюються, зменшуючи шорсткість поверхні підстилання, а інших – розпушуються [6].

Говорити про доцільність застосування водовідвідних канавок можна лише для тих земельних ділянок, в межах яких проходять часті та затяжні дощі з великою інтенсивністю, оскільки значний змив ґрунту може відбуватися в початковій області течії між сусідніми канавками, де мала глибина потоку, а також у самих канавках, де розвивається струмкова ерозія

Наведена методика досліджень дозволяє проводити розрахунки у широкому діапазоні зміни кутів нахилу, відстаней між водовідвідними канавками, коефіцієнтів фільтрації, інтенсивності опадів тощо. Проведені числові експерименти, результати яких ілюструються графіками залежностей між характерними геометричними та фізичними величинами досліджуваної течії.

Список використаних джерел:

1. Швєбс Г.И. Теоретические основы эрозиоведения / Г.И. Швєбс. – К. ; Одесса : Вища школа, 1981. – 221 с.
2. Волкович В.Л. Математическое прогнозирование смыва почвы дождевыми осадками / В.Л. Волкович, Г.А. Чечко, В.И. Панчук // Проблемы управления и информатики. – 1995. – N 5. – С. 125-134.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М. : Наука, 1971. – 711 с.
4. Мирцхулава Ц.Е. Основы физики и механики эрозии русел / Ц.Е. Мирцхулава. – Л. : Гидрометеиздат, 1988. – 303 с.
5. Мирцхулава Ц.Е. Инженерные методы расчета и прогноза водной эрозии / Ц.Е. Мирцхулава. – М. : Колос. – 1970. – 240с.
6. Киркиби М.Дж. Эрозия почвы / М.Дж. Киркиби. – М. : Колос, 1984. – 234 с.

Г. С. Пасічник, С. Д. Івасишен

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів

**ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ
УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ СОНІНА
ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ**

Нехай n_1, n_2 і n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_1 \geq n_2 \geq n_3$;
 $n := n_1 + n_2 + n_3$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних
 $x_l := (x_{l1}, \dots, x_{ln_l})$, $l \in \{1, 2, 3\}$. Розглядається рівняння

$$\left(\partial_t - \sum_{j,k=1}^{n_1} a_{jk} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1k}} - b \sum_{j=1}^{n_1} x_{1j} \partial_{x_{1j}} - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}} \right) u(t, x) =$$
$$= 0, t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

в якому a_{jk} , b – дійсні сталі, причому $a_{jk} = a_{kj}$, $\{j, k\} \subset \{1, \dots, n_1\}$, і виконується умова

$$\exists \delta > 0 \forall \sigma_1 := (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} : \sum_{j,k=1}^{n_1} a_{jk} \sigma_{1j} \sigma_{1k} \geq \delta |\sigma_1|^2.$$

Такого типу рівняння є рівнянням Фоккера-Планка-Колмогорова відповідного виродженого випадкового процесу дифузійного типу. Рівняння (1) є узагальненням рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова та рівняння І. М. Соніна.

Для рівняння (1) знайдено в явному вигляді фундаментальний розв'язок задачі Коші та досліджено його властивості.

И. А. Пасичниченко

Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт», г. Киев

**ПРИНЦИП ГАРАНТИРОВАННОГО РЕЗУЛЬТАТА В ЗАДАЧАХ
ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ МАССОВЫХ ИСПЫТАНИЙ**

Проблема неопределенности в теории принятия решений состоит в отыскании исходных принципов упорядочивания альтернатив в той или иной ситуации. На современном этапе развития этой науки, начиная с работ фон Неймана, Моргенштерна и Севиджа [1; 2], в подходах к решению проблемы неопределенности преобладает аксиоматический метод. Для класса задач принятия решений, последствия которых зависят от результатов массовых случайных испытаний с закономерностями произвольного характера, Иваненко и Лабковским [3, с.59-68] была выдвинута аксиоматическая модель принятия решений, основанная на принципе гарантированного результата. Тем самым ими было предложено решение проблемы неопределенности в данном классе задач.

Пусть Θ и U – произвольные непустые множества, Σ – σ -алгебра подмножеств Θ , $L: \Theta \times U \rightarrow R$ – ограниченная действительная функция, $L(\cdot, u)$ измеримы для любого $u \in U$. Будем интерпретировать Θ как множество возможных значений ненаблюдаемого параметра (или множество «состояний природы»), U – множество возможных решений (или действий), L – функция потерь. Пусть множество $\{L(\cdot, u) | u \in U\}$ содержит все функции с конечным множеством значений и замкнуто относительно линейных операций. На множестве возможных исходов $C = \{((\theta_1, u_1), \dots, (\theta_n, u_n)) | \theta_i \in \Theta, u_i \in U, i = \overline{1, n}, n \in N\}$ задано отношение предпочтения \prec . Также отношение предпочтения \prec^* задано на множестве наборов решений $\{(u_1, \dots, u_n) | u_i \in U, i = \overline{1, n}, n \in N\}$ с функцией потерь $L^*: U \rightarrow R$.

Условие **Y0** (статистические предпочтения). Функция потерь L согласована с отношением предпочтения \prec следующим образом: для любых двух элементов из C

$$((\theta_1, u_1), \dots, (\theta_n, u_n)) \prec ((\theta_1, u_1), \dots, (\theta_m, u_m)) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n L(\theta_i, u_i) \geq \sum_{j=1}^m L(\theta_j, u_j)$$

Аналогично согласованы L^* и \prec^* . Вследствие Y0 L и L^* полностью характеризуют отношения предпочтения.

Y1 (монотонность). Для любых $u_1, u_2 \in U$ если $L(\theta, u_1) \leq L(\theta, u_2)$ для любого $\theta \in \Theta$, то $L^*(u_1) \leq L^*(u_2)$.

Y2. Для любых $u_1, u_2 \in U$, $a, b \in R$, $a \geq 0$ если $L(\theta, u_1) \# (\theta, u_2) +$ для любого $\theta \in \Theta$, то $L^*(u_1) = a L^*(u_2) + b$.

Y3 (принцип гарантированного результата). Для любых $u_1, u_2, u_3 \in U$ если

$$L(\theta, u_1) + L(\theta, u_2) = 2L(\theta, u_3) \text{ для любого } \theta \quad (1)$$

то $L^*(u_1) + L^*(u_2) \geq 2L^*(u_3)$.

Последнее неравенство означает, что лучше дважды выбрать u_3 , чем один раз u_1 , а другой раз u_2 . Условие Y3 мотивированно следующим соображением. Для любых $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ согласно (1) имеем

$$\begin{aligned} & [L(\theta_1, u_1) + L(\theta_2, u_2)] - [L(\theta_1, u_3) + L(\theta_2, u_3)] = \\ & = -([L(\theta_2, u_1) + L(\theta_1, u_2)] - [L(\theta_2, u_3) + L(\theta_1, u_3)]) \end{aligned}$$

Другими словами, если при (θ_1, θ_2) решение (u_3, u_3) по сравнению с (u_1, u_2) приносит «выигрыш» v , то при (θ_2, θ_1) этот «выигрыш» будет $-v$. Далее приводим результат из [3, с.63].

Теорема 1. Функции L и L^* удовлетворяют условия У1-У3 тогда и только тогда, когда $L^*(u) = \max_{p \in P} \int_{\Theta} L(\theta, u) dp$, где P – некоторое замкнутое в

*–слабой топологии множество конечно–аддитивных вероятностей на Θ .

Условие У0 нужно для интерпретации У1-У3 и теоремы 1. Однако, аддитивность представления предпочтений, которая там постулируется, есть достаточно сильным требованием. Например, если исходами являются денежные суммы $x < y$ и n интерпретируется как время, то вполне естественными кажутся предпочтения $(x, y) \prec (y, x)$, где \prec – асимметрическая часть \preceq . Тем не менее, они несовместимы с У0.

Нами была рассмотрена задача ослабления У0 с сохранением результата теоремы 1. Обобщение У0 до У0' дает возможность рассматривать предпочтения с дисконтированными потерями. Далее необходимо соответственно модифицировать У3.

У0' (взвешенные аддитивные предпочтения). Функция потерь L согласована с отношением предпочтения \preceq следующим образом: существуют такие $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lambda_n \in R$, $\lambda_n > 0$ при всех $n \in N$, что для любых двух элементов из C

$$((\theta_1, u_1), \dots, (\theta_n, u_n)) \preceq ((\theta_1, u_1), \dots, (\theta_m, u_m)) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i L(\theta_i, u_i) \geq \sum_{j=1}^m \lambda_j L(\theta_j, u_j)$$

Аналогично согласованы L^* и \preceq^* с $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ вместо $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$.

У3'. Для любых $u_1, u_2, u_3 \in U$ если $\lambda_1 L(\theta, u_1) + \lambda_2 L(\theta, u_2) = (\lambda_1 + \lambda_2) L(\theta, u_3)$ для любого $\theta \in \Theta$ то $\gamma_1 L^*(u_1) + \gamma_2 L^*(u_2) \geq (\gamma_1 + \gamma_2) L^*(u_3)$.

Интерпретация У3' аналогична У3.

Теорема 2. Функции L и $L^*(u_1) > L^*(\bar{u}_2)$ удовлетворяют условия У1, У2 и У3' тогда и только тогда, когда $L^*(u) = \max_{p \in P} \int_{\Theta} L(\theta, u) dp$, где P –

некоторое замкнутое в *–слабой топологии множество конечно–аддитивных вероятностей на Θ .

Другой рассмотренный вопрос: какое дополнительное условие гарантирует счётную аддитивность всех вероятностей из P ?

У4 (непрерывность). Для любых таких $u_1, u_2 \in U$, что $L^*(u_1) > L^*(u_2)$, для любого $x \in R$ и любой такой последовательности

$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, що $E_n \in \Sigma$ при всіх $n \in N$, $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$ і $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$, існує $n^* \in N$, для якого $L^*(\underline{u}_1) > L^*(\underline{u}_2)$ і $L^*(\underline{u}_1) > L^*(\bar{u}_2)$, где \underline{u}_1 і \bar{u}_2 – любые решения, для которых

$$L(\theta, \underline{u}_1) = \begin{cases} x, & \text{если } \theta \in E_{n^*} \\ L(\theta, \underline{u}_1), & \text{если } \theta \in \bar{E}_{n^*} \end{cases} \text{ и } L(\theta, \bar{u}_2) = \begin{cases} x, & \text{если } \theta \in E_{n^*} \\ L(\theta, \bar{u}_2), & \text{если } \theta \in \bar{E}_{n^*} \end{cases}.$$

Аналогичное условие использовалось Эрроу [4] и Шатаневым и др. [5] для похожих целей в других моделях принятия решений.

Теорема 3. Если функции L и L^* в добавок к У1-У3 (или У1, У2 и У3') удовлетворяют У4, то все вероятности в P счётно-аддитивны.

Список использованной литературы:

1. Neumann J. Theory of games and economic behavior / J. von Neumann, O. Morgenstern. – 3 ed. – Princeton, NJ : Princeton Univ. Press, 1953. – 674 p.
2. Savage L.J. The foundations of statistics / L.J. Savage – New York : Wiley & Sons, 1954. – 294 p.
3. Иваненко В.И. Проблема неопределенности в задачах принятия решений : монография / В.И. Иваненко, В.А. Лабковский – К. : Наукова думка, 1990. – 136 с.
4. Arrow K. Essays in the theory of risk-bearing / K. Arrow – Chicago : Markham Pub. Co., 1971. – 278 p.
5. Chateauneuf A. Monotone continuous multiple priors / A. Chateauneuf, F. Maccheroni, M. Marinacci, J.-M. Tallon // Economic Theory. – 2005. – Т. 26. – p. 973-982.

А. О. Пашко

Київський національний університет культури і мистецтв, м. Київ

МОДЕЛЮВАННЯ ГАУССОВИХ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З НЕПЕРЕРВНИМ СПЕКТРОМ

У роботі продовжуються дослідження алгоритмів побудови субгауссових моделей для гауссових стаціонарних випадкових процесів [1]. При доведенні теорем, що використовують властивість аналітичності кореляційної функції, використано результати роботи [2]. Дослідження моделей, що використовують спектральні зображення випадкових процесів, та оцінки точності і надійності в різних функціональних просторах, представлені в [3].

Нехай $\xi(t)$ – дійсний гауссовий випадковий стаціонарний процес з $E\xi(t) = 0$, $R(\tau)$ – кореляційна функція $\xi(t)$, $F(\lambda)$ – спектральна функція процесу $\xi(t)$, $R(\tau) = \int_0^{\infty} \cos(\lambda\tau) dF(\lambda)$. Будемо вважати, що $F(0) = 0$, $R(0) = F(\infty) = 1$. Випадковий процес має зображення $\xi(t) = \int_0^{\infty} \cos(\lambda t) d\xi_1(\lambda) + \int_0^{\infty} \sin(\lambda t) d\xi_2(\lambda)$, де $\xi_1(t)$ та $\xi_2(t)$ центровані некор-

льовані випадкові процеси з некорельованими приростами такі, що для $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2$ має місце

$$E(\xi_1(\lambda_2) - \xi_1(\lambda_1))^2 = E(\xi_2(\lambda_2) - \xi_2(\lambda_1))^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1).$$

Нехай D_Λ – деяке розбиття інтервалу $[0, \Lambda]$, $D_\Lambda : 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = \Lambda$. Модель випадкового процесу $\xi(t)$ будемо будувати у вигляді

$$S_n(t, \Lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} [\cos(\lambda_i t) (\xi_1(\lambda_{i+1}) - \xi_1(\lambda_i)) + \sin(\lambda_i t) (\xi_2(\lambda_{i+1}) - \xi_2(\lambda_i))].$$

Модель процесу $\xi(t)$ можна отримати, змодельовавши суму $\sum_{i=0}^{n-1} [\cos(\lambda_i t) \eta_{1i} + \sin(\lambda_i t) \eta_{2i}]$, де $\{\eta_{1i}, \eta_{2i}\}$ – некорельовані центровані гауссові випадкові величини з $E(\eta_{1i})^2 = E(\eta_{2i})^2 = F(\lambda_{i+1}) - F(\lambda_i)$. Враховуючи точність роботи з дійсними числами та похибки алгоритмів побудови гауссових випадкових величин будемо вважати, що $\{\eta_{1i}, \eta_{2i}\}$ – послідовності некорельованих строго субгауссових випадкових величин.

Нехай $\xi(t)$ та всі $S_n(t, \Lambda)$ належать деякому функціональному банаховому простору $A(T)$ з нормою $\|\cdot\|$. Нехай задано два числа $\delta > 0$ та $0 < \alpha < 1$. Модель $S_n(t, \Lambda)$ наближає процес $\xi(t)$ з надійністю $1 - \alpha$ та точністю δ у нормі простору $A(T)$, якщо має місце нерівність $P\{\|\xi(t) - S_n(t, \Lambda)\| > \delta\} \leq \alpha$.

При побудові моделей гауссових випадкових процесів з заданими точністю і надійністю в різних функціональних просторах необхідно оцінювати приріст $F(\infty) - F(\Lambda)$, де $\Lambda > 0$. Якщо спектральна функція відома, то це не викликає ускладнень. Інша ситуація, коли відома лише кореляційна функція, а спектральну функцію неможливо знайти у явному вигляді.

Теорема 1. Модель $S_n(t, \Lambda)$ наближає процес $\xi(t)$ з надійністю $1 - \alpha$ та точністю δ у нормі простору $L_2(T)$, якщо для чисел Λ та n

виконуються нерівності $B_{n,\Lambda} < \delta^2$ та $\exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{\sqrt{B_{n,\Lambda}}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B_{n,\Lambda}}\right\}$, де у

випадку рівномірного розбиття відрізка $[0, \Lambda]$ –

$$B_{n,\Lambda} = \frac{T^3 \Lambda^2}{3n^2} F(\Lambda) + T(F(\infty) - F(\Lambda)).$$

Теорема 2. Нехай кореляційна функція $R(\tau)$ стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$ аналітична в деякому околі нуля та існують такі

числа $H > 0$ та $m > 0$, що при всіх $k \geq 1$ має місце оцінка $|R^{(2k)}(0)| \leq (Hk)^{mk}$, тоді при $h > (He)^{\frac{m}{2}}$ виконується нерівність

$$1 - F(h) \leq \exp \left\{ -\frac{\frac{2}{h^m m}}{2He} \right\}.$$

У роботі розглядаються приклади моделювання випадкових процесів у випадках, коли спектральна функція обчислюється явно, наприклад, $R(\tau) = \exp\{-C|\tau|\}$, або $R(\tau) = \exp\{-C|\tau|^2\}$; та коли спектральна функція явно не обчислюється, наприклад, $R(\tau) = A \exp\{-C|\tau|^\gamma\} \cos(\beta\tau)$, де $A > 0$, $C > 0$, $\beta > 0$ та $1 < \gamma \leq 2$.

В якості функціональних просторів розглядаються простори $L_2(T)$, $L_p(T)$ та деякі простори Орліча.

Список використаних джерел:

1. Козаченко Ю.В. Моделирование гауссовских стационарных случайных процессов, представимых в виде стохастических интегралов / Ю.В. Козаченко, А.А. Пашко // Теория и приложения статистического моделирования. – Новосибирск, 1988. – С. 10-24.
2. Козаченко Ю.В. Про моделювання гауссових стаціонарних процесів з абсолютно неперервним спектром / Ю.В. Козаченко, Л.Ф. Козаченко // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1992. – Т. 47. – С. 47-54.
3. Козаченко Ю.В. Моделювання випадкових процесів / Ю.В. Козаченко, А.О. Пашко. – К. : Київський університет, 1999. – 223 с.

А. С. Перцов

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЗАДАЧІ ГАРАНТОВАНОГО ОЦІНЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДО ДЕЯКОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

У роботі досліджується постановка проблеми гарантованого оцінювання розв'язків крайових задач Неймана для рівнянь лінійної теорії пружності в умовах невизначеності (див. [1]). Такі розв'язки визначені з точністю до функцій, що є розв'язками відповідних однорідних задач, і існують лише тоді, коли праві частини рівнянь, які входять до постановки цих крайових задач, задовольняють певним умовам сумісності (див. [2]).

Розглядаються системи, які описуються такими крайовими задачами, при квадратичних обмеженнях на невідомі детерміновані дані цих

задач, які задовольняють умовам сумісності, а також на другі моменти шумів в спостереженнях. Проблема знаходження мінімакських оцінок значень лінійних неперервних функціоналів від невідомих розв'язків цих крайових задач (тобто оцінок, на яких досягається мінімум максимальної середньоквадратичної похибки оцінювання, розрахованих на «найгірші реалізації збурень») зведена до розв'язання задачі оптимального керування деякою системою, що описується варіаційною крайовою задачею спеціального вигляду, з квадратичним критерієм якості.

Отримані результати можуть бути використані при розробці методів знаходження гарантованих оцінок станів систем, що описуються диференціальними рівняннями, розв'язки яких не є єдиними і існують лише тоді, коли виконуються певні умови сумісності.

Список використаних джерел:

1. Наконечний О.Г. Минимаксное оценивание решения краевой задачи для уравнений линейной теории упругости с граничными условиями типа Неймана / О.Г. Наконечний, Ю.К. Подлипенко, А.С. Перцов //Доповіді НАН України. – 2010. – №2. –С. 43 – 50.
2. Toselli A. Domain Decomposition Methods – Algorithms and Theory / A. Toselli, O. Widlund. – Berlin, Heidelberg, New-York : Springer, 1972. – 450 p.

Т. М. Пилипюк

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ СПРЯЖЕННЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Розглядається задача про структуру обмеженого на множині

$$D_2 = \{(t, r) : t > 0; r \in I_2 = (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R); R < +\infty\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - a_1^2 B_{\alpha_1}^* [u_1(t, r)] + \gamma_1^2 u_1(t, r) &= f_1(t, r), \quad r \in (0, R_1), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - a_2^2 F [u_2(t, r)] + \gamma_2^2 u_2(t, r) &= f_2(t, r), \quad r \in (R_1, R_2), \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} - a_3^2 B_{\nu, \alpha_2} [u_3(t, r)] + \gamma_3^2 u_3(t, r) &= f_3(t, r), \quad r \in (R_2, R) \end{aligned} \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u_j(t, r) \Big|_{t=0} = g_j(r); \quad r \in (R_{j-1}, R_j); \quad j = \overline{1, 3}; \quad R_0 \equiv 0; \quad R_3 \equiv R, \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^k u_1(t, r)}{\partial r^k} = 0; \quad k = 0, 1, \quad L_{22}^3 [u_3(t, r)] \Big|_{r=R} = g_R(t) \quad (3)$$

та умовами спряження

$$\left(L_{j1}^k [u_k(t, r)] - L_{j2}^k [u_{k+1}(t, r)] \right) \Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t); \quad j, k = 1, 2, \quad (4)$$

де

$$B_{\alpha_1}^* = r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (2\alpha_1 + 1)r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha_1^2 - \text{оператор Ейлера,}$$

$$F = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \text{оператор Фур'є,}$$

$$B_{\nu, \alpha_2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\alpha_2 + 1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu^2 - \alpha_2^2}{r^2} - \text{оператор Бесселя,}$$

$$L_{jk}^m = \left(\alpha_{jk}^m + \delta_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jk}^m + \gamma_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t}; \quad j, k = 1, 2; \quad m = \overline{1, 3}.$$

Інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку мішаної параболическої задачі спряження (1)-(4) одержано методом гібридного інтегрального перетворення типу Ейлера-Фур'є-Бесселя зі спектральним параметром.

Я. В. Підвальна

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

КОМП'ЮТЕРНІ АЛГОРИТМИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ШВИДКОДІЇ

При розв'язуванні задач прикладної математики часто доводиться реалізовувати чисельні алгоритми комп'ютерними засобами на основі побудованого програмного коду. У зв'язку з цим часто доводиться підвищувати практичну адекватність теоретично обґрунтованих чисельних алгоритмів за допомогою проведення чисельних експериментів. У даній роботі розглядається задача швидкодії для заданої керованої системи, яка описує механічний рух поїзда із визначеною кількістю нежорстко з'єднаних між собою вагонів заданої маси. Поїзд рухається по криволінійній траєкторії під дією сил тяги, сил взаємодії та різних додаткових сил збурення із заданих допустимих множин. За допомогою методів побудови допустимих термінальних множин з використанням принципу максимуму будуються оптимальні за швидкодією керування. Зокрема, розглядаються різні варіанти траєкторій руху задля досягнення заданого термінального стану за мінімальний інтервал часу.

В середовищі Matlab розроблено комплекс програмного забезпечення для побудови оптимального за швидкодією керування, а також розглянуто проблеми, з якими доводиться стикатися під час реалізації алгоритму розв'язання задачі швидкодії комп'ютерним способом. Зокрема, знайдені достатні умови, за яких задача розв'язується з урахуванням похибок комп'ютерних обчислень.

В. С. Попович*,
І. І. Ракоча**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача, м. Львів,

**Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ДВОШАРОВОЇ ТЕРМОЧУТЛИВОЇ ПЛАСТИНИ ЗА СКЛАДНОГО НАГРІВУ

Для реалізації сучасних високих вимог інженерної практики до розрахунку температурних полів і викликаних ними напружень в багатошарових елементах конструкцій, які працюють в умовах високотемпературного нагрівання, використовують модель термочутливого тіла, тобто враховують залежність теплових та механічних характеристик шарів від температури [1, 2]. При цьому важливо також врахувати реальні умови їх нагрівання та взаємодії з навколишнім середовищем.

Формулювання задачі. Розглядається термочутлива пластина, яка складається із двох різних за товщиною шарів, виготовлених із різних матеріалів. На одній із обмежуючих поверхонь заданий потік тепла q_0 , а через іншу відбувається конвективним теплообмін з навколишнім середовищем сталої температури t_c . В площині контакту шарів продукують тепло рівномірно розподілені джерела. Залежності коефіцієнтів теплопровідності шарів пластини задані в діапазоні температур $[t_p, t_k]$. Необхідно визначити розподіл температури в такій кусково-однорідній пластині та спричинений цим розподілом термопружний стан.

Математична модель для визначення розподілу температури. За означених умов нагрівання в пластині буде наявний одновимірний розподіл температури, а безрозмірна математична модель для її визначення матиме вигляд

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda_i^{(i)*}(T_i) \frac{dT_i}{dx} \right) = 0, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad i=1,2, \quad (1)$$

$$\lambda_1^{(1)*}(T_1) \frac{dT_1}{dx} \Big|_{x=x_1} = -Ki_0, \quad \left[\lambda_1^{(2)*}(T_2) \frac{dT_2}{dx} + Bi(T_2 - T_c) \right] \Big|_{x=x_2} = 0, \quad (2)$$

$$T_1 \Big|_{x=x_2} = T_2 \Big|_{x=x_2}, \quad \lambda_1^{(1)}(T_1) \frac{dT_1}{dx} \Big|_{x=x_2} = K_\lambda^{(2)} \lambda_1^{(2)*}(T_2) \frac{dT_2}{dx} \Big|_{x=x_2} + Ki_1, \quad (3)$$

де $x = \hat{x}/l_0$ – безрозмірна координата, а l_0 – вибраний нами характерний розмір, $T_i = t_i/t_k$, $T_c = t_c/t_k$, $T_p = t_p/t_k$ – безрозмірні температури, а t_k – вибране за відлікове, максимальне значення температури з діапазону задання температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності шарів,

$$Ki_0 = \frac{q_0 l_0}{t_k \lambda_0^{(1)}}, \quad Ki_1 = \frac{q_1 l_0}{t_k \lambda_0^{(1)}}, \quad Bi = \alpha l_0 / \lambda_0^{(2)}, \quad K_\lambda^{(2)} = \lambda_0^{(2)} / \lambda_0^{(1)}, \quad \alpha - \text{коєфіцієнт}$$

теплообміну через поверхню $\hat{x} = \hat{x}_3$. При безрозмірній задачі температурні залежності коєфіцієнтів теплопровідності шарів від температури подані у вигляді

$$\lambda_\tau^{(i)}(t_i) = \lambda_{\tau_0}^{(i)} \lambda_\tau^{(i)*}(T_i) = \lambda_{\tau_0}^{(i)} \left(1 + k_i (T_i - T_p)\right). \quad (4)$$

Тут k_i – задані сталі, $\lambda_{\tau_0}^{(i)} = \lambda_\tau^{(i)}(t_p)$ – опорні значення коєфіцієнтів теплопровідності.

Побудова розв’язку задачі теплопровідності. Нелінійну задачу (1)-(3) частково лінеаризуємо за допомогою введення змінних Кірхгофа

$$\theta_i = \int_{T_p}^{T_i} \lambda_*^{(i)}(T_i) dT_i. \quad (5)$$

В результаті отримаємо задачу

$$\frac{d^2 \theta_i}{dx^2} = 0, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

$$\left. \frac{d\theta_1}{dx} \right|_{x=x_1} = -Ki_0, \quad \left[\frac{d\theta_2}{dx} + Bi(T_2(\theta_2) - T_c) \right]_{x=x_3} = 0, \quad (7)$$

$$T_1(\theta_1) \Big|_{x=x_2} = T_2(\theta_2) \Big|_{x=x_2}, \quad \left. \frac{d\theta_1}{dx} \right|_{x=x_2} = K_\lambda^{(2)} \left. \frac{d\theta_2}{dx} \right|_{x=x_2} + Ki_1. \quad (8)$$

Задача (6)-(8) залишається нелінійною через лінійні вирази температур $T_i(\theta_i)$ на поверхнях $x = x_1$ та $x = x_3$, які за задання $\lambda_*^{(i)}(T_i)$ (4) мають вигляд

$$T_i(\theta_i) = \frac{1}{k_i} \left(\sqrt{1 + 2k_i \theta_i} - 1 \right) + T_p, \quad (9)$$

При побудові розв’язку задачі (6)-(8) замість першої умови (8) використали рівносильну їй умову [3]

$$(\theta_2 - \theta_1) \Big|_{x=x_2} = \frac{k_2 - k_1}{2} (T_1(\theta_1) - T_p)^2 \Big|_{x=x_2}$$

та алгоритм знаходження сталих інтегрування [3]. Аналітично знайдено вираз змінних Кірхгофа θ_i , а через них за формулами (9) шукані розподіли температури.

Визначення температурних напружень. Спричинені знайденим нерівномірним розподілом температури напруження в припущенні залежності від температури модуля Юнга, коєфіцієнта Пуассона та температурного коєфіцієнта лінійного розширення знайдено за формулами [1].

Висновки.

1. Побудовано і знайдено аналітичний розв’язок нелінійної математичної моделі розподілу температури в двохшаровій термочутливій пластині з

нагрівальним елементом між шарами, коли на обмежувчій поверхні першого шару задано потік тепла, а на безмежній поверхні другого шару пластина конвективно обмінюється теплом з середовищем сталої температури.

2. Визначено температурні напруження, спричинені знайденим нерівномірним розподілом температури.

3. Досліджено вплив термочутливості матеріалів шарів на характер та рівень розподілу температури та напружень.

Список використаних джерел:

1. Кушнір Р.М. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних термочутливих тіл / Р.М. Кушнір, В.С. Попович. – Львів : Сполом, 2009. – Т.3. Термопружність термочутливих тіл. – 412 с.
2. Noda N. Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties: Thermal Stresses I / R.B. Hetnarski (ed.). – 1986. – P. 391-483.
3. Кушнір Р.М. Про визначення усталеного термопружного стану багатошарових структур за високотемпературного нагрівання / Р.М. Кушнір, В.С. Попович // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2013. – С. 42-47.

О. В. Прищепа

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

ПРО ОДНУ СИСТЕМУ З ОБМЕЖЕННЯМИ НА ЧИСЛО СПРОБ ПОЧАТИ ОБСЛУГОВУВАННЯ

Особливе місце серед стохастичних систем масового обслуговування займають системи з повторними викликами. Сфера застосувань таких систем є досить широка. Зокрема, це комп'ютерні мережі (локальні та глобальні), системи керування посадкою повітряних суден, системи мобільного зв'язку та інші. Зазвичай при дослідженні систем з повторними викликами вважають, що кожна з вимог може повторно звертатися до системи до тих пір, поки не отримає обслуговування. Хоча на практиці число повторних спроб часто буває обмеженим.

В роботі, що пропонується, розглядається задача керування багатоканальною системою масового обслуговування з двома спробами повтору. Формально дану систему можна описати наступним чином. Ззовні до системи, що має s приладів, через випадкові проміжки часу, надходять вимоги, які обслуговуються у випадку наявності хоча б одного вільного приладу та залишають систему. Якщо всі прилади зайняті, то вимоги формують джерело повторних викликів, звідки мають можливість здійснити повторні звернення для отримання обслуговування. Для кожної вимоги, що утворила джерело повторних викликів, число повторів обмежується двома спробами. Якщо при другій повторній спробі всі прилади є зайняті, то вимога залишає систему без обслуговування. Інтенсивність надходження вимог залежить від сумарної кількості джерел повторних викликів у черзі.

Процес обслуговування в такій системі моделюється тривимірним ланцюгом Маркова з неперервним часом $Q(t) = (Q_0(t), Q_1(t), Q_2(t)) \in S$, де $S = \{0, 1, \dots, \} \times Z_+ \times Z_+$, $Q_0(t)$ – кількість зайнятих приладів, $Q_1(t)$ – кіль-

кість вимог, що можуть зробити першу спробу повтору, $Q_2(t)$ – кількість вимог, що можуть зробити другу спробу повтору.

Враховуючи змінний характер інтенсивності вхідного потоку в поданій моделі, пропонується порогова стратегія керування, яка задається порогом H . У цьому випадку система може функціонувати у двох режимах. Якщо сумарна кількість джерел повторних викликів в системі не перевищує H , то вона функціонує в першому режимі з інтенсивністю вхідного потоку h_1 . Якщо сумарна кількість джерел повторних викликів стає більшою за H , то система переходить в другий режим з інтенсивністю вхідного потоку h_2 .

Розглядається оптимізаційна задача

$$C_1 S_1(H) - C_2 S_2(H) - C_3 S_3(H) \rightarrow \max, \quad (1)$$
$$H \in \{0, 1, \dots\},$$

де $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} S_i(t, H) = S_i(H)$, $i = \overline{1, 3}$; $S_1(t, H)$ – число викликів, обслуговування яких завершено в системі за час t ; $S_2(t, H)$ – число викликів, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами; $S_3(t, H)$ – число перемикачів інтенсивності вхідного потоку; C_1 – прибуток, пов'язаний з обслуговуванням одного виклику; C_2 – штраф за відмову в обслуговуванні; C_3 – штраф за перемикання інтенсивності вхідного потоку.

В умовах існування стаціонарного режиму функціонали $S_i(H)$, $i = 1, 2, 3$ теж існують і можуть бути виписані через стаціонарні ймовірності.

Розв'язком задачі (1) є такий поріг H , який максимізує середній прибуток від роботи системи. Для цього розроблено ефективний алгоритм розрахунку стаціонарних ймовірностей.

Подібні оптимізаційні задачі для систем з повторними викликами розглядалися в роботах [1, 2].

Список використаних джерел:

1. Дудин А.Н. Оптимизация динамического управления входной нагрузкой в узле информационно-вычислительной сети / А.Н. Дудин, В.И. Клименок // Автоматика и вычислительная техника. – 1991. – № 2. – С. 25-31.
2. Клименок В.И. Оптимизация динамического управления режимом работы информационно-вычислительных систем с повторными вызовами / В.И. Клименок // Автоматика и вычислительная техника. – 1990. – № 1. – С. 25-30.

В. В. Родіна

Державна екологічна академія післядипломної освіти та управління

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ МІГРАЦІЇ НЕБЕЗПЕЧНИХ ПОЛЮТАНТІВ В ЕКОСИСТЕМАХ НА БАЗІ КАМЕРНОЇ МОДЕЛІ ЗАСОБАМИ ГІС

Природні та техногенні катаклізми, які мають місце в Україні, – повені в Карпатах, віддалені наслідки аварії на Чорнобильській АЕС, реальність проєктних та позапроєктних аварій при застосуванні небезпечних технологій, масоване хімічне та радіонуклідне забруднення значних територій тощо – виводять на перший план проблему оцінки і прогнозу цих явищ. У зв'язку з цим, необхідно обґрунтувати та розробити систему методів моніторингу міграції поллютантів в екосистемах, що дозволить приймати оперативні рішення щодо безпеки природних об'єктів та людей і рекомендувати ефективні профілактичні та терапевтичні контрзаходи із захисту біоти та населення, які використовує ці екосистемами для виробництва, проживання й рекреації.

Для нашого дослідження були обрані типові екосистеми Зеленої зони м. Києва, що склалися з ряду камер: камера-ліс, камера-узлісся, камера-лука, камера-тераса, камера-заплава, камера-вода, камера-біота, камера-донні відкладення, камера-людина. Для моделювання було важливо вибрати таку екосистему, яка включає всі основні прототиби елементів екосистеми. Взаємодія між камерами задається за допомогою коефіцієнтів переходу радіонуклідів із однієї камери в іншу за одиницю часу (частка радіонуклідів в одній камері, яка переходить до іншої камери за рік). Дані коефіцієнти обчислені за натуральними дослідженнями та залежать від крутизни схилу, характеру покриття (ліс, трава і т.д.), типу ґрунту (чорнозем, дерново-підзолистий, сірий-лісовий), об'єму стоку, температури повітря та ін.

Розрахунки цих коефіцієнтів базуються на реальних фондових та власних даних про швидкості розподілу та перерозподілу радіонуклідів у екосистемах. Цей підхід утворює спеціальний метод розрахунку параметрів. Перенесення радіонуклідів з однієї камери описуються системою звичайних диференціальних рівнянь. Дослідження з моделювання проводилися при середніх швидкостях міграції радіонуклідів з поправкою на розпад для всіх камер, крім камери людина. Змінні в системі рівнянь визначають динамічні питомі активності радіонуклідів у камерах.

Для камери-ліс характерний плавний викид радіонуклідів вниз по схилу. Для інших камер характерне поступове накопичення радіонуклідів з досяганням певних пікових значень та наступний спад – асимптотичне наближення до нуля. Для камери-людина крива характеризує поступове накопичення колективної дози.

Екосистема, що існує у відносно незмінному вигляді достатньо довгий час, мають здатність протистояти збурюючим факторам, які у величезній кількості постачає зовнішнє середовище (в тому числі і людина). Цю здатність екологічної системи зазвичай називають стійкістю. Отже, головним критерієм стійкості природної системи є здатність протистояти техногенному впливу і зберігати нормальне функціонування, а також

здатність до регенерації після припинення техногенної дії і повернення від порушеного до нормального стану: тобто спроможність екосистеми після збудження повертатись у вихідний стан.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -0,06x(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = 0,03x(t) - 0,13y(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} = 0,1y(t) - 0,18z(t), \\ \frac{dk(t)}{dt} = 0,15z(t) - 0,63k(t), \\ \frac{dl(t)}{dt} = 0,2k(t) - 0,33l(t), \\ \frac{dn(t)}{dt} = 0,3l(t) + 0,05o(t) + 0,07p(t) - 1,23n(t), \\ \frac{do(t)}{dt} = 0,5n(t) - 0,13o(t), \\ \frac{dp(t)}{dt} = 0,05o(t) + 0,6n(t) - 0,1p(t), \\ \frac{dm(t)}{dt} = 0,4k(t) + 0,1n(t) + 0,03m(t). \end{cases}$$

Для розробленої математичної моделі розповсюдження радіоактивного забруднення Cs^{137} в екосистемах схилів проведено аналіз стійкості цієї моделі. Для зручності дослідження розмірність кожного з коефіцієнтів матриці $\frac{1}{1 \text{ рік}}$ перетворимо у розмірність $\frac{1}{10 \text{ років}}$. За будовою матриці A' серед власних чисел будуть $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = a_{22}, \dots, \lambda_5 = a_{55}$. Решту власних чисел знаходимо з рівняння $\text{Det}=0$.

$$A' = \begin{pmatrix} -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & -1,3 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1,8 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,5 & -6,3 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3,3 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & | & -12,3 & 0,5 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 5 & -1,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 6 & 0,5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -0,6; \lambda_2 = -1,3; \lambda_3 = -1,8; \lambda_4 = -6,3; \lambda_5 = -3,3.$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a_{66} - \lambda & a_{67} & a_{68} \\ a_{76} & a_{77} - \lambda & 0 \\ a_{86} & a_{87} & a_{88} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

$$a_1 = \begin{vmatrix} a_{77} & 0 \\ a_{87} & a_{88} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{66} & a_{68} \\ a_{86} & a_{88} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{66} & a_{67} \\ a_{76} & a_{77} \end{vmatrix}$$

$$a_2 = -(a_{66} + a_{77} + a_{88})$$

$$a_3 = 1$$

$$\lambda_6 = -12,86, \quad \lambda_7 = -1,39, \quad \lambda_8 = -0,35.$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

$$a_0 > 0, \quad a_2 > 0$$

У розгорнутому вигляді наведений визначник є характеристичним многочленом третього степеня

$$P(\lambda) = a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

з такими коефіцієнтами

$$a_3 = 1, \quad a_2 = -(a_{66} + a_{77} + a_{88}),$$

$$a_1 = \begin{vmatrix} a_{77} & 0 \\ a_{87} & a_{88} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{66} & a_{68} \\ a_{86} & a_{88} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{66} & a_{67} \\ a_{76} & a_{77} \end{vmatrix}, \quad a_0 = - \begin{vmatrix} a_{66} & a_{67} & a_{68} \\ a_{76} & a_{77} & 0 \\ a_{86} & a_{87} & a_{88} \end{vmatrix}.$$

$$\lambda_6 = -12,86, \quad \lambda_7 = -1,39, \quad \lambda_8 = -0,35.$$

Характеристичний многочлен даної матриці має тільки від'ємні дійсні корені. Це свідчить про стійкість нульового розв'язку системи щодо відношення до збурення початкових умов (стійкість за Ляпуновим) і асимптотичну стійкість системи.

Система з додатними параметрами буде асимптотично стійкою, згідно теореми Гурвіца, тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти многочлена $P(\lambda)$ задовольняють наступним нерівностям:

$$a_0 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

всі нерівності справджуються і система (2.3) асимптотично стійка для довільних додатних параметрів.

Характер асимптотичного наближення розв'язків $y_i(t)$ до нуля залежить від значення найбільшого від'ємного характеристичного кореня (показника експоненти) λ_{\max} . Модуль цього значення є запасом стійкості. У розглянутому прикладі $\lambda_{\max} = \lambda_8 \approx -0,35$. Отже, запас стійкості дорівнює 0,35.

Використовуючи технічні можливості програмного продукту ArcGIS нами була розроблена модельно-аналітична ГІС, яка дозволяє здійснювати

просторовий аналіз та прогноз міграції полютантів в реальних екосистемах. Математичною основою даної ГС є представлена математична модель. Основними інформаційними складовими даної моделі є задані властивості полютантів, а також характеристики середовища. Аналіз цих характеристик дозволяє нам вийти на ключові блоки моделі – показники швидкостей внесення і винесення полютантів в екосистемах-камерах.

В результаті проведення ряду просторово-математичних розрахунків з початковими інформаційними шарами, ми одержуємо набір необхідних растрово-індексних аналітичних карт з показниками швидкостей внесення, винесення і акумуляції полютантів для кожного з пікселів, які, маючи задану розмірність, є елементарними просторовими одиницями місцевості. Використовуючи інструмент «Растровий калькулятор» з арсеналу модуля ArcGIS Spatial Analyst, ми, згідно прийнятої математичної моделі, задаємо послідовність математичних операцій, які здійснюватимуться над індексними показниками аналітичних карт, а також вводимо шари з даними по забрудненню і кількість циклів розрахунків, які імітують часовий проміжок. В результаті цих обчислень ми одержуємо нові індексні растрові шари, на яких зображені показники забруднення території досліджень через заданий проміжок часу

О. Б. Розумовська

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ІНТЕРАКТИВНІ МЕТОДИ НАВЧАННЯ В ПРАКТИЦІ ВИЩОЇ ШКОЛИ

Постановка проблеми. Сьогодення як України так і інших країн світу диктує нові вимоги до працівника, що виходить на ринок праці. Сучасний спеціаліст – кваліфікована, конкурентоспроможна людина, яка здатна проявляти ініціативу, швидко адаптуватися до нових умов виробництва, захищена та мобільна на ринку праці. Окрім професійних якостей, робітник повинен творчо мислити, діяти в нестандартних ситуаціях, працювати в колективі заради спільного результату, володіти якостями висококультурної людини толерантної до думок та поглядів інших людей. Традиційні методи навчання неспроможні в повній мірі забезпечити розвиток сьогоденішнього студента до такого рівня. Розвиток вищої освіти має йти у напрямку ефективного поєднання як традиційних так і інтерактивних методів навчання, що дасть змогу формувати конкурентоздатного фахівця.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблема вивчення закономірностей використання педагогічних технологій та модернізації інструментальної частини (методи, методики, техніки, форми, прийоми тощо) професійної підготовки на рівні вищої освіти знайшла своє відбиття у публікаціях таких дослідників, як Дж. Рассел, А.А. Вербицький, С.С. Кашлев,

М.Ю.Олешков, О.В.Безпалько, О.М.Пехота, А.В.Хуторський, Є.С.Полат, В.В.Гузєв. та ін.

Результати їх досліджень дають право стверджувати, що вдале поєднання традиційних та інноваційних форм роботи підвищує рівень творчості при вирішенні професійних задач та надає можливість студентів навчитися швидко реагувати на зміни в виробничій сфері. Але реалізація такого поєднання має особливості для кожної навчальної дисципліни.

Мета нашої роботи полягає в відборі інтерактивних методів навчання, які найбільш ефективні для застосування при вивченні інформатики студентами фізико-математичного факультету.

Виклад основного матеріалу. Сучасний етап розвитку людської цивілізації характеризується існуванням значної кількості джерел інформації, а також і неймовірно величезними обсягами цієї інформації. Тому часто в студентів виникає певний бар'єр через неможливість досягнути таких потоків інформації. Багато з них знаходять для себе виправдання в тому, що якщо цього неможливо зробити, то для чого і розпочинати.

На цьому етапі і виникає особлива роль викладача як наставника, першочерговим завданням якого є мотивація студентів до навчання та саморозвитку, а також формування віри студентів у свої можливості. Досить частими в практиці вищої школи є випадки, коли науково-педагогічні працівники з перших занять виставляють досить високу планку в подачі матеріалу та вимог до його сприйняття. І в частини студентів з'являється певний комплекс неповноцінності, оскільки на даному етапі вони не можуть досягнути отриману порцію матеріалу. Попередити виникнення подібних ситуацій можна саме в процесі інтерактивного навчання, як навчання через взаємодію, заглиблену в процес спілкування. При реалізації такого підходу студенти усвідомлюють, що рівень їх розвитку та можливості удосконалення нічим не поступаються перед рівнем інших студентів, що є окремі питання, в яких вони більш обізнані ніж однокурсники чи навіть викладач, і що вони можуть на певному етапі стати джерелом знань для інших.

Організація навчального процесу у вищій школі переважно використовує чотири форми роботи – лекція, семінарське або практичне заняття, лабораторне заняття та самостійна робота. Враховуючи особливості інформатики як дисципліни, в навчальних та робочих програмах передбачено найбільше часу для проведення лабораторних занять та самостійної роботи. Лекційні курси з інформатики досить короткі і тому особливо важливо ефективно використати цей час. Сучасна лекція має підготувати, зорієнтувати та спрямувати студента до роботи на групових заняттях. Це означає, що лекція має видозмінюватись і орієнтуватись не стільки підготовку студента через забезпечення повного масиву інформації для обговорення, а націлюватись на особисту роботу над опрацюванням навчального матеріалу.

У вузівській практиці інтерактивні лекції реалізуються через проблемні лекції; лекції-візуалізації; лекції-діалог. Кожна із різновидів вимагає від викладача дуже ретельної підготовки. Створення проблемних ситуацій та під-

римка діалогу з аудиторією потребує чіткого уявлення про попередній досвід студентів, який може бути використаний при вивченні нового матеріалу. Коли формулюється навідне запитання чи спрямовується русло діалогу, важливо розуміти, що відповіді студентів можуть бути і неочікуваними. Тому викладач має бути готовим до спрямування думок в визначеному напрямку та попередження формування хибних висновків з обговорення. Варто також достатньо наповнювати теоретичний матеріал конкретними ситуаціями і практичними задачами. З одного боку, це мотивація для отримання знань, з іншого – практична значущість того, що вивчаємо.

Розглянемо один із варіантів структурної організації лекції на тему «Циклічні структури в алгоритмах та програмуванні». Вступну частину цієї може бути побудована на попередньому досвіді студентів та знаннях, отриманих раніше. Пропонуємо студентам навести приклади циклічних процесів, які оточують нас в повсякденному житті, і проаналізувати, чи можемо ми описати ці процеси алгоритмічно, враховуючи всі властивості алгоритмів. Після діалогу з студентами в якості підсумку можна наголосити на тому, що більшість природних циклічних процесів є нескінченними, а будь-який алгоритм має бути скінченним. В іншому випадку ми спровокуємо зациклення. Продовжити виклад матеріалу можна з розгляду такої задачі:

Дека сума грошей покладена вкладником на рахунок в банк. При цьому в кінці кожного року здійснюється нарахування відсотків у розмірі $p\%$. Скласти алгоритм та програму, який визначає суму, що буде на рахунку через n років, якщо з рахунком вкладник не здійснював жодних операцій.

Частині студентів пропонуємо здійснити розрахунки з використанням формули складних відсотків, а другій частині – з використанням простих відсотків та повторних обчислень для всього періоду (значення для вхідних величин беремо довільні, але однакові для обох груп). Порівняння результатів роботи дасть змогу оцінити раціональність кожного алгоритму та переконатися в тому, що одна і та ж задача може мати різні способи розв'язання і при правильній реалізації отримані результати будуть абсолютно однакові. Далі звернемося до алгоритму щорічних нарахувань протягом всього періоду. Студенти чітко можуть визначити, що виконувалися абсолютно однакові дії, тільки аргументи цих дій змінювалися. Таким способом ми підвели їх до поняття циклу і можливостей удосконалити алгоритми за рахунок використання циклічних структур.

Наступним етапом такої лекції є стислий та концентрований виклад синтаксису різних циклічних структур з врахуванням особливостей конкретної мови програмування. Далі повертаємося до задачі, що розглядалася і пропонуємо варіанти запису алгоритмів з використанням усіх різновидів циклів та відповідні програми мовою програмування. Як підсумок такої лекції, формулюємо умови, за яких один різновид циклу може замінюватися іншим.

В плані удосконалення навчального процесу у вищій школі на практичних заняттях пропонуємо використовувати групові інтерактивні методи. При застосуванні цих методів неможлива неучасть студента у ко-

лективному взаємодоповнюючому, заснованому на взаємодії всіх його учасників процесі навчального пізнання. Від діяльності кожного студента залежить якість виконання поставленого перед групою завдання.

На практичних заняттях більш теоретичного характеру пропонуємо використовувати інтерактивні ігри «Чотири кути», «5 із 25», дидактичні ігри та метод проектів. Якщо тема заняття носить практичний характер, то пропонуємо роботу парами та в групах з подальшим загальним обговоренням отриманих результатів.

Лабораторні заняття дають змогу ще й індивідуалізувати процес. На початку таких занять обов'язково проводимо експрес-опитування (найчастіше в письмовій формі). Після закінчення цього етапу обов'язково обговорюємо разом з усіма студентами відповіді на запитання, що звучали в варіантах експрес-опитування. В процесі такого обговорення є можливість наголосити на певних моментах, що можуть виникнути під час виконання лабораторної роботи. Далі кожен студент отримує власне варіант завдання і після його виконання звітує. В процесі роботи дозволяємо студентам організувати загальні дискусії про особливості того чи іншого алгоритму.

Великої популярності набувають сьогодні також так звані сайт-курси. Вони структурно можуть мати декілька частин. Найбільш вагомою частиною є електронна версія конспектів лекцій (опорних конспектів), методичних рекомендацій до практичних та лабораторних робіт, завдання для самостійної роботи, зразки модульних контрольних робіт та зразки їх виконання. Студент в зручний для нього час та з будь-якого робочого місця може працювати з систематизованим матеріалом. З точки зору інтерактивності цікавим розділом сайту може бути та частина, яка дає можливість студентів спілкуватися із викладачем. Це може бути діалогове спілкування on-line у визначений для кожного студента час, де він може поставити запитання і отримати відповідь. Також на сайті може бути передбачений форум для студентів, і тоді у спілкуванні беруть участь кілька студентів і викладач.

Висновок. Власний досвід та вивчення досвіду інших педагогів дає можливість з впевненістю констатувати той факт, що зважене поєднання традиційних та інтерактивних методів навчання у вищій школі значно підвищує ефективність навчального процесу. А в подальшій перспективі готує студента до трудової діяльності, яка у найближчому майбутньому повинна стати для людини основним джерелом існування та засобом особистісної самореалізації.

Список використаних джерел:

1. Інтернет-обучение: технологии педагогического дизайна / М.В. Моисеева, Е.С. Полат, М.Ю. Бухаркина, М.И. Нежурина ; под ред. М.В. Моисеевой. – М. : Издательский дом «Камерон», 2004. – 216 с.
2. Інтерактивні методи навчання у підготовці спеціалістів для банківської системи України : зб. наук. праць. – Суми ; Харків, 2001. – 250 с.
3. Освітні технології / за ред. О.М. Пехоти. – К., 2002. – 255 с.

4. Кашлев С.С. Современные технологии педагогического процесса : пособие для педагогов / С.С. Кашлев. – Минск : Университетское, 2000. – 95 с.
5. Олешков М.Ю. Современные образовательные технологии : учебное пособие / М.Ю. Олешков. – Нижний Тагил : НТГСПА, 2011. – 144 с.

К. Г. Романчук

Інститут телекомунікацій і глобального
інформаційного простору НАН України, м. Київ

МОДЕЛЮВАННЯ НЕТИПОВИХ СЦЕНАРІЇВ АВАРІЙ НА ГІДРОЕНЕРГЕТИЧНИХ ОБ'ЄКТАХ ВНАСЛІДОК ВІДМОВ АВТОМАТИКИ

За останнє десятиліття в світі на гідроенергетичних об'єктах сталися дві серйозні аварії, які можна назвати нетиповими, оскільки, в минулому, подібні аварії ще не траплялися. Перебіг цих аварій супроводжувався відмовами автоматичних засобів контролю та регулювання, оснащених сучасною комп'ютерною технікою. Одна з таких аварій відбулася 14 грудня 2005 р. в США (штат Міссурі) на ГАЕС Таум Саук (Taum Sauk), де внаслідок збою в комп'ютерній програмі системи автоматичного регулювання рівня води в верховому басейні [1] сталося його переповнення та перелив води через гребінь дамби огороження. Інша аварія сталася 17 серпня 2009 р. в Росії (Хакасія) на Саяно-Шушенській ГЕС в результаті руйнування гідроагрегату. Аварія розвинулася до катастрофічних масштабів через відмову автоматики, що не спрацювала в режимі перекриття напірних трактів аварійно-ремонтними затворами [2]. В обох випадках аварії носили складний системний характер із залученням в механізми виникнення й розвитку аварій автоматичних засобів забезпечення надійності й безпеки об'єктів гідроенергетики.

З метою встановлення ролі автоматичних засобів контролю та регулювання в перебігу аварій на ГАЕС Таум Саук (2005 р.) і на Саяно-Шушенській ГЕС (2009 р.) проведено імовірнісне моделювання гіпотетичних сценаріїв розвитку аварій, отримано залежності для оцінки їх ймовірностей з врахуванням відмов систем автоматики та здійснено чисельні розрахунки ймовірностей аварій при різних значеннях ймовірностей відмов автоматичних пристроїв.

Список використаних джерел:

1. Taum Sauk Pumped Storage Project. Incident Description. FERC Staff Report, April 28, 2006. – Режим доступу <http://www.ferc.gov/industries/hydropower/safety/projects/taum-sauk/staff-rpt.asp>.
2. Иванов В.Н. Уроки аварии, произошедшей 17 августа 2009 г. на Саяно-Шушенской ГЭС / В.Н. Иванов // Гідроенергетика України, 2010. № 4. – С. 48-50.

В. М. Романюк

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМИ LMS ПРИ ОРГАНІЗАЦІЇ ПРОЦЕСУ НАВЧАННЯ СТУДЕНТІВ У ВНЗ

Успішне впровадження електронного навчання базується на вдалому виборі програмного забезпечення, яке відповідає вимогам, цілям та поставленим задачам вищого навчального закладу. Система управління навчанням (Learning Management Systems – LMS) з точки зору студента повинна надавати персональну можливість для максимального сприйняття матеріалу по навчальній дисципліні; з точки зору викладача або ж автора навчального курсу – необхідні інструменти для формування навчальних програм, їх виконання, формування журналів про результативність навчання та формування зв'язку між викладачем та студентом. Доцільно визначити можливості LMS при формуванні навчального процесу у вищому навчальному закладі.

Можливість підтримки змішаного навчання є одним із основних елементів навчання у ВНЗ, а саме поєднання аудиторного навчання із віртуальним. LMS має синхронізуватися із єдиною базою користувачів закладу. Обов'язково повинна надаватися можливість реєстрації користувачі, надання їм прав різного рівня доступу. Система має надавати можливість створювати звіти по успішності, як персонально по студенту так і по групах, факультетах та в цілому навчальному закладі. До основних елементів належить також, створення розкладу; підтримка стандартів, а саме SCORM, AICC; можливість створення тестування та захист системи.

За допомогою даного програмного продукту можна сформувати архітектуру електронного навчання: базову платформу, з якою інтегруються управлінські бази даних, специфічні сервіси та навчальні матеріали (вебінари, інтерактивні лабораторії) і т.п. Виходячи з цього, з'являються вимоги відкритості, масштабування, стабільності, розширюваності, документуваності і стійкості розвитку базової платформи.

У дослідженні використовували систему управління навчанням MOODLE (Modular Objects-Oriented Dynamic Learning Environment) бази Кам'янець-Подільського національного університету. Цей програмний продукт використовується ВНЗ у багатьох країнах світу. MOODLE розповсюджується у вільному використанні, що надає можливість редагувати код системи, відповідно до потреб навчального закладу.

Система LMS MOODLE надає широкі можливості для комунікації, підтримує обмін файлами між студентом та викладачем або автором курсу, студентом та студентом. Серед зручних сервісів автоматичне розсилання листів, які містять в собі інформацію про поточні зміни курсів доступ до яких мають користувачі. Важливою особливістю MOODLE є те, що система створює і зберігає портфоліо кожного студента: всі здані ним роботи, оцінки і коментарі викладача до робіт, повідомлення у форумі. Викладач або автор курсів може переглядати всі оцінені ним роботи, всі оцінки і коментарі які користувач створив, всі повідомлення у форумі.

Викладач може створювати і використовувати в рамках курсу будь-яку систему оцінювання. MOODLE дозволяє надавати часове обмеження в доступі до навчального курсу студентам та аналізувати їх активність. При створенні навчального курсу дана система дозволяє працювати із: Advance Mindmap, SCORM пакетом, базами даних, вікі, глосарієм, створювати інтерактивні завдання, зовнішніми ресурсами, оцінюванням результату, семінарами, тестами, уроками, форумами та чатами.

Отже, поняття електронного навчання досить широке, але насамперед це нова модель навчального процесу. З точки зору ІТ-технологій це інфраструктура, що забезпечує базові та додаткові сервіси: аутентифікація та авторизація користувачів, розподіл повноважень між користувачами, платформа для викладення матеріалів, підтримуюча специфічні види контенту, комунікація між користувачами, аналіз і зберігання результатів навчання. Таким чином, навчальне середовище MOODLE може ефективно використовуватися у навчальних закладах.

Список використаних джерел:

1. Смирнова-Трибульська Є.М. Дистанційне навчання з використанням системи MOODLE : навчально-методичний посібник / Є.М. Смирнова-Трибульська. – Херсон : Айлант, 2007. – 492 с.: іл.
2. Габрусев В.Ю. Комп'ютерно-орієнтовані засоби управління навчальними ресурсами. Moodle (модульна, об'єктно-орієнтована, дистанційна навчальна система) / В.Ю. Габрусев // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наукових праць. – К. : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2006. – №4 (11) – С. 24.
3. Франчук В.М. Адміністрування навчальних комп'ютерних систем. Програмний комплекс Денвер+Moodle / В.М. Франчук // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наук. праць. – К. : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2008. – №6 (13). – С. 39-45.

Ya. Savula, A. Styahar

Ivan Franko Lviv national university, Lviv

NUMERICAL INVESTIGATION OF GIRKMAN PROBLEM

A lot of bodies that occur in nature or engineering contain heterogeneities like materials with thin covers, inclusions or composite structures. Analysis of these is of great importance in models of structural mechanics [1, 3, 4]. Since such bodies are heterogeneous, it is reasonable to model the arising physical phenomena using multiscale models and solve such problems by coupling different algorithms. In our work, we consider several problems for which we apply finite element method (FEM) and boundary element method (BEM) coupled by domain decomposition algorithms.

In our work, we formulate a model that describes a stress-strain state of the body with thin inclusion. We assume that inside the main body the stress-strain state can be described by the equations of linear elasticity theory; thus it

can be formulated using boundary integral equations [1, 3]. Inside the thin part we use the equations of Timoshenko shell theory [1].

For such problems to be well-posed, adequate transmission conditions should be applied. In our case, continuity of the displacements and respective stresses through the interfaces common to both domains must hold.

As for numerical solution, BEM is used to solve the boundary integral equations [1]; inside the shell we solve the boundary value problem using FEM with bubble functions, since it gives good approximation even for small shell thicknesses; finally these two methods are coupled using domain decomposition techniques described in [2] (Dirichlet-Neumann scheme).

The advantage of our approach in comparison with standard approach that uses linear elasticity theory in the whole structure is that in our approach the dimension of the problem in both parts is decreased which results in the smaller number of the degrees of freedom.

We consider two examples related to Girkman problem, in which the thin part is attached to the main body only by its end face.

However, in some cases for the body with cover our approach doesn't seem to be beneficial.

We have proven the existence and uniqueness of solution of corresponding problems and for various physical structures. Moreover, we have shown that such algorithm converges for a suitable choice of relaxation parameter θ . This relaxation parameter is typically chosen empirically

In the first example we consider the thin part to be geometrically a quarter of a circle. The displacement inside the shell, obtained by our approach, were compared to the corresponding displacements, obtained using package COMSOL.

In our second example we consider another Girkman problem. In this case three types of shell shapes, having different curvatures (circle, parabola and chain curve), are modeled. Although the graphs of the curves lie close to each other, the difference between respective displacements, stresses and moments that arise inside the shell in these three cases, is significant. Moreover, since the curves are similar from the geometric point of view, the correct treatment of such problems in packages for mathematical simulation like COMSOL, becomes difficult.

Список використаних джерел:

1. Dyyak. I. Numerical investigation of a plain strain state for a body with thin cover using domain decomposition / I. Dyyak, Ya. Savula, A. Styahar // Journal of numerical and applied mathematics. – 2012. – №3 (109). – P. 23-33.
2. Quarteroni A. Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations / A. Quarteroni, A. Valli. – Oxford, 1999. – 363 p.
3. Savula Ya. Numerical simulation of the bodies with thin covers and inclusions using FEM/BEM coupling with domain decomposition algorithm / Ya. Savula, A. Styahar // INTERPOR – Lviv, 2012. – P. 105-106.
4. Vynnytska L. Mathematical modeling of the deformation process for the bodies with thin soft inclusions / L. Vynnytska. – Lviv, 2009. – 153 p (in Ukrainian).

М. В. Сагатов, Р. М. Ирмухамедова, Ш. М. Равилов

Ташкентский государственный технический университет,
г. Ташкент, Узбекистан

АНАЛИЗ ПОВРЕЖДЕНИЙ В КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ И ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОГО ПОДХОДА

Достоверность информации о поведении композиционных материалов (КМ) при их нагружении может быть значительно повышена путем моделирования процесса разрушения. Для анализа процессов разрушения и оценки возможности прогнозирования поведения КМ рассматривалась феноменологическая модель рассеянного разрушения наследственного типа [1] и структурный анализ на основе данных акустоэмиссионных (АЭ) испытаний.

При нагружении процесс вязкого течения и процесс накопления повреждений складываются и не могут быть разделены, то ядра наследственных операторов, описывающих разрушение материала – $M(t - \tau)$ и вязкое течение – $L(t - \tau)$ могут быть определены по анализу кривых разгрузки, так как при разгрузке деформация, связанная с разрушением, не убывает. Уравнение кривой мгновенного деформирования для нагружения и разгрузки имеет вид:

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma + \int_0^t [L(t - \tau) + M(t - \tau)] \sigma(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq t_*, \quad (1)$$

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma + \int_0^t [L(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau + \int_0^{t_0} M(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad t > t_*, \quad (2)$$

где σ – напряжение; ε – деформация; t_0 – момент начала разгрузки. По кривым деформирования с различными скоростями нагружения для каждого материала рассчитывались параметры ядра $K(t - \tau)$, являющегося суммой ядер операторов, описывающих вязкие свойства материала и процесс накопления повреждений [2]:

$$K(t - \tau) = L(t - \tau) + M(t - \tau). \quad (3)$$

Различные скорости нагружения позволили проследить смену механизмов разрушения, а оператор $K(t - \tau)$ после интегрирования с учетом $\sigma = \sigma / t$, где σ – скорость нагружения, имеет вид:

$$\int_0^t K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau = \frac{\sigma k}{(1 - \alpha)(2 - \alpha)} \quad (1 - \alpha) \quad (4)$$

где k и α – параметры ядра $K(t - \tau)$, $k = l + m$; l, τ – параметры ядер $L(t - \tau)$ и $M(t - \tau)$.

Разделение параметров ядер вязкого течения и накопления повреждений позволили исследованием по длительной прочности материалов. Для учета частичного восстановления деформаций, т.е. частичного закрытия дефектов при разгрузке, наблюдаемого в КМ, в уравнение (2) следует ввести функцию $\Phi(\varepsilon_*)$, зависящую от предельной деформации, т.е. деформации, достигнутой к моменту начала разгрузки ε_* :

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma + \int_0^t [L(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau + \Phi(\varepsilon_*)] \int_0^{t_0} M(t_*-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad \triangleright t_*. \quad (5)$$

Вид кривої $\Phi(\varepsilon_*)$ различається для різних матеріалів і суцесивно залежить від структури і складу композиції. Кінетика накоплення пошкоджень визначається, таким образом, адгезійними характеристиками зв'язи волокно-матриця, реалізацією прочностних властивостей волокон і перерозподілом навантаження на складові елементи композита.

Границі применимости феноменологічних моделей визначаються структурним аналізом, який необхідний для правильної оцінки механізмів і можливостей прогнозування.

Результати акусто-емісійних випробувань показали, що метод АЕ може цілеспрямовано регулювати технологію отримання КМ з заданими властивостями, а запропонована методика з використанням феноменологічного підходу для аналізу накоплення пошкоджень в КМ дозволяє класифікувати механізми руйнування КМ.

Список использованной литературы:

1. Носов В.В. Физика и неразрушающий контроль прочности композиционных материалов / В.В. Носов // Неразрушающий контроль и диагностика окружающей среды, материалов и промышленных изделий : межвуз. сборник. – СПб. : СЗТУ, 2001. – Вып. 3. – С.43-56.
2. Методи і алгоритми відновлення сигналів і зображень / А.Ф. Верлянь, І.О. Горюшко, Е.Ю. Карпенко і др. – К. : НАН України, 2001. – 369 с.

А. С. Сверстюк

Тернопільський державний медичний університет
і.м. І.Я. Горбачевського, м. Тернопіль

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ СТАДІЄЮ ЕЛОНГАЦІЇ ПОЛІМЕРАЗНО-ЛАНЦЮГОВОЇ РЕАКЦІЇ

Відомо, що полімеразна ланцюгова реакція (ПЛР) є експериментальним методом молекулярної біології, який дає змогу проводити маніпуляції з генетичним матеріалом, і широко використовується в біологічній і медичній практиці, для клонування генів, створення і визначення генетично модифікованих організмів, діагностики захворювань (спадкових, інфекційних), ідентифікації малих кількостей дезоксирибонуклеїнової кислоти (ДНК), встановлення батьківства.

Для ефективного проведення ПЛР необхідно забезпечити багатостадійний циклічний режим зміни температури. Кожна стадія циклу (денатурація, відпал, елонгація) повинна відбуватися при певних температурах та на протязі відповідного часу. В іншому випадку необхідних петворень молекул ДНК може не відбутися.

У багатьох роботах наведені різні моделі ПЛР, однак для ефективного використання методів ПЛР, доцільно провести дослідження керуваності даних моделей. Таким чином задача математичного моделювання

і відповідних розрахунків полягає в оцінюванні мінімально необхідного часу реалізації стадії елонгації, що в загальному випадку забезпечить досягнення мінімального часу та ефективності проведення ПЛР.

Метою даної доповіді є дослідження керованості стадії елонгації ПЛР, яка запропонована в роботі [1]:

$$\frac{ds'}{dt} = -k_2s'q + k_{-2}c \quad (1)$$

$$\frac{dq}{dt} = -k_2s'q + k_{-2}c + k_3cn \quad (2)$$

$$\frac{dc}{dt} = k_2s'q - k_{-2}c - k_3cn \quad (3)$$

$$\frac{dn}{dt} = -k_3cn \quad (4)$$

$$\frac{dd}{dt} = k_3cn \quad (5)$$

Тут k_{-2} ; k_2 – пряма і зворотня швидкості реакції для утворення комплексу, q – Таq молекула, c – число копій, n – нуклеотидна послідовність для елонгації, k_{-3} ; k_3 – пряма і зворотня швидкості реакції для елонгації, d – двохланцюгова ДНК.

У той же час при проведенні стадії елонгації ПЛР визначальним фактором є температура. Залежність швидкості реакції k від абсолютної температури T описується рівнянням Арреніуса [2]:

$$k = Ae^{-E_a/RT}, \quad (6)$$

де A характеризує частоту зіткнень молекул, R – універсальна газова стала, E_a – енергія активації.

Виходячи з рівняння Арреніуса (6) система диференціальних рівнянь для стадії елонгації (1)-(5) може бути уточнена таким чином:

$$\frac{ds'}{dt} = -k_2e^{-\frac{r}{T}}s'q + k_{-2}e^{-\frac{r}{T}}c \quad (7)$$

$$\frac{dq}{dt} = -k_2e^{-\frac{r}{T}}s'q + k_{-2}e^{-\frac{r}{T}}c + k_3e^{-\frac{r}{T}}cn \quad (8)$$

$$\frac{dc}{dt} = k_2e^{-\frac{r}{T}}s'q - k_{-2}e^{-\frac{r}{T}}c - k_3e^{-\frac{r}{T}}cn \quad (9)$$

$$\frac{dn}{dt} = -k_3e^{-\frac{r}{T}}cn \quad (10)$$

$$\frac{dd}{dt} = k_3e^{-\frac{r}{T}}cn, \quad (11)$$

з відповідними початковими умовами:

$$s'(t_1) = s_0, q(t_1) = q_0, c(t_1) = c_0, n(t_1) = n_0, d(t_1) = d_0.$$

У системі диференціальних рівнянь (7-11) $r = \frac{E_a}{R}$ – стала. Вважаємо, що $T = T(t)$ – функція керування.

Припустимо, що $T(t) \in [T_e^{\min}, T_e^{\max}]$. Метою дослідження є отримати якнайбільше двохланцюгових ДНК d , при цьому витративши якнайменше праймеру, тобто:

$$J(s', q, c, n, d, T) = \int_{t_1}^{t_2} (d^2(t) - Wq^2(t)) dt \rightarrow \min_{T \in U}.$$

Тут $W > 0$ – ваговий коефіцієнт, U – множина кусково-неперервних функцій $T(t) \in [T_e^{\min}, T_e^{\max}]$.

Застосувавши принцип максимуму Понтрягіна до наведеної задачі оптимального керування можна сформулювати необхідні умови оптимальності проведення стадії елонгації ПЛР. Отримані результати необхідні для чисельного обчислення оптимального керування досліджуваної стадії, а також допоможуть мінімізувати необхідний час реалізації стадії елонгації, що в загальному випадку забезпечить ефективніше проведення ПЛР.

У подальших дослідженнях потрібно дослідити, щодо керованості інші стадії ПЛР та провести відповідне чисельне обчислення оптимального керування.

Список використаних джерел:

1. Stone E. A multi-stage model for quantitative PCR / E. Stone, J. Goldes, M. Garlick // *Mathematical biosciences and engineering*. – 2000. – P. 1-17.
2. Kelly K. Non-Arrhenius rate constants involving diffusion and reaction / K. Kelly, M.D. Kostin // *Journal of Chemical Physics*. – Vol. 85 Issue 12. – P. 7318.

С. В. Селезньов

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

ПРИКЛАДИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В СОЦІОЛОГІЇ ТА ФІНАНСОВІЙ МАТЕМАТИЦІ

Досить часто результат діяльності в бізнесі залежить від найвигіднішого способу використання ресурсів таких як гроші, товари, сировина, робоча сила. Суть методів оптимізації полягає в тому, що виходячи з наявних обирається такий спосіб їх використання (розподілу), при якому забезпечується максимум або мінімум показника, що нас цікавить. Одним із таких методів є метод лінійного програмування.

Серед математичних методів в економіці, соціології виділяється тетрада – вибірка, аналіз даних, моделювання та вимірювання. Вибірка та

аналіз даних не є метою, а є засобами дослідження. Найбільш важливим є соціологічне вимірювання.

Наведемо приклад такого вимірювання при розробці оптимальної структури професійного навчання. Початковою інформацією є балансовий розрахунок потреби у кваліфікованих кадрах за професіями, а також інформація про професійні здібності молоді. Припустимо, що ми маємо балансовий розрахунок і інформацію про ставлення молоді до тієї чи іншої спеціальності (табл. 1)

Таблиця 1

Початкові умови

Професія	Потреби по професіям	Розподіл учнів по професіям (результати опитувань в школах)				Різниця між потребами та проф. схильністю
		№1	№2	№3	Разом	
Робітничі професії	50	10	20	5	35	+15
менеджер	20	15	10	15	40	-20
секретар	30	5	10	10	25	+5
Разом	100	30	40	30	100	

Нехай нам задано оцінки схильності молоді до навчання за цими професіями. Ці оцінки визначені у коефіцієнтах привабливості професій і визначають суб'єктивне ставлення школярів до тієї чи іншої спеціальності (табл. 2)

Таблиця 2

Коефіцієнти привабливості професій

Професія	Школа №1			Школа №2			Школа №3		
	Роб. проф.	менеджер	Секретар	Роб. проф.	менеджер	Секретар	Роб. проф.	менеджер	Секретар
Робіт. пр оф.	1,0	0,5	0,1	1,0	0,7	0,4	1,0	0,3	0,6
менеджер	0,7	1,0	0,7	0,5	1,0	0,5	0,6	1,0	0,8
секретар	0,2	0,5	1,0	0,5	0,2	1,0	0,4	0,6	0,1

Із даних таблиць 1, 2 є очевидною невідповідність між потребою в кадрах за професіями і бажанням молоді здобувати ці професії. Це призводить до перерозподілу частини учнів для навчання тим професіям, які для них не є бажаними. Введення коефіцієнтів привабливості ускладнює задачу.

Побудуємо математичну модель цієї задачі. Нехай i номер професії; $i = 1, 2, \dots, m$; j – номер школи; $j = 1, 2, \dots, n$; k – номер "професійної групи" в середині школи, при $k = 1, 2, \dots, l$; x_{ij} – шукана планова чисельність учнів по i – тій професії в j – тій школі; a_i – величина потреб по кожній професії, b_j – число учнів у кожній школі; c_{ij}^k – коефіцієнт привабливості i – тої професії для учнів k -тої групи у j – тій школі.

Складання плану професійного навчання учнів розглядається як задача мінімізації незадоволення при розподілі по професіям, або як задача максимізації привабливості професії.

Отже необхідно знайти максимум такої лінійної функції:

$$L(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^k x_{ij}, \quad 0 \leq c_{ij}^k \leq 1$$

при таких обмеженнях:

$$x_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j.$$

Розв'язавши цю задачу лінійного програмування, маємо оптимальний план професійного навчання:

Таблиця 3

Оптимальний план професійного навчання

Професія	Розподіл учнів за професіями					
	За бажанням		За оптимальним планом		За бажанням	
	За бажанням	За оптимальним планом	За бажанням	За оптимальним планом	За бажанням	За оптимальним планом
Робіт. проф.	10	15	20	30	5	5
Менеджер	15	10	10	-	15	10
Секретар	5	5	10	10	10	15
Разом	30	30	40	40	30	30

За оптимальним планом 80 учнів із 100 будуть навчатись саме тим професіям, яким вони і хотіли навчатись, 20 – не будуть навчатись професіям, які є для них найбільш привабливими. Різниця між "потребами та бажаннями" яка по відповідним професіям спочатку була +15, -20, +5, тепер зменшилась до 20, тобто 5 майбутніх менеджерів зі школи № 1 та 10 – із школи № 2 стануть робітниками і 5 із школи № 3 секретарями.

Доповним оптимальний план ентропійним дослідженням. Якщо результати w_1, w_2, \dots, w_n експерименту реалізуються з різними ймовірностями p_1, p_2, \dots, p_n то міра невизначеності або ентропія обчислюється за формулою:

$$H = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i. \quad (1)$$

Обчислимо ентропію розподілу учнів за професіями (в школі): ймовірність того що учень обере робітничу професію : $p_1 = 0,35$; ймовірність того що учень обере професію менеджера: $p_2 = 0,40$; ймовірність того що учень обере професію секретаря: $p_3 = 0,25$. Тоді ентропія вибору певної професії учнями обчислена за формулою (1): $H(\alpha) = 1,559$ є досить високою. Ентропія «Потреби по професіям» $H(\beta) = 1,485$. Як бачимо ця ентропія є трохи меншою. Отже рівень попиту на певні професії та вподобання учнів відрізняються в даному прикладі несуттєво.

В контексті даної задачі показники ентропії можуть показати відповідність попиту та пропозиції на певні професії.

Розглянемо таку задачу: на рахунку фірми у банку є чотири види валют відповідно у кількостях: a_1, a_2, a_3, a_4 . Нехай курси цих валют по відношенню до гривні будуть відповідно такими: $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$, а по відношенню до долара – $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}$. Комісія за конвертацію валюти, відповідно, у гривню – $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}$; у долар – $c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}$. Скільки і якої валюти необхідно конвертувати щоб отримати b_1 гривень та b_2 доларів, при цьому мінімізувавши комісію.

Побудуємо математичну модель цієї задачі. Цільова функція $L(x)$ це сумарна комісія, яку необхідно заплатити за конвертацію валюти, $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}$ – відповідно кількість кожного типу валюти, яку необхідно конвертувати у гривні, а $x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}$ – кількість кожного типу валюти яку необхідно конвертувати у долари. Тоді:

$$L(x) = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^4 a_i x_{ji} c_{ji} \rightarrow \min(x_{ji});$$

$$\sum_{i=1}^4 a_i a_{ii} = b_1; \sum_{i=1}^4 a_i a_{2i} = b_2; x_{ji} \geq 0, j = 1, 2; i = 1, 2, 3, 4.$$

Список використаних джерел:

1. Исследование операций в экономике : учебн. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман ; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.

Н. П. Селезньова

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

УЗГОДЖЕНІСТЬ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ПЕРЕВАГ

Розробка та обґрунтування моделей і обчислювальних методів розв'язання задач прийняття рішень тісно пов'язана з експертними технологіями. Ці технології часто лежать в основі вибору структури системи, її оптимізації, класифікації та прогнозування. Експертні технології прийняття рішень лежать в основі процесів технологічного передбачення та сценарного аналізу. Ці задачі супроводжуються значною невизначеністю, неповнотою апріорної інформації, яку можна мінімувати, застосовуючи технології ранжування об'єктів. Окремо при ранжуванні об'єктів постає так звана проблема нетранзитивності, розкриттю якої присвячено дану роботу.

Розглянемо, що ж є нетранзитивним відношенням. Якщо деяке відношення R , яке можна застосувати до елементів деякої множини x, y : (xRy) і y, z : (yRz) , то кажуть, що відношення R є транзитивним. Напри-

клад, відношення "менше, ніж" є транзитивним на множині всіх дійсних чисел: якщо $1 < 3$, а $3 < \pi$, то можна стверджувати, що $1 < \pi$. Відношення рівності також є транзитивним: якщо $a = b$ і $b = c$, то $a = c$. Але є приклади відношень, що не є транзитивними. Наприклад, якщо A є батьком B , а B є батьком C , то є невірним той факт, що A є батьком C .

В математиці, а особливо в теорії ймовірностей та теорії чисел, зустрічаються відношення, які на перший погляд здаються транзитивними, а в дійсності не є такими. Одним із старих і найбільш відомим із нетранзитивних парадоксів є парадокс з голосуванням на виборах, який називають парадоксом Кеннета Ерроу, нобелівського лауреата 1972 року. Цей парадокс полягає в тому, що ідеальна демократична виборча система в принципі є неможливою.

Парадокс з голосуванням виникає в будь-якій ситуації, в якій рішення приймається на основі вибору однієї із двох альтернатив, які обирають із множини трьох і більше елементів. Парадокс нетранзитивності не дає можливості представити об'єкти у вигляді лінійно впорядкованої послідовності. Наприклад, кандидатів у депутати за їх заслугами.

Розглянемо парадокс голосування нашої виборчої системи. Припустимо, що 40% виборців активно підтримують кандидата A . Голоси опозиції розділились: 30% підтримують кандидата B , і 30% – кандидата C . На виборах при такому розподілі голосів перемагає кандидат A , незважаючи на те, що 60% виборців настроєні проти нього.

Одним із найбільш відомих способів позбутись таких небажаних наслідків розбиття голосів є ранжування виборцями кандидатів на власний розсуд. Але і цей спосіб може породжувати ірраціональні рішення. Приклад: нехай A, B, C – кандидати на виборах. Побудуємо матрицю, яка вказує варіанти ранжування виборцями цих кандидатів.

Таблиця 1

Частка виборців	Місце кандидата		
	1	2	3
$\frac{1}{3}$	A	B	C
$\frac{1}{3}$	B	C	A
$\frac{1}{3}$	C	A	B

Ця матриця зображує відомий парадокс, пов'язаний з голосуванням, в його найпростішій формі. Верхній рядок матриці свідчить про те, що $\frac{1}{3}$ виборців ранжує кандидатів, встановлюючи між ними порядок ABC , друга третина виборців встановлює інший порядок BCA . Нарешті нижній рядок відповідає ранжуванню CAB . Отже третина виборців надають

перевагу кандидата A над кандидатом B , $\frac{2}{3}$ виборців надають перевагу кандидата B над кандидатом C , і нарешті, $\frac{2}{3}$ – перевагу кандидата C

над кандидатом A . Якби A вів свою виборчу кампанію, конкуруючи з кандидатом B , то A переміг би на виборах. Якби B вів виборчу кампанію конкуруючи з C , то перемогу на виборах отримав би B . Аналогічно, якби C вів виборчу кампанію, конкуруючи з A , то переміг би C . Якщо замість кандидатів взяти законопроекти, то стане зрозумілим, як легко правляча партія може хитрістю провести потрібне їй рішення, обравши, яку пару законопроектів треба першою поставити на голосування.

Ерроу припустив, що в демократичному суспільстві прийняття колективних рішень має відповідати декільком очевидним вимогам – аксіомам. Дві із них це аксіоми повної впорядкованості та транзитивності. Інші чотири вимоги обумовлені необхідністю узгодження цих двох аксіом і отримання колективних рішень.

Універсальність. Правило прийняття колективних рішень має працювати при будь – якій конфігурації індивідуальних переваг.

Парето – сумісність. Якщо кожен член суспільства обирає рішення X як краще ніж рішення Y , то рішення X є більш важливим ніж Y .

Відсутність диктатури. Не існує такого індивіда (диктатора), переваги якого автоматично спричиняють аналогічні суспільні переваги, незалежно від індивідуальних переваг інших членів суспільства.

Незалежність від інших альтернатив. Ставлення виборців до альтернатив X та Y не мусить залежати від альтернативи Z , з приводу якої рішення не приймається.

Ерроу довів повноту та несуперечливість цих аксіом, а також, що неможливо скласти алгоритм прийняття колективних рішень, що задовольняють усім цим аксіомам. Отже, ввівши чіткі правила, що забезпечують на перший погляд вибір кандидата, який задовольняє більшості, ми отримали диктатуру. Зрозуміло, що поняття демократії неможливо сформулювати як «альтернативу диктатурі». В основі цього парадоксу лежить нетранзитивність переваг виборців. За допомогою обчислень можна маніпулювати результатами. Несуперечлива і самодостатня система диктатури є мертвою і не може розвиватись.

Список використаних джерел:

1. Гнатієнко Г.М. Експертні технології прийняття рішень : монографія / Г.М. Гнатієнко, В.Є. Снитюк. – К. : ТОВ «Маклаут», 2008. – 444 с.
2. Arrow K. A Difficulty in the Concept of Social Welfare / K. Arrow // Journ. Polit. Econ. – 1950. – Vol. 58.

П. С. Сеньо

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ТОПОЛОГІЯ ПРОСТОРУ ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ІНТЕРВАЛІВ

Лінійні функціональні інтервали є узагальненням числових інтервалів та інтервальних розширень функцій. На множині таких елементів природним чином вводяться арифметичні та теоретико – множинні операції. Так означені арифметичні операції є замкненими і неперервними. Адитивна система $\langle LI(X), +, \rangle$, де $LI(X)$ – множина всіх лінійних інтервальних обмежників на інтервалі X , є комутативною півгрупою, для якої виконується правило скорочення: Крім цього, множина $LI(X)$ при так означених арифметичних операціях над ними є квазілінійним простором.

У квазілінійному просторі $LI(X)$ введено поняття віддалі між елементами, їх норми та ширини. Наявність віддалі перетворює його в метричний простір. Доведено, що цей метричний простір є повним. Введення метрики робить цей простір топологічним простором. При цьому поняття збіжності і неперервності можна використовувати звичним чином, як і у випадку метричного простору.

Отримані необхідні і достатні умови збіжності послідовності $\{L_i(X)\}_{i=1}^{\infty}$ лінійних функціональних інтервалів до відповідного граничного лінійного функціонального інтервалу. Доведена збіжність послідовності вкладених лінійних функціональних інтервалів до лінійного функціонального інтервалу їх граничного перетину.

Для можливості аналізу збіжності послідовностей таких елементів в середньому введено в розгляд осереднені віддаль, норму, та ширину, а для аналізу динаміки збіжності послідовностей лінійних функціональних інтервалів одночасно у всіх точках інтервалу X їх визначення – функціональну, параметризовану віддаль між лінійними обмежниками; функціональну, параметри зовану норму, та ширину.

Отримані результати дають можливість для розв'язування широкого кола задач будувати та досліджувати алгоритми, які поєднують переваги інтервальних методів та методів двохсторонніх наближень.

О. О. Ситник, С. Ю. Протасов

Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ МЕТОД ОТРИМАННЯ ПЕРЕДАТНОЇ ФУНКЦІЇ ПО ПЕРЕХІДНІЙ ХАРАКТЕРИСТИЦІ ПРИ ФОРМУВАННІ ЯДЕР ІНТЕГРАЛЬНИХ МАКРОМОДЕЛЕЙ

В даний час поняття математичної моделі використовується при розв'язанні багатьох задач у різноманітних галузях науки і техніки, економіки, соціології, живої природи тощо. Ці задачі виникають при ви-

вченні властивостей і особливостей об'єктів з метою подальшого управління, при створенні адаптивних систем, в яких на основі побудованої моделі об'єкта створюються оптимальні керуючі дії. Різні типи моделей даних об'єктів, систем або процесів використовуються на стадії створення систем управління цими об'єктами і на стадії їх експлуатації. Це обумовлює актуальність проблеми побудови ефективних інтегральних макромоделей технічних об'єктів, технологічних процесів тощо.

Отримання математичних моделей того або іншого типу на основі результатів спостережень за поведінкою об'єктів і дослідження їх властивостей складає основний сенс науки ідентифікації [1]. Найбільш поширена задача ідентифікації об'єктів автоматичного регулювання – це визначення передатної функції об'єкта управління по його перехідній характеристиці, що отримується як реакція на вхідну ступінчасту дію [2]. Стосовно динамічних систем управління, як вхідну ступінчасту дію можна розглядати керуючий сигнал: на ввімкнення (вимкнення) двигуна, насоса; відкриття (закриття) вхідних клапанів тощо.

Представимо деякий перехідний процес $\varphi(x)$ об'єкта апроксимуючим виразом

$$\varphi(x) = a_0 + e^{-\lambda x} \sum_{i=1}^n a_i x^{i-1}, \quad (1)$$

де λ , a_0 , a_i – постійні коефіцієнти (λ – коефіцієнт загасання), застосування до якого перетворення Лапласа-Карсона дозволяє отримати передатну функцію у вигляді

$$W(p) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\lambda^i}{(p + \lambda)^i}, \quad (2)$$

де

$$\sum_{i=0}^n h_i = a_0, \quad -\sum_{i=1}^n h_i = h_0 - a_0 = a_1, \quad -\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \sum_{j=i}^n h_j = a_i, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (3)$$

Вигляд виразу (1) також зручний для формування ядра інтегральної макромодель, а форма передатної функції (2) є дробово-раціональним виразом, який ефективно реалізується засобами MATLAB. Для визначення коефіцієнтів a_i у виразі (1) розроблено алгоритм варіаційного типу, який дозволяє забезпечити певну незалежність кількості членів (1) від кількості точок інтерполяції $m = n$ та використати можливості низки серійних пакетів моделювання, наприклад пакету MATLAB. Згідно алгоритму вводиться функція

$$\varphi^*(x) = \frac{\varphi(x) - a_0}{e^{-\lambda x}} = \sum_{i=1}^n a_i x^{i-1}, \quad (4)$$

яка однозначно пов'язана з $\varphi(x)$. Задається значення $\lambda > 0$; визначається a_0 з $a_0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$ і з умови найменшого середньоквадратичного відхилення будується апроксимуючий поліном

$$\varphi^*(x) = \frac{D_1}{D_2}, \quad (5)$$

який є відношенням визначників

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & \dots & x^{n-1} \\ \gamma_0 & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ \gamma_1 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n-1} & c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2(n-1)} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2(n-1)} \end{vmatrix},$$

де $c_r = \sum_{j=1}^m x_j^r$, $r = 0, 1, 2, \dots, 2(n-1)$, $\gamma_l = \sum_{j=1}^m x_j^l \varphi^*(x_j)$, $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$,

$j = 1, 2, \dots, m$ – номери точок інтерполяції. Після розкриття визначників D_1 , D_2 і побудови полінома (4) кожне значення a_i , $i = 1, 2, \dots, n$ отримується як коефіцієнт при x_{i-1} , таким чином визначається функція $\varphi^*(x)$. Далі оцінюється похибка отриманого наближення $\varphi(x)$ і за необхідності зменшується шляхом нового розрахунку із збільшенням порядку полінома (5). Поліпшення отриманого наближення досягається уточненням значення λ , вибраного раніше довільно, шляхом розв'язання системи, складеної з m незалежних рівнянь

$$\varphi(x_j) - e^{-\lambda_j x_j} \sum_{i=1}^n a_i x_j^{i-1} - a_0 = 0,$$

відносно λ_j , $j = \overline{1, m}$, і в якості розрахункового приймається середнє значення, використання якого у поєднанні з раніше визначеними a_i дозволяє, як правило, різко зменшити похибку апроксимації.

Розглянутий спосіб ефективно реалізується програмою ідентифікації передатних функцій за експериментальними даними в моделюючому середовищі MATLAB (рис.1), завдяки використанню можливостей, що входять в склад її пакетів символьних обчислень Symbolic Math і Extended Symbolic Math Toolboxes; при цьому використовуються функції (програми): `ident_app` – для забезпечення діалогового ітераційного процесу ідентифікації передатної функції; `matr_sym` – для формування матриць D_1 і D_2 ; `poly_coef` – для формування полінома $\varphi^*(x)$, `lamda_sr` – для уточнення коефіцієнта λ , `coef_h` – для обчислення коефіцієнтів h_i за формулою (3), `coef_cg` – для обчислення коефіцієнтів c_r , γ_l .

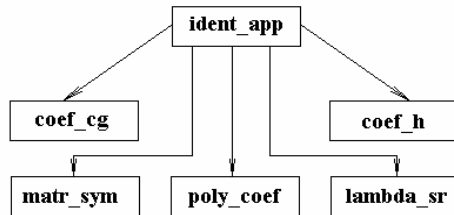


Рис. 1. Структура програмного комплексу ідентифікації передатних функцій за перехідними процесами

Список використаних джерел:

1. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций / В.Л. Гончаров – М. : Гостехиздат, 1954. – 316с.
2. Протасов С.Ю. Методи та засоби формування і комп'ютерної реалізації інтегральних макромоделей стаціонарних динамічних об'єктів з розподіленими параметрами: автореф. дис. ... канд. техн. наук : 01.05.02 / С.Ю. Протасов. – Черкаси, 2012. – 20 с.

V. S. Sikora

Yurij Fedkovich Chernivtsy national university, Chernivtsy

ORDERS OF METASYMMETRICAL GROUPS OF INFINITE RANK

As is well known, the supernatural number is a formal product $\prod_{i=1}^{\infty} p_i^{k_i}$, where $\{p_1, p_2, \dots\}$ is a set of prime numbers, $x_i \in \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$, $i \in N$. The divisibility ratio is introduced on the set of supernatural numbers. This ratio is a partial order. Such partially-ordered set is a complete lattice. The transition to supernatural numbers gives a chance to expand a order concept from finite groups onto profinite groups [1]. One of the standard examples of profinite groups are metasymmetrical groups of infinite rank and infinite iterated wreast products of symmetrical groups of a symmetrical degree [2]. The aim of the abstracts is a calculation of an order for such groups.

Let $\bar{k} = \langle k_1, k_2, \dots \rangle$ is a infinite sequence of natural numbers, such that $k_i \geq 2$ for all $i = 1, 2, \dots$; $S(\bar{k})$ is a metasymmetrical group of metadegree \bar{k} , i.e. $S(\bar{k}) = \varprojlim_{i=1}^{\infty} S_{k_i}$ is a wreast product of a symmetrical groups S_{k_1}, S_{k_2}, \dots [2]. The $S(\bar{k})$ group is a profinite group. Thus, the order of this group is some supernatural number [3]. In case of a boundedness of the sequence \bar{k} we denote with the help of the symbol $i(\bar{k})$ the maximum of k_i numbers, which appear in \bar{k} infinitely many; the symbol $f(\bar{k})$ – the maximum of k_i numbers, which appear in \bar{k} finitely; $n(\bar{k})$ is a number of last entry of the number $f(\bar{k})$ into \bar{k} ; $l_{\bar{k}}(p)$ is a number p exponent (where p is a prime number, which be a member of a canonical decomposition of the number $|\varprojlim_{i=1}^{n(\bar{k})} S_{k_i}|$).

Theorem. Let \bar{k} is an arbitrary infinite sequence on the set $N \setminus \{1\}$; p_1, p_2, \dots is a sequence of all prime numbers in the natural order; $S(\bar{k})$ is a metasymmetrical group of the metadegree \bar{k} . Then 1) if the sequence \bar{k} is

unbounded, then $|S(\bar{k})| = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\infty}$; 2) if the sequence \bar{k} is bounded and $i(\bar{k}) \geq f(\bar{k})$, then $|S(\bar{k})| = \prod_{i=1}^{i(\bar{k})} p_i^{\infty}$; 3) if the sequence \bar{k} is bounded and $i(\bar{k}) < f(\bar{k})$, then $|S(\bar{k})| = \prod_{i=1}^{i(\bar{k})} p_i^{\infty} \cdot \prod_{i=i(\bar{k})+1}^{f(\bar{k})} p_i^{t_k(P_i)}$.

References:

1. John S. Wilson. Prefinitis groups. – Oxford: Clarendon Press, 1998. – 283 p.
2. Kaluzhnin L.A. Krantzproducte / L.A. Kaluzhnin, P.M. Beleckij, V.Z. Feinberg. – Leipzig : Teulner Verlag, 1987. – 168 p.
3. Sushchansky V.I. Orders of metasymmetrical groups of infinite rank / V.I. Sushchansky, V.S. Sikora // 6-th International Algebraic Conference in Ukraine. – Kamyanets-Podilsky, 2007. – P. 199-200.

О. В. Слободянюк*,

В. В. Бараннік**, **С. В. Туренко****, **Р. І. Акімов****

*Кам'янець-Подільський національний університет

імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,

**Харківський університет повітряних сил

імені Івана Кожедуба, м. Харків

ПРОЕКТУВАННЯ ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРІВ ЗА ДОПОМОГОЮ СТРУКТУРНОГО КОДУВАННЯ

Процеси обробки та передачі цифрових зображень в інфокомунікаційних системах завжди супроводжується частковою втратою початкової якості, викликаной накладанням шумів та похибками обчислень обчислювальних пристроїв. У більшості випадків це погіршення не несе істотного впливу на семантичний зміст зображень але в таких областях як медицина, геодезія, метеорологія та моніторинг стану наземних стратегічних об'єктів навіть найменші відхилення у декількох елементах зображень можуть призвести до непередбачуваних результатів.

Найпростішим способом уникнути погіршення якості зображень є використання цифрової фільтрації. Метою фільтрації зазвичай є підвищення різкості зображення, окреслення контурів чи видалення шумів. Сучасна область цифрової фільтрації представлена великою сукупністю різноманітних фільтрів, від усереднюючих по області до процедур локального диференціювання та окреслювання контурів. Для цифрової фільтрації зображень використовуються двовірні фільтри, що відповідають самій природі зображення. При роботі двовимірного фільтру вибирається невеликий (локальний) фрагмент поверхні зображення (так зване вікно у вигляді квадратної матриці розміром 3×3 , 5×5 і т. д.) й до нього застосовується яка-небудь вагова функція або апертурна маска. Далі відбувається зміщення вікна по зображенню і потворно накладається вагова функція.

Суттєвим недоліком подібного підходу є його локальність. Тобто відбувається аналіз та, відповідно, врахування лише локальних характе-

ристик зображення. Подібного недоліку повністю позбавлені методи структурного кодування, що засновані на аналізі інтегральних характеристик зображення у поліадичному просторі. Зображення представляється у вигляді тривимірної рельєфної моделі, яка передбачає перехід від класичної матриці значень інтенсивностей елементів зображення до сукупності бітових позиційних матриць та відповідних їм значень висот. Використання даного підходу дозволить уникнути локальних імпульсних стрибків зашумлених чи спотворених груп пікселів зображення. При цьому відбувається накладання певної системи обмежуючих умов на кожну бітову площину рельєфної моделі (так званих динамічних діапазонів), а також умови зв'язності між елементами різних рівнів.

Ще однією перевагою даного підходу є те, що використовуються виключно бітові операції, що свідчить про нульову ймовірність виникнення додаткових похибок у процесі фільтрації зображень. Крім цього відсутня необхідність виконання операцій з плаваючою крапкою позитивно впливає на загальну швидкодію розроблених цифрових фільтрів.

Список використаних джерел:

1. Баранник В.В. Кодирование трехмерных моделей видеокадров в инфотелекоммуникационных системах : монография / В.В. Баранник, В.П. Поляков, А.В. Слободянюк. – Каменец-Подольский : Калиграф, 2011. – 212 с.
2. Прэтт У. Цифровая обработка изображений / У. Прэтт. – М. : Мир, 1985. – 736 с.

О. А. Смалько

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

МОДЕЛЬ ЕЛЕКТРОННОГО НАВЧАННЯ «1 УЧЕнь – 1 КОМП'ЮТЕР»

У межах всесвітньої освітньої ініціативи Intel® World Ahead у школах багатьох країн світу реалізується модель навчання «1 учень – 1 комп'ютер». У 2008 році долучилась до цього й Україна.

Відповідно до моделі навчання «1 учень – 1 комп'ютер» основним інструментом навчання є комп'ютер (власний портативний), з'єднаний з класною локальною мережею та Інтернетом. В якості методів навчання використовуються технології та сервіси мережевої взаємодії, інформаційного пошуку та створення цифрових об'єктів. При цьому забезпечується вільний доступ до освітніх ресурсів.

Передбачається використання комп'ютерів у школі на будь-яких уроках з різних предметів, а також у позаурочний час в умовах здоров'язберігаючої педагогіки у відповідності з діючими санітарно-гігієнічними нормами.

Створене за такою моделлю навчальне середовище відкриває можливості для залучення дітей до найсучасніших досягнень науки, до прогресивних технологій вже з перших днів навчання у школі.

Відтак в руках сучасного школяра з'являється потужний і мобільний інструмент моделювання, спостереження та взаємодії, підключений до бездротової мережі. Це є однією з найбільш значущих тенденцій освіти нашого часу, що утворює принципово нову навчальну ситуацію, орієнтирами в якій стають вміння та якості, компетенції та навички XXI століття. Зокрема, мобільний комп'ютер або нетбук стає інструментом для освоєння учнями ефективної комунікації, комп'ютерної культури, вміння вирішувати проблеми, критично і глобально мислити, вміння брати відповідальність на себе та співпрацювати в команді. Все це сприяє розвитку творчості і підприємництва, технологічної та медіаграмотності у дітей.

Завдяки перевагам використання інформаційно-комунікаційних технологій в учнів розвиваються такі знання й вміння, що сприяють формуванню самостійності й розвитку громадянських, професійних і лідерських якостей. Це допомагатиме дітям ставати вільними, впевненими в собі особистостями, домагатися успіху в подальшому житті.

Шкода, але останнім часом впровадження проекту «1 учень – 1 комп'ютер» у нашій країні дещо загальмувалось, а на деяких регіональних рівнях навіть припинилось у зв'язку з обмеженням фінансування відповідних програм. Однак компанія Intel продовжує проводити всеукраїнські тренінги з використання інформаційно-комунікаційних технологій в інноваційній моделі електронного навчання «1 учень – 1 комп'ютер» для освітян пілотних шкіл Національного проекту «Відкритий світ», на який покладено більш амбітні цілі – створення єдиної інформаційно-комунікаційної освітньої мережі національного рівня на базі технологій радіозв'язку четвертого покоління (4G) з можливістю доступу до неї усіх учасників навчального процесу: учнів, учителів, батьків, адміністраторів освіти з усіх шкіл України.

Звісно, розвиток подібних проектів не можна зупиняти. Якби скрутні часи не були, необхідно докладати максимум зусиль для забезпечення можливості застосування сучасного комп'ютерного обладнання у навчальному процесі, а також для напрацювання методик використання сучасних комп'ютерних інструментальних засобів, корисних програмних застосунків та сервісів мережевої взаємодії у поєднанні з ефективними педагогічними технологіями.

В. А. Сорич, Н. М. Сорич

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

НАБЛИЖЕННЯ ЛІНІЙНИХ КОМБІНАЦІЙ ЗГОРТОК З ЯДРАМИ ПУАССОНА СУМАМИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНАВ СЕРЕДНЬОМУ

Нехай $C_{\beta,L}^q$ – клас неперервних 2π -періодичних функцій $f(x)$, які є згортками ядер Пуассона $P_{\beta}^q = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)$ із функціями $\varphi: \|\varphi\|_L \leq 1, \varphi \perp 1$. Нехай, далі, числа $q_i, \beta_i (i = \overline{1,m})$ такі, що $0 < q < q_i \leq 1, \beta_i \in R, \beta \in R$.

У цьому повідомленні, з використанням результатів [1], досліджується асимптотична поведінка величин

$$\varepsilon_{n,m}(C_{\beta,L}^q; V_{n,p}) = \sup_{f \in C_{\beta,L}^q} \left\| \sum_{i=1}^m q_i^{n-p+1} \left(f_{\beta}^{q_i}(x) - V_{n,p}(f_{\beta_i}^{q_i}; x) \right) \right\|_L,$$

де $f_{\beta_i}^{q_i}(x)$ – похідні в сенсі О.І. Степанця при $\psi_i(k) = q_i^{-k}, V_{n,p}(f; x)$ – суми Валле-Пуссена ($V_{n,p}(f; x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p+1}^n S_k(f; x), S_k(f; x)$ – сума Фур'є порядку k). При $m=1$ відповідні результати отримані А.С. Сердюком.

Теорема. Нехай $n \rightarrow \infty, n-p \rightarrow \infty$, тоді справедлива рівність

$$\varepsilon_{n,m}(C_{\beta,L}^q; V_{n,p})_L = \frac{2q^{n-p+1}}{\pi^2 p} \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{A^2(t) + B^2(t)} dt + O(1) \frac{1}{n-p+1} \begin{cases} \frac{q}{q^* - q}, p=1 \\ \frac{qq^*}{(q^* - q)^3}, p=2,3,\dots \end{cases} \right),$$

де

$$A(t) = \sum_{i=1}^m z_i^2(t) z_i^*(pt) \cos\left(2\theta_i + \frac{\beta_i \pi}{2} - \delta_i(t)\right),$$

$$B(t) = \sum_{i=1}^m z_i^2(t) z_i^*(pt) \sin\left(2\theta_i + \frac{\beta_i \pi}{2} - \delta_i(t)\right),$$

$$z_q(t) = (1 - 2q \cos t + q^2)^{-\frac{1}{2}}, z_q^*(t) = (1 - 2q^p \cos t + q^{2p})^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_q(t) = \arctg \frac{q \sin t}{1 - q \cos t}, \delta_q(t) = \arctg \frac{q^p \sin t}{1 - q^p \cos t}, z_i(t) = z_{\frac{q}{q_i}}(t),$$

$$z_i^*(t) = z_{q_i}^*(t), \theta_i(t) = \theta_{q_i}(t), \delta_i(t) = \delta_{q_i}(t), q^* = \min_i q_i,$$

$O(1)$ – величина, рівномірно обмежена по $n, q, q_i, \beta, \beta_i$.

Список використаних джерел:

1. Сердюк А.С. Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле-Пуссена / А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. – 2004. – №1. – С. 97-107.

Д. В. Стефанишин

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, м. Київ

МЕТОД ПРОГНОЗНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПОКАЗНИКІВ СТАНУ ГІДРОСПОРУД ЗА ДАНИМИ МОНІТОРИНГУ

У структурі та організації сучасного управління складними системами, до яких відносяться і гідротехнічні споруди, особливу роль відводять моніторингу. На разі роботи зі впровадження сучасних систем моніторингу з метою попередження про аварії і надзвичайні ситуації на гідроспорудах ведуться у більшості країн світу, де розвиваються гідротехнічне будівництво і гідроенергетика, експлуатуються об'єкти водного господарства та гідроенергетики. Відповідні автоматизовані системи моніторингу стану гідроспоруд активно розробляються і в Україні, зокрема на Дніпровському і Дністровському каскадах ГЕС і ГАЕС.

Як засіб контролю і управління станом гідроспоруди в процесі експлуатації моніторинг включає цілеспрямовані і систематичні спостереження за визначеними показниками її стану, спеціальним чином організовані в просторі і в часі, а також методи обробки даних та прогнозування поведінки визначених показників стану за даними спостережень на основі математичних моделей.

Традиційні методи побудови математичних моделей за натурними даними ґрунтуються на принципі оптимізації. Однак процес оптимізації передбачає певні граничні обмеження, які при моделюванні за даними моніторингу з метою прогнозування показників стану гідроспоруд не завжди можуть бути виконані. Зі збільшенням кількості даних, проблеми адекватності, пов'язані з рішенням оптимізаційної задачі, виникають не лише у випадках використання простих моделей. Збільшення розмірності моделей за рахунок врахування додаткових факторів і параметрів, нелінійних ефектів тощо зазвичай не розв'язує проблему неадекватності і призводить до невизначеності прогнозування [1].

Пропонується метод прогнозного моделювання показників стану гідроспоруд за даними моніторингу, що ґрунтується на побудові ситуаційних і індуктивних моделей регресійного типу. Ситуаційні моделі адаптуються до даних окремих часових інтервалів функціонування індивіду-

альної гідроспороди, які визначаються однорідним прогнозним фоном [2] і обмежуються монотонними або квазістаціонарними динамічними рядами даних. Побудовані таким чином ситуаційні моделі вважаються адекватними на цих інтервалах [3]. Результати ситуаційного моделювання формують підставу (базу) для наступної побудови індуктивних моделей, де враховуються особливості еволюції параметрів стану гідроспороди як системи в часі. Загальна прогнозна модель показника стану гідроспороди при такій постановці задачі являє собою сімейство індуктивних моделей як моделей «рівнів», представлених у вигляді регресій модельних значень або комбінаціями трендів та регресій залишків трендів модельних значень показників стану, що встановлюються за ситуаційними моделями минулих періодів від деяких похідних параметрів незалежних змінних. Прогнозування значень показників стану гідроспороди здійснюється як на основі ситуаційних моделей, за допомогою яких відслідковується її поведінка в межах інтервалів часу, за даними яких ситуаційні моделі є адекватними, так і на основі індуктивних моделей, за допомогою яких відслідковується еволюція ситуаційних моделей як фазових портретів минулих станів гідроспороди та можуть встановлюватися ситуаційні моделі показників її стану для майбутніх періодів.

Показано, що в якості рівнянь зв'язку при моделюванні показників стану гідроспоруд можуть використовуватися прості залежності (функціональні і регресійні), що легко адаптуються до нових даних та змін прогнозного фону. Можуть враховуватися лаги між змінними моделей. Допускається модифікація контрольних показників стану гідроспороди, що має за мету побудову адекватних ситуаційних і індуктивних моделей для цілей прогнозування.

Список використаних джерел:

1. Стефанишин Д.В. Про невизначеність при математичному моделюванні за даними спостережень / Д.В. Стефанишин // Problems of decision making under uncertainties. Abstracts of XXI International Conference. Skhidnytsia, Ukraine, May 13-17, 2013. – P. 198.
2. Stefanyshyn D.V. A Method of Forecasting of Indexes of Dynamic System that evolves slowly, based on Time Series Analysis / D.V. Stefanyshyn // Proc. of 4th Int. Conf. on Inductive Modelling. Kyiv, Ukraine, September 16-20. – 2013. – P. 221-224.
3. Stefanyshyn D.V. Prediction of indexes of dynamic system with use of observational data as time series / D.V. Stefanyshyn // Problems of decision making under uncertainties. Abstracts of XXII Int. Conf. Foros-Yalta, Ukraine, September 23-27, 2013. – P. 31.

В. А. Стоян*,
А. А. Кулигіна**

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ,
**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

ПРОГРАМНО-АНАЛІТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕПОВНО ВИЗНАЧЕНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Одним із недоліків теоретичної та прикладної математики є дослідження просторово розподілених динамічних систем.

За певних класично визначених початкових умов функціонування системи, динаміка її досліджується методами математичної фізики. Для більшості ж ширше поставлених задач використовуються методи чисельної математики. Обидва підходи однак вимагають коректності в постановці початково-крайової задачі, згідно якої кількість та якість початково-крайових спостережень за системою повинна бути узгодженою з диференціальною математичною моделлю системи.

Основою даної доповіді є програмна реалізація методики математичного моделювання стану неповно спостережуваної динамічної системи, яка запропонована нами в [1]. Остання дозволила отримати точний математичний розв'язок диференціальної моделі системи, який за середньоквадратичним критерієм узгоджується з наявними поточними та початково-крайовими спостереженнями за станом системи. При цьому не вимагається узгодженості кількості, типу, неперервності та гладкості таких спостереження з класом розв'язуючого диференціального рівняння моделі. Допускається навіть дискретний характер останніх.

У роботі виконане розширення та удосконалення описаного в [2] програмно-аналітичного комплексу. При цьому покращена та спрощена внутрішня структура комплексу, став більш наближеним до користувача інтерфейс по постановці задачі, по вводу спостережень за досліджуванним процесом та по візуалізації результатів його математичного моделювання.

Як і раніше, дозволяється виконувати математичне моделювання функції стану довільного просторово розподіленого динамічного процесу, попередньо ввівши його математичну модель та зімітувавши систему просторово-динамічних спостережень за процесом.

У рамках даної доповіді практична робота програмно-моделюючого комплексу буде проілюстрована на задачі дослідження стану диференціально визначеного динамічного процесу, одно- та двовимірного за просторовими координатами.

Список використаних джерел:

1. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, кваліфіційних і нелінійних динамічних систем / В.А. Стоян. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2011 – 320 с.
2. О системе компьютерно-аналитического моделирования динамики пространственно распределенных процессов / В.А. Стоян, К.В. Двирничук, А.Е. Ершов, А.С. Емцов // Компьютерная математика. – 2012. – №2. – С. 34-44.

Н. І. Судак

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

КОМП'ЮТЕР ЯК НАОЧНИЙ ЗАСІБ ПРИ ВИВЧЕННІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Тригонометрія – складова частина шкільного курсу математики. Добрі знання і міцні навички з тригонометрії є свідченням достатнього рівня математичної культури, обов'язковою умовою успішного вивчення у ВНЗ математики, фізики, цілого ряду технічних дисциплін. Однак, значна частина випускників шкіл та ВНЗ I-II рівнів акредитації виявляє з року в рік досить слабку підготовку з цього важливого розділу математики.

Ще Б. Паскаль говорив, що «предмет математики такий серйозний, що корисно не нехтувати нагодою робити його трохи цікавим», і тут на поміч вчителю прийде наочність, а саме комп'ютер як один з її видів. Наприклад, розглядаючи рівняння $\cos x = a$ скористаємося програмою GRAN-1W, побудувавши в одній системі координат графіки функцій $y = \cos x$ і $y = a$. Візьмемо а довільне, але більше по модулю за одиницю (рис. 1).

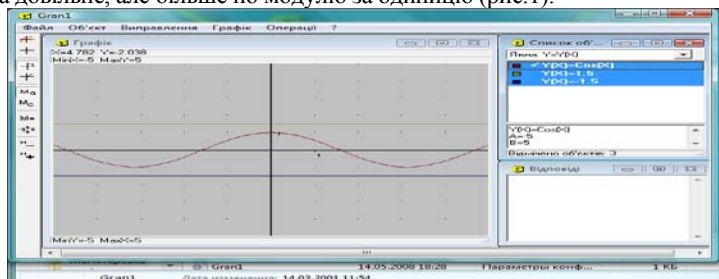


Рис. 1.

Бачимо, що в даному випадку рівняння розв'язків немає, оскільки графіки функцій не перетинаються.

Комп'ютерна програма GRAN1 звільняє учнів від однойменної і нецікавої роботи, будуючи графіки самостійно.

Застосування комп'ютера полегшує та прискорює перевірку знань учнів, оскільки тестові програми одразу виставляють оцінку за 12-бальною системою, звільняє вчителя і учнів від побудови графіків функцій, а тому вчитель максимально встигає розглянути заплановані питання. Також полегшує проведення уроків використання програми Microsoft Power Point для ознайомлення учнів з історичними даними виникнення тригонометрії та застосування роздаткового матеріалу (карток з завданнями) для проведення самостійної роботи. Використання програми Microsoft Excel дає змогу швидко будувати графіки, що економить час учнів.

Ефективність процесу навчання з використанням нових інформаційних технологій навчання (НІТН) забезпечується раціональним досягненням дидактичних цілей. Суттєвою дидактичною особливістю навчання за допомо-

гою ЕОМ є встановлення безпосередніх діалогів між учнем і машиною, або трикутника учень – комп'ютер – учитель, які допомагають розібратися в труднощах, що виникають в процесі вивчення предмета, уникаючи стресових ситуацій, організувати самостійне розв'язування задач, і дозволяють вчителю спостерігати та контролювати якісний стан навчання.

В. П. Тагауров

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ВИКОРИСТАННЯ ХМАРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ У ПІДГОТОВЦІ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ ПОЧАТКОВИХ КЛАСІВ

Сучасні технології навчання займають одне із перших місць серед численних нових напрямків розвитку навчання. Актуальність використання нових інформаційних технологій продиктована, перш за все, педагогічною потребою у підвищенні ефективності розвиваючого навчання, а саме у формуванні інформаційно-комунікаційної компетентності майбутніх педагогів. Інформаційні технології направлені на розвиток освітньої інфраструктури, а саме, інформаційного середовища навчального закладу та пропонують запровадження і ефективне використання нових інформаційних сервісів, систем і технологій навчання, електронних освітніх ресурсів нового покоління.

Характеристики сучасного апаратного забезпечення змінюються та удосконалюються, і будь-який вітчизняний навчальний заклад не може оновлювати свою технічну базу та забезпечувати навчальний процес останніми новинками комп'ютерної техніки. Така ж ситуація з програмним забезпеченням, що передбачає чималі матеріальні витрати на підтримку відповідного інформаційного обслуговування учнів.

З досвіду зарубіжних країн, відмінним рішенням вищеприказаних проблем є впровадження в навчальний процес «хмарних технологій». Хмарні сервіси спочатку з'явилися в основному як безкоштовні хостинги поштових служб. Інші інструменти хмарних технологій для освіти практично не використовувалися в силу недостатності інформації про них і відсутності практичних навичок їх використання для навчальних цілей. Лише порівняно недавно освітяни гідно почали оцінювати інноваційні ІТ-додатки, такі як: Google Apps, Microsoft Office Web Apps, Amazon EC2 та інші. Найкращий спосіб підготовки школярів до роботи з сучасними технологіями – впровадження цих технологій в освітній процес. А для цього необхідно підвищити відповідний рівень ІКТ компетентності у педагогів.

З урахуванням того, що основи інформатики починають вивчати з початкових класів, а одним із основних завдань навчального курсу «Сходинки до інформатики» є формування в учнів молодшого шкільного віку початкових навичок знаходити інформацію, використовувати, створювати та поширювати повідомлення та дані, застосовуючи для цього засоби інформаційно-

комунікаційних технологій, зокрема створювати графічні зображення, комп'ютерні презентації, текстові документи, шукати інформацію в мережі Інтернет, користуватись електронною поштою та ін. Наведенні навички можна сформувані з допомогою використання у навчальному процесі хмарних технологій. Разом з цим, ці технології будуть корисними і для вчителя, оскільки має доступ до своїх матеріалів і документів будь-де і будь-коли; з'являється можливість використання відео і аудіо файлів прямо з Інтернету, без додаткового завантаження на комп'ютер; організація спілкування засобами Лунс з предметними кафедрами вищих навчальних закладів (проведення он-лайн уроків, тренінгів, круглих столів); можливість формувати траєкторії розвитку кожного учня з конкретного предмету; принципово нові можливості для організації досліджень, проектної діяльності та адаптації навчального матеріалу до реального життя.

Отже, постає необхідність в ознайомленні та формуванні відповідних компетентностей у використанні хмарних технологій майбутніми вчителями початкових класів.

Список використаних джерел:

1. Морзе Н.В. Як навчати вчителів, щоб комп'ютерні технології перестали бути дивом у навчанні? / Н.В. Морзе // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2010. – №6 (86). – С. 10-14.
2. Морозов А. Школьники уходят в облака [Електронний ресурс] / А. Морозов. – Режим доступу: http://www.ng.ru/education/2011-09-06/8_shkolniki.html.
3. Облачные вычисления. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://habrahabr.ru/blogs/cloud_computing/111274.
4. Каракулина Н.С. Облачные технологии в школьном образовательном процессе [Електронний ресурс] / Н.С. Каракулина. – Режим доступу: <http://karanatauray.blogspot.com/2012/04/blog-post.html>. – Назва з екрану.

Р. М. Тацій, О. Ю. Пазен

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛОБМІНУ В БАГАТОШАРОВІЙ СТІНЦІ СИСТЕМОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Постановка задачі. Розглядається задача про розподіл температурного поля в n -шаровій плиті, що поділена на n шарів різної товщини площинами $x = x_i$, $i = \overline{0, n}$, причому $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$.

Припускається, що кожний шар наділений своїм коефіцієнтом теплопровідності та внутрішнім розподілим джерелом тепла. На межах шарів (окрім внутрішнього та зовнішнього) передбачається наявність зосереджених джерел температури та виконання умов неідеального теплового контакту. Вважатимемо, що в деякій точці $x = x_m$, $(0 \leq m \leq n)$ відомі («виміряні») температура та тепловий потік, а температуру і теп-

ловий потік в кожній точці проміжку $[x_0, x_n]$ необхідно знайти. Як впливає з робіт [1, 2], поставлена задача зводиться до розв'язування квазі-диференціального рівняння

$$\left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta_i \right) t' \right)' = \sum_{i=0}^{n-1} r_i \theta_i, \quad (1)$$

за умов спряження

$$\begin{cases} t_{i+1}(x_i) - t_i(x_i) = \frac{1}{\alpha_i} t_i^{[1]}(x_i), \\ t_{i+1}^{[1]}(x_i) - t_i^{[1]}(x_i) = s_i, \quad i = \overline{0, n-1}. \end{cases} \quad (2)$$

Тут $t_i(x)$, $t_i^{df} = \lambda_i t_i'(x)$ – температура та тепловий потік відповідно на $[x_i, x_{i+1})$, $t(x) = \sum_{i=0}^{n-1} t_i(x) \theta_i$, $t^{[1]}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot t_i'(x) \theta_i$, θ_i – характеристична

функція напіввідкритого проміжку $[x_i, x_{i+1})$, тобто $\theta_i = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}) \end{cases}$;

$\lambda_i > 0$ – коефіцієнт теплопровідності на проміжку $[x_i, x_{i+1})$; $\delta_i(x - x_i)$ – функція Дірака з носієм в точці $x = x_i$; r_i , s_i – дійсні числа, що характеризують інтенсивності розподілених та зосереджених джерел тепла відповідно.

До цього слід додати початкові умови

$$\begin{cases} t(x_m) = t^m, \\ t^{[1]}(x_m) = t^{[1]m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3)$$

Введемо вектори:

$$\bar{T} = (t, t^{[1]})^T, \quad \bar{T}_i = (t_i, t_i^{[1]})^T, \quad \bar{R}_i = (0, r_i)^T, \quad \bar{S}_i = (0, s_i)^T,$$

$$\bar{P}_m = \bar{T}^{df}(x_m) = (t_m, t_m^{[1]})^T, \quad i = \overline{0, n-1}$$

та матриці:

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_i & 0 \end{pmatrix}, \quad C_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Тоді задача (1)-(3) зводиться до розв'язування еквівалентної системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією:

$$\bar{T}' = \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i \theta_i \right) \cdot \bar{T} + \bar{R}_i, \quad (4)$$

$$\bar{T}_i(x_i) - \bar{T}_{i-1}(x_i) = A_i \cdot \bar{T}_{i-1}(x_i) + \bar{S}_i, \quad i = \overline{0, n-1} \quad (5)$$

при початковій умові

$$\bar{T}(x_m) = \bar{P}_m. \quad (6)$$

Здача (4), (5), (6) розв'язана в замкненій формі [3].

Список використаних джерел:

1. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк. – К. : Наукова думка, 1987. – 287 с.
2. Тацій Р.М. Визначення теплообміну в багат шаровій нескінченній плиті з дискретно-неперервним розподілом тепла / Р.М. Тацій, М.І. Кусій, О.Ю. Пазен // Пожежна безпека : зб. наук. пр. ЛДУ БЖД. – 2012. – №6. – С. 121-128.
3. Тацій Р.М. Конструкція розв'язків лінійних імпульсних диференціальних рівнянь з кусково-змінними коефіцієнтами / Р.М. Тацій, М.Ф. Стасюк, О.О. Власій // Фізико-математичні науки : вісник НУ «ЛП». – 2013. – №768. – С. 40-45.

В. А. Тихоход

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ МЕТОДА КВАДРАТУР РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА II РОДА

Для систем интегральных уравнений Вольтерра (СИУВ) существенной особенностью численного решения является необходимость проведения большого количества вычислительных операций. Поэтому актуальным направлением повышения эффективности решения СИУВ является разработка параллельных алгоритмов и соответствующих программ.

При численном решении систем линейных интегральных уравнений Вольтерра (СЛИУВ) Прода методом квадратур используется выражение [1]

$$\sum_{j=1}^m y_j^{(i)} (a_{rj} - K_{rji}^{(i)} A_i) = f_r^{(i)} + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{i-1} K_{rji}^{(l)} y_j^{(l)} A_l. \quad (1)$$

где

$$K_{rji}^{(l)} = K_{rj}(x_i, x_l), \quad y_j^{(l)} = y_j(x_l), \quad f_r^{(i)} = f_r(x_i),$$

A_l – коэффициенты квадратурной формулы.

Решением системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (1) являются значения функций y_r в точках x_r .

Из алгоритма метода квадратур решения СЛИУВ видно, что основная вычислительная нагрузка ложится на вычисление сумм $\sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{i-1} K_{rji}^{(l)} y_j^{(l)} A_l$ при определении значений правой части СЛАУ. Процесс вычисления суммы

$\sum_{l=1}^{i-1} K_{rji}^{(l)} y_j^{(l)} A_l$ пропорционально распределяется между n потоками путем пе-

редачи каждому потоку на вычисление выражения $\sum_{p1}^{p2} K_{rji}^{(l)} y_j^{(l)} A_l$, где $p1, p1$ – границы, которые разные для каждого потока.

В среде MATLAB компании MathWorks распараллеливание вычислений производится с помощью [2] двух взаимосвязанных пакетов расширений (приложений): MATLAB Distributed Computing toolbox и MATLAB Distributed Computing Engine. В этой системе была произведена реализация последовательного и параллельного алгоритмов метода трапеций решения СЛИУВ Прода. Проведем сравнение их быстродействия путем решения СЛИУВ Прода вида

$$\begin{cases} y_1(x) - \int_0^x (x-s)y_1(s)ds - \int_0^x (x+s)y_2(s)ds = \\ = 2(1-x)\sin(x) - \cos(x) - x + 1, \\ y_2(x) - \int_0^x (x-2s)y_1(s)ds - \int_0^x (2x-s)y_2(s)ds = \\ = (2-x)\sin(x) + (2-x)\cos(x) - x - 1; \end{cases}$$

(2) Характеристики тестовых вычислительных платформ:

- 1) двухядерный процессор IntelPentium 2.1 GHz, 4 ГБ ОЗУ;
- 2) 4-ядерный процессор IntelCorei5-3330 3.0GHz, 8 ГБ ОЗУ.

В таблице 1 приведены результаты сравнения.

Таблица 1

Быстродействие алгоритмов решения СЛИУВ(2)

Количество узлов	Последовательный алгоритм (четыре ядра), сек	Параллельный алгоритм (два ядра), сек	Параллельный алгоритм (четыре ядра), сек
10	0.017	4.829	2.092
100	0.039	5.676	2.279
1000	0.308	8.257	3.376
10000	5.593	43.06	16.288
100000	300.587301	1388.788	236.611
200000	1881.102	5511.637	848.443

Из результатов видно, что при малом числе узлов быстродействие параллельного алгоритма уступает последовательному алгоритму, что объясняется большими издержками на пересылку сообщений между рабочими процессами. Однако при увеличении числа узлов и рабочих процессов время на пересылку сообщений между рабочими процессами в сравнении со временем вычислений сокращается и быстродействие параллельного алгоритма начинает выигрывать у его последовательной реализации. При этом граница опережения быстродействия параллельных программ зависит от архитектуры параллельной вычислительной системы, а именно от количества и производительности вычислительных узлов и быстродействия транспортных каналов.

Список использованных источников:

1. Горшко И.О. Компьютерная реализация решения систем интегральных уравнений Вольтерры при исследовании многосвязных динамических объектов / И.О. Горшко, В.А. Тихоход // Электронное моделирование. – К., 2007. – Том. 29, № 3. – С. 101-107.

2. Оленев Н.Н. Параллельное программирование в Matlab и его приложения / Н.Н. Оленев, Р.В. Печенкин, А.М. Чернецов. – М. : Вычислительный центр им. А.А. Дородницына: 2007. – 120 с.

Д. О. Топчий

Черноморський державний університет імені Петра Могили, м. Миколаїв

THE THEORY OF PLAFALES: НОВИЙ ПІДХІД ДО КОНСТРУЮВАННЯ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ НА ТРИКУТНИКУ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Трикутники – це перші скінченні елементи. Нагадаємо, що Курант (1943) [1-4] запропонував поділити квадратну комірку МСР на два трикутники, маючи на увазі успішну реалізацію ідеї лінійної інтерполяції на кожному із них. Ідея триангуляції дуже швидко стала звичною. Перші змістовні результати з'явилися після появи ЕОМ. Спочатку застосовували трикутники першого порядку [5]: Тернер, Клаф, Мартін, Топп, Сінг, Галлагер, Педлог, Бейлард. Потім з'явилися трикутники вищих порядків (комплексні моделі): Вебеке, Аргіріс, Феліппа, Зенкевич, Чанг.

Основна мета доповіді – на основі the theory of plafales [6-8] показати основні кроки алгоритму конструювання базисних функцій в МСЕ на основі двовимірного симплексу – трикутника першого порядку. На нашу думку, роль базисних функцій – четверта. ІТ платформи в МСЕ, які можуть бути створеними на основі алгоритмів the theory of plafales [9], містять у собі поняття алгоритмічної складності: завдання (введення) в програмний комплекс базисних (і глобальних базисних) функцій і пошук розв'язання проблеми програмно-апаратним комплексом є функціями часу. Отже, базисні функції – функції часу. Безумовно, невід'ємною складовою частиною вищесказаної ІТ платформи є процес її функціональної візуалізації [10].

Список використаних джерел:

1. Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations / R. Courant // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – V.49. – P.1 -23.
2. Сильвестер П. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков / П. Сильвестер, Р. Феррари. – М. : Мир, 1986. – 229 с.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
4. Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г.И. Марчук, В.И. Агашков. –М. : Мир, 1981. – 416 с.
5. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж. Оден. – М. : Мир, 1976. – 464 с.
6. Topchy D. The theory of plafales: the proof of P versus NP problem / D. Topchy // Best Global Publishing. – 2011. – 634 p.
7. Topchy D. The theory of plafales: the proof algorithms for millennium problems / D. Topchy // Best Global Publishing. – 2013. – 695 p.

8. Topchy D. The theory of plafales: the proof algorithms for millennium problems / D. Topchy. – Best Global Publishing, 2013. – 695 p. – Режим доступу: <http://eleanor-cms.ru/uploads/book.pdf>
9. Topchy D. The theory of plafales: Applications of new cryptographic algorithms and platforms in Military complex, IT, Banking system, Financial market / D. Topchy // XLII KONFERENCJA ZASTOSOWAŃ MATEMATYKI, 2013. – Режим доступу: <http://www.impan.pl/~zakopane/42/Topchy.pdf>
10. Зенкин А.А. Когнитивная компьютерная графика / А.А. Зенкин. – М. : Наука, 1991. – 192 с.

Н. І. Турчина, С. Д. Івасишен

Национальний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

ВЕКТОР-ФУНКЦІЇ ГРІНА КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО РІВНЯННЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА- КОЛМОГОВОРА НОРМАЛЬНОГО МАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСУ

У теорії випадкових процесів виникають параболічні рівняння 2-го порядку, в яких коефіцієнти при похідних 1-го порядку за просторовими змінними є лінійними комбінаціями цих змінних, а інші коефіцієнти сталі. Серед таких рівнянь, зокрема, є рівняння

$$(Lu)(t, x) := \partial_t u(t, x) - \sum_{j=1}^n [a^2 \partial_{x_j}^2 u(t, x) + b \partial_{x_j} (x_j u(t, x))] =$$

$$= f(t, x), t > 0, x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$
(1)

в якому a і b – дійсні сталі, причому $a > 0$.

Розглядаються такі крайові задачі:

$$(Lu)(t, x) = f(t, x), t > 0, x \in \mathbb{R}_+^n, \quad (2)$$

$$(Bu)(t, x) \Big|_{x_n=0} = g(t, x'), t > 0, x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad (3)$$

$$u(t, x) \Big|_{t=0} = \varphi(x), x \in \mathbb{R}_+^n, \quad (4)$$

де $x' := (x_1, \dots, x_{n-1})$, $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$, $B = 1$ (умова Діріхле) або $B = \partial_{x_n}$ (умова Неймана).

Знайдено в явному вигляді та досліджено властивості функцій G_0, G_1 і G_2 таких, що розв'язок задачі (2)–(4) визначається формулою

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_+^n} G_0(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1(t - \tau, x, \xi') g(\tau, \xi') d\xi' +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}_+^n} G_2(t, x, \xi) \varphi(\xi) d\xi, t > 0, x \in \mathbb{R}_+^n.$$

Т. І. Фірман

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЗЛІЧЕННИМИ ГІПЕРБОЛІЧНИМИ СИСТЕМАМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

В області $\Pi = (0, l) \times (0, T)$ розглянемо зліченну лінійну систему гіперболічних рівнянь

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} + \lambda_i(x, t) \frac{\partial y_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(x, t) \cdot y_j + f_i(x, t), \quad i \in \{1, 2, \dots\},$$

в якій λ_i з непарними індексами будуть додатними величинами, а з парними – від’ємними, і впорядковані в кожній точці прямокутника таким чином

$$\lambda_1(x, t) \geq \lambda_3(x, t) \geq \dots \geq \lambda_{2k-1}(x, t) \geq \dots \\ \lambda_2(x, t) \leq \lambda_4(x, t) \leq \dots \leq \lambda_{2k}(x, t) \leq \dots$$

Нехай $I^+ = \{2k - 1 | k = 1, 2, \dots\}$, а $I^- = \{2k | k = 1, 2, \dots\}$. Задамо для системи початкову та крайові умови:

$$y_i(x, 0) = g_i(u(x), x), \quad i = 1, 2, \dots, \\ y_i(0, t) = \sum_{j \in I^+} \alpha_{ij}(u^1(t), t) \cdot y_j(0, t) + h_i(u^1(t), t), \quad i \in I^+, \\ y_i(l, t) = \sum_{j \in I^+} \beta_{ij}(u^2(t), t) \cdot y_j(l, t) + r_i(u^2(t), t), \quad i \in I^-.$$

Вектор-функції керувань u, u^1, u^2 у початковій і крайових умовах неперервно-диференційовні та приймають значення на компактах U, U^1, U^2 , відповідно.

Мішана задача розглядається у просторі C^∞ , елементом якого є зчислення сукупність неперервних функцій, обмежених в сукупності деякою сталою.

Задача полягає в мінімізації цільового функціоналу

$$J(y, u, u^1, u^2) = \int_0^l \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(x) |y_j(x, T)| dx + \\ + \int_0^l \int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} F_j(x, t) |y_j(x, t)| dx dt.$$

на множині допустимих керувань та відповідних траєкторій, які є розв’язками зліченної гіперболічної системи лінійних рівнянь.

Для вихідної задачі побудована вкорочена мішана задача так, щоб їх розв’язки були як завгодно близьким при достатньо великому, але скінченному значенні n . За цих умов значення цільового функціоналу на множині допустимих керувань та траєкторіях вкороченої задачі будуть мало відрізнятися від оптимального значення функціоналу на траєкторіях вихідної задачі [1-3].

Список використаних джерел:

1. Самойленко А.М. Счетные системы дифференциальных уравнений / А.М. Самойленко, Ю.В. Теплинский. – К. : Ин-т математики, 1993. – 308с.
2. Хома Г.П. Вкорочення зчисленної системи диференціальних рівнянь в частинних похідних / Г.П. Хома, В.Т. Яцюк // Укр. мат. журн. – 1971. – №3. – С. 417-420.
3. Аргучинцев А.В. Оптимальное управление гиперболическими системами / А.В. Аргучинцев. – М. : Физматлит. 2007. – 168 с.

В. А. Федорчук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ОБОРОТНА КОМП'ЮТЕРНА МОДЕЛЬ КОЛОНИ БУРИЛЬНИХ ТРУБ ЯК НЕОДНОРІДНОЇ РОЗПОДІЛЕНОЇ ЛАНКИ

Для підвищення техніко-економічних показників при бурінні свердловин необхідно розробити ефективні моделі основних ланок бурової установки з метою їх використання на етапі проектування обладнання, а також в автоматизованих системах керування.

Колону бурильних труб, із врахуванням ряду припущень, можна вважати пружним стержнем з розподіленою масою, пружністю та в'язким тертям [1]. До нижнього кінця колони прикладена осьова реакція забюю і реакція долота, а по довжині – розподілені сили ваги, в'язкого тертя, інерції. В буровій колоні присутні три види деформації – кручення, згинута розтягу-стиску. Деформація кручення впливає на динаміку обертального руху долота, яке, внаслідок перекочування шарошок, впливає на динаміку поздовжнього руху колони.

Для опису динаміки поздовжнього та обертального руху колони використовуються відповідно рівняння

$$m(x) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} + h(x) \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} - k \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial F(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}, \quad (1)$$

$$J \frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} - GJ_p \frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial M(x,t)}{\partial t}, \quad (2)$$

з граничними та початковими умовами, які залежать від постановки задачі моделювання, $det(x)$ – погонна маса колони; $h(x)$ – погонний коефіцієнт опору колони; k – коефіцієнт пружності; $F(x,t)$ – погонна зовнішня сила; $T(x,t)$ – погонна сила тяжіння; $V(x,t)$ – швидкість руху перерізу колони; ω – частота обертання колони; J – момент інерції; G – модуль зсуву; M – момент кручення; τ – коефіцієнт опору обертального руху; J_p – полярний момент інерції.

Застосувавши метод прямих до рівнянь (1), (2) та проінтегрувавши їх, отримаємо дві системи з n диференціальних рівнянь кожна:

$$m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} + h_i \frac{\partial x_i}{\partial t} - k(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) = F_i - T_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (3)$$

$$J_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} + \tau_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - GJ_{pi} (\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}) = M_i \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

де x_i – координата i -го елемента колони; F_i – зовнішня сила, що діє на i -й елемент; T_i – сила тяжіння, що діє на i -й елемент; h_T – коефіцієнт опору, що діє на i -й елемент; k_T – коефіцієнт пружності для i -го елемента; φ_i – кут зсуву i -го елемента; M_i – момент кручення, що діє на i -й елемент τ_i – коефіцієнт опору обертовому руху i -го елемента колони; J_{pi} – полярний момент інерції i -го елемента колони.

Момент опору при обертовому русі колони в промивній рідині, обчислюється за формулою Маргулеса

$$\tau = 4\pi\eta h \varepsilon^2 \omega ((\varepsilon^2 - 1)r_T)^{-1}; \quad \varepsilon = R_C r_T^{-1},$$

де η – коефіцієнт в'язкості для промивної рідини; h – довжина ділянки колони; R_C – радіус свердловини; r_T – зовнішній радіус перерізу бурильної труби.

Після еквівалентних перетворень для числової реалізації i -х диференціальних рівнянь систем (3) та (4) отримано структурну ланку у вигляді підсистеми simulink-моделі, яка складає основу для синтезу структурної комп'ютерної моделі. З'єднання підсистем здійснюється у відповідності до систем рівнянь (3)-(4) (рис.1).

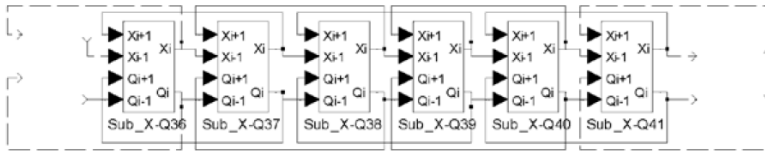


Рис. 1. Структурна реалізація бурильної колони

Модель бурильної колони має ряд важливих властивостей. По-перше, дискретизація колони на ланки із зосередженими масами дає можливість для кожної ланки проводити уточнення моделі шляхом врахування певних особливостей на ділянках колони, в тому числі і нелінійних залежностей. По-друге, за рахунок організації прямих та зворотних зв'язків між ланками, модель є оборотною, що дає змогу здійснювати входні впливи та отримувати результати на рівні будь-якої структурної ланки моделі.

Отримана структурна модель може використовуватись як на стадії проектування обладнання бурової установки, так і на стадії компонування бурильної колони, а також в системі керування при проходці свердловини для підтримки оптимальних режимів буріння та для оптимізації спуско-підйомних робіт.

Список використаних джерел:

1. Харченко Е.В. Динамические процессы буровых установок / Е.В. Харченко. – Львов : Свит, 1991. – 176 с.

Т. А. Федорчук

Кам'янець-Подільська ЗОШ 1-3 ст. №10, м. Кам'янець-Подільський

МОДЕЛЮВАННЯ ЯК ЗАСІБ РОЗВИТКУ ТЕОРЕТИЧНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ МОЛОДШИХ КЛАСІВ

Діючі програми початкової школи вимагають розвитку самостійності дітей у розв'язуванні текстових задач. Кожен учень повинен вміти коротко записати умову задачі, ілюструючи її за допомогою малюнка, схеми або креслення, вміти довести кожен крок аналізі задачі і в її розв'язуванні, перевірити правильність розв'язування.

Але на практиці ці вимоги виконуються не повністю (в основному, це короткий запис по аналогії і відповіді учнів на запитання вчителя при аналізі задачі). Це і призводить до серйозних прогалин в знаннях та навичках учнів. Наприклад: кожен учитель може провести ось такий невеличкий експеримент. Дати учням розв'язати задачі, які раніше були розв'язані в класі або дома. Хоч задачі і були розв'язані, але не всі справляться з цією роботою.

Чому? Чому саме так сталося? Якщо добре продумати помилки, які будуть допущені учнями, то стає зрозумілим, що *учні не усвідомили, не уявили собі життєвої ситуації*, відображеної в задачі, *не співставили відношення між величинами*, залежність між даними і шуканими величинами, а, тому-то, механічно маніпулювали числами.

Спостереження показують, що основна причина в тому, що учні не вміють розв'язувати текстових задач – це неправильна організація первинного сприйняття учнями умови задачі і її аналіз, які проводяться без відповідної опори на життєву ситуацію, яка відображена в задачі, без її предметного або графічного моделювання (відрізки, квадратики, кружечки...)

Як правило, при аналізі задачі використовуються лише різні види запису умови задачі або готові схеми.

Крім того, при фронтальному аналізі задач правильні відповіді двох-трьох учнів записуються рештою учнів без глибокого їх *розуміння*.

Щоб позбутися цих недоліків, потрібно покращити, а можливо, змінити методику організації первинного сприйняття умови задачі, щоб забезпечити свідомий і доказовий вибір арифметичної дії всіма учнями.

Головне для кожного учня на цьому етапі – зрозуміти задачу, тобто уявити, зрозуміти про що саме ця задача, що в ній відомо, про що потрібно дізнатись, як пов'язані між собою дані величини, які відношення між даними і шуканими величинами.

Для цього необхідно вже з 1 класу вчити учнів розбивати задачу за змістом на частини і моделювати ситуації, відображені в задачі.

Моделювання – це заміна дій з реальними предметами діями з їх зменшеними зразками, моделями, макетами, а також графічним зображенням (малюнком, кресленням, схемою, таблицею).

При цьому реальні предмети (люди, тварини, рослини, механізми...) можуть мати умовне позначення (квадрати, кружечки, прямокутники, відрізки тощо).

Креслення відрізків являє собою умовне зображення предметів, відношення між величинами за допомогою відрізків з дотриманням певної мірки (масштабу).

Креслення, на якому передаються наближені величини, без точного дотримання мірки – називається схематичним кресленням, або схемою.

Предметне і математичне моделювання математичної ситуації при розв’язуванні текстових задач практикується за підручниками математики, але без відповідної системи і послідовності. Лише в перших класах наочність стоїть на першому місці.

Звідси, в II-IV класах основними засобами наочності при аналізі задачі стає короткий запис умови задачі і лише зрідка застосовуються готові схеми або таблиці.

Отже, наочність, особливо графічна, потрібна протягом всього навчання, як важливий засіб розвитку абстрактного мислення і формування математичних понять. Малюнки, схеми і креслення допомагають учням свідомо встановлювати залежність між величинами, активно мислити, шукати раціональні шляхи та способи розв’язування текстових задач.

Список використаних джерел:

1. Александрова Е.І. Методика навчання математиці в початковій школі, 1 клас / Е.І. Александрова. – М. : Віта-Прес, 2004. – 184 с.

Т. М. Фратавчан*, **Г. П. Івасюк***,
С. Д. Івасишен**

*Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці,

**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

ПРО ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ’ЯЗКІВ ДЕЯКИХ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОВОРА

Розглядається ультрапараболічне рівняння типу Колмогорова вищого порядку

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_2} x_{2j} \partial_{x_{3j}} - \sum_{|k_l|=2b}^{n_3} a_{k_l} \partial_{x_l}^{k_l} \right) u(t, x) = 0, (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

де n_1, n_2, n_3, n і b – задані натуральні числа, причому $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ і $n := n_1 + n_2 + n_3$; $x := (x_1, x_2, x_3)$; $x_l := (x_{l1}, \dots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$;

$a_{k_l}, |k_l| = 2b$, – задані дійсні числа. Для такого рівняння встановлено існування фундаментального розв’язку задачі Коші та одержано його оцінки на необмежених часових інтервалах. Ці результати застосовуються до виведення інтегральних зображень розв’язків на необмежених часових

інтервалах, доведення теореми про стійкість нульового розв'язку і теорем Ліувілля, а також установлення коректної розв'язності задачі Коші на необмеженому часовому інтервалі та задачі без початкових умов. Подібні результати для рівнянь 2-го порядку наведено в [1].

Список використаних джерел:

1. Івасишен С.Д. Про властивості розв'язків деяких ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова на необмежених часових інтервалах / С.Д. Івасишен, Г.П. Івасюк, Т.М. Фрагавчан // Наук. вісник Чернівецького нац. у-ту. Серія: Математика. – Чернівці, 2011. – Т.1, №1-2. – С. 47-56.

Ю. О. Фуртат*,

Д. Велев**

*Інститут проблем моделювання в енергетиці

ім. Г.Є. Пухова НАН України, м. Київ,

**Університет національного і світового господарства, м. Софія, Болгарія

ПРО СТРУКТУРУ І ФУНКЦІОНАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ ПЕРСОНАЛІЗАЦІЇ ІНТЕРФЕЙСІВ АВТОМАТИЗОВАНИХ СИСТЕМ

Задача створення інформаційних технологій та програмних засобів, що забезпечують ефективну взаємодію користувача з системою та динамічну адаптацію до функціональних завдань, що змінюються, є актуальною через постійне зростання складності автоматизованих систем та вимог до їх надійності, глобальне охоплення різноманітних сфер людської діяльності, виникнення інформаційних перевантажень користувача.

Одним з напрямів, що забезпечують розв'язання даної задачі, є створення автоматизованих систем, оснащених засобами адаптації користувацьких інтерфейсів до когнітивних особливостей та специфіки діяльності оператора системи.

Для розв'язання проблеми інформаційного перевантаження необхідно застосовувати адаптивний підхід до організації представлення інформації, який, на відміну від застосовуваного в наш час ергономічного підходу, враховує особливості сприйняття інформації конкретним користувачем складної системи на основі його когнітивного портрета й забезпечує підвищення комфортності сприйняття інформації та ефективності професійної діяльності користувача. Створення когнітивного портрету відбувається за рахунок діагностування когнітивних та психофізіологічних характеристик користувача – в оперативному режимі на робочому місці чи під час роботи з професійним психологом [1].

Для забезпечення адаптації ЛМС до змін функціональних завдань з часом чи в залежності від конкретних задач користувачів необхідно передбачити можливість настройки сценарію взаємодії системи з користувачем [2].

Пропонується включення до складу програмного комплексу адаптації користувачьких інтерфейсів автоматизованих систем наступних функціональних блоків:

- блок «конструктор діалогу»;
- блок «конструктор інтерфейсу»;
- блок діагностування когнітивних та психофізіологічних характеристик користувача.

Робота функціональних блоків тісно пов'язана з базою даних, де для кожного користувача та типу діяльності зберігається настановлений профіль з характеристиками, необхідними для управління інформаційними потоками в системі. За рахунок можливості настройки цих профілів забезпечується властивість функціональної адаптивності всієї автоматизованої системи та підвищення ефективності її функціонування.

Список використаних джерел:

1. Верлань А.Ф. Особенности оперативного тестирования на рабочем месте операторов систем поддержки принятия решений (СППР) / А.Ф. Верлань, М.Ф. Сопель, Ю.О. Фуртат // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка. – 2010. – Вип. 3. – С. 37-45.
2. Когнитивные основы и особенности моделирования диалогового процесса / А.Ф. Верлань, И.А. Чмырь, Д. Велев, Ю.О. Фуртат // IV Международная конференция «Моделирование-2012», 16-18 мая 2012 г. – К. : ИПМЭ им. Г.Е.Пухова НАН Украины, 2012. – С. 442-445

Я. В. Ходневич

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, м. Київ

РЕЗУЛЬТАТИ МОДЕЛЮВАННЯ ІНТЕНСИВНОСТІ ВОДНОГО ПОТОКУ ПРИ ОЦІНЦІ ДЕФОРМАЦІЙ РУСЛА В МІСЦІ ОБТІКАННЯ ДОННИХ ГРЯД

Пропонуються результати дослідження інтенсивності руслового потоку при обтіканні донної гряди в залежності від кута її розташування та висоти. Дослідження ґрунтується на чисельному моделюванні сили опору дна в області за донною грядою. Припускалося, що сила опору дна в цілому характеризує швидкість утворення, переформування або зникнення донних гряд, а сила опору, яка діє на одиницю дна (дотичне напруження), характеризує інтенсивність місцевого розмиву. Сила опору дна залежить від двох суттєвих факторів – кута розташування та відносної висоти гряди [1].

Чисельне моделювання сил опору дна в місці обтікання донної гряди виконувалось для умов прямолінійного русла, яке складене гравійно-гальковими ґрунтами. Задавались середній нахил русла, середній діаметр часток ґрунту і коефіцієнт шорсткості русла, відносна висоти гряди, ви-

трати води і ширини русла різної забезпеченості. Розглядалися такі випадки розташування донної гряди в русловому потоці: 1) кут між транзитним потоком і віссю гряди приймає значення від 25 до 60 градусів; 2) висота гряди становить 1/3 та 1/2 глибини потоку. В залежності від кута розташування гряди та її висоти задавалися відносні середні швидкості турбулентного потоку в області за донною грядою.

Результати комп'ютерного моделювання в цілому відповідають натурним та експериментальним даним щодо умов, за яких відбувається формування і змив руслових гряд [1]. Встановлено наступне: 1) при висоті донної гряди, яка складає 1/3 глибини потоку, найбільші деформації русла можуть відбуватися при її розташуванні під кутом 35-40 градусів до набігаючого потоку; 2) гряди наносів з висотою 1/2 глибини потоку із збільшенням потужності руслової течії розмиваються та існувати не можуть.

Список використаних джерел:

1. Щодро А.Е. Исследование структуры и размывающей способности потока за донными уступами и грядами / А.Е. Щодро // Вестник НТУ Украины. Машиностроение. – К., 2000. – Вып. 38, Т. 2. – С. 205-209.

А. М. Цебенко

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ, СТАН ЯКИХ ОПИСУЄТЬСЯ ЗАДАЧЕЮ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Задача, яку ми досліджуємо, формулюється так. Нехай Ω – область в \mathbb{R}^n з кусково – гладкою межею Γ , $S := (-\infty, 0]$, $Q := \Omega \times S$, $\Sigma := \Gamma \times S$, $\Sigma_\tau := \Gamma \times [\tau, 0]$, де $-\infty \leq \tau < 0$. Припустимо, що $U = L^2(\Sigma_\tau)$ – простір керувань, а $U_\partial \subset U$ – множина допустимих керувань. Нехай $\omega < 1$, $\alpha : S \rightarrow (0, +\infty)$, $0 < \inf_{t \in S} \alpha(t) \leq \sup_{t \in S} \alpha(t) < \infty$. Вважаємо, що g – довільний

елемент простору $L^2(\Sigma)$, а функція $f \in L^2_{\text{loc}}(S; X)$ така, що

$$\int_s [\alpha(t)]^{-1} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} |f(\cdot, t)|^2_{L^2(\Omega)} dt < \infty.$$

Стан керованої системи $y(v) = y(x, t; v)$, $(x, t) \in Q$, при заданому керуванні $v \in U$ визначаємо як функцію з простору $L^2_{\text{loc}}(S; H^1(\Omega))$, що (в узагальненому сенсі) є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} - \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x, t) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x_j}) + a_0(x, t) y(x, t) = f(x, t) \quad \text{в } Q,$$

який задовольняє крайові умови

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial v_A} = g(x,t) + v(x,t) \quad \text{на } \Sigma_\tau, \quad \frac{\partial y(x,t)}{\partial v_A} = g(x,t) \quad \text{на } \Sigma \setminus \Sigma_\tau,$$

та умову

$$\int_S \alpha(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s) ds} |y(\cdot, t)|_{H^1(\Omega)}^2 dt < \infty,$$

де

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial v_A} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial y(x,t)}{\partial x_j} \cos(v, x_i); \quad a_{ij} \in L^\infty(Q)$$

та

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geq \alpha(t) (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) \quad \forall \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}, (x,t) \in Q.$$

Функцію вартості визначаємо так:

$$J(v) = |y(\cdot, 0; v) - z_0|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu |v|_{L^2(\Sigma_\tau)}^2, \quad v \in L^2(\Sigma_\tau),$$

де $z_0 \in L^2(\Omega)$ – заданий елемент, $\mu > 0$ – стала.

Задача оптимального керування, яка нас цікавить, полягає у відшуванні керування $u \in U_\varnothing$ (оптимального керування) такого, що

$$J(u) = \inf_{v \in U_\varnothing} J(v).$$

Отримано умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі. Також знайдено співвідношення, що характеризують оптимальне керування.

Проведене нами дослідження суттєво опирається на результати, які містяться в працях [1-3].

Список використаних джерел:

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – М. : Мир, 1972.
2. Бокало М. Оптимальне керування еволюційними системами без початкових умов / М. Бокало // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2010. – Вип. 73. – С. 85-113.
3. Бокало М.М. Задача оптимального керування еволюційними системами без початкових умов / М.М. Бокало // Нелінійні граничні задачі. – 2010. – Вип. 20. – С. 14-27.

Я. М. Чабанюк, П. П. Горун, Л. В. Гошко

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА СТРИБКОВОЇ ПРОЦЕДУРИ СТОХАСТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В СХЕМІ ДИFUЗИЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Стрибкова процедура стохастичної оптимізації (PCO) у схемі дифузійної апроксимації в марковському середовищі із сингулярним збуренням функції регресії задається співвідношенням (покладемо

$$\sum_{n=0}^{-1} a_n^e \nabla_b C(u_n^e; x_n^e) = 0) [1]:$$

$$u^\varepsilon(t) = u + \sum_{n=0}^{v(t/\varepsilon^{1/\gamma})-1} a_n^\varepsilon C^\varepsilon(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon), \quad u^\varepsilon(0) = u, t \geq 0, \quad (1)$$

де γ – показник нормування часу, v – лічильний процес моментів відновлення марковського процесу (МП).

Для узагальнення результатів розглянуто керуючі функції $a(t) = a/t^\alpha, a > 0, b(t) = b/t^\beta, b > 0$, де α, β такі, що забезпечують умови збіжності ПСО (1) (див. [2, Теорема 1]):

$$\sum_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty, \quad \sum_{t=0}^{\infty} a^2(t) < \infty, \quad \sum_{t=0}^{\infty} a(t)b(t) < \infty.$$

В ПСО (1) мають місце вкладеності: $u_n^\varepsilon = u(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon), a_n^\varepsilon = a(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon = \tau_n / \varepsilon^{1/\gamma}, n \geq 0$, де τ_n моменти марковського відновлення рівномірно ергодичного МП $x(t), t \geq 0$ в стандартному фазовому просторі (X, Ξ) .

Функція $C^\varepsilon(u; x) = \nabla_b C(u; x) + \varepsilon^{-c_0} C_0(u; x), c_0 > 0, u \in P, x \in X$ задовільняє умови існування глобального розв'язку супроводжуваних систем: $du_x(t)/dt = C^\varepsilon(u_x(t); x), x \in X$.

Для функції регресії $C(u; x)$ та збурення $C_0(u; x)$ виконуються умови балансу $\tilde{\Pi} C_0(0; x) = 0$ та $\tilde{\Pi} C_0'(0; x) = 0$ відповідно, де $\tilde{\Pi}$ – проектор, що визначається стаціонарним розподілом вкладеного ланцюга Маркова (ВЛМ) $x_n, n \geq 0$, тобто $\tilde{\Pi} \varphi(x) = \int_X \rho(dx) \varphi(x)$.

Для функції регресії $C(u; \cdot) \in C^4(P)$ має місце представлення: $\nabla_b C(u; x) = (C(u + b; x) - C(u - b; x)) / 2b$, де $u = u(t), b = b(t)$ (для збурення $C_0(u; x) \in C^4(P)$ – аналогічно).

Нормовані флуктуації ПСО (1) розглядаються у вигляді:

$$v^\varepsilon(t) = \frac{t^\gamma}{\varepsilon} \tilde{u}^\varepsilon(t), \quad \tilde{u}^\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{t^\gamma} v^\varepsilon(t), \quad \tilde{u}^\varepsilon(t) = u_0 + \sum_{n=0}^{v(t/\varepsilon^{1/\gamma})-1} a_n^\varepsilon \nabla_b C(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon).$$

Для зручності введемо позначення:

$$\rho^2 = 2 \int_X \pi(d) \vartheta(q(x) C_0(x) R_0 q(x) C_0(x) - q \int_X \rho(dx) C_0^2(x));$$

$$d_1 = -q \int_X \rho(dx) C''(0; x); \quad d_2 = -q \int_X \rho(dx) C_0''(0; x); \quad k = ad_1 - \gamma.$$

Теорема. При виконанні умов збіжності ПСО (1), а також при додаткових умовах: A1: $\rho^2 > 0$; A2: $d_1 > 0, d_2 > 0$; A3: $k > 0$ має місце слабка подвійна збіжність процесів:

$$(v^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta(t), C_0^\varepsilon(t) \Rightarrow \sigma(t)w(t), \varepsilon \rightarrow 0)$$

де $\sigma^2(t) = (a^2 \rho^2 q^2) / t^2$ в кожному скінченному інтервалі $0 < t_0 < t < T < \infty$.

Двокомпонентний граничний процес $(\zeta(t), \sigma(t)w(t), t > 0)$ є гетерогенним в часі дифузійним процесом.

Список використаних джерел:

1. Горун П.П. Генератор стрибкової процедури оптимізації в марковському середовищі / П.П. Горун, Я.М. Чабанюк, В.Р. Кукурба // XVI International Conference «Problems of decision making under uncertainties» (PDMU-2010, October 4-8, 2010). – К. : Освіта України. – С. 54.
2. Чабанюк Я.М. Збіжність дискретної процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації / Я.М. Чабанюк, П.П. Горун // Збірник наукових праць інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України та Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія: Фізико-математичні науки. – 2012. – №6. – С. 234-248.
3. Korolyuk V. Stochastic Systems in Merging Phase Space / V. Korolyuk, N. Limnios. – World Scientific Publishing, 2005. – 330 p.

К. С. Чевська

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ВИКОРИСТАННЯ ДОДАТКІВ OFFICE365 ДЛЯ ОРГАНІЗАЦІЇ СПІЛЬНОЇ РОБОТИ

Традиційно, майже вся робоча документація зберігається у вигляді файлів на локальних комп'ютерах, на загальних мережевих ресурсах або переносних пристроях, що зберігаються у той чи іншій людині. Обмін цією інформацією відбувається шляхом відсилання копій файлів електронною поштою або безпосередньо з «рук в руки». Це практично унеможлиблює спільну роботу над документами, оскільки кожен учасник робочого процесу редагує свою копію документа і при поєднанні кінцевих варіантів в один спільний документ, часто виникає ряд проблем, які доводиться довго виправляти.

В організації спільної роботи не є винятком і навчальні заклади. Досить часто в своїй роботі викладачам доводиться працювати над спільними проектами. Якщо цей документ зберігати на загальному мережевому ресурсі, то одночасно його можуть переглядати кілька користувачів, а редагувати має право тільки один. Це не завжди зручно, оскільки найчастіше документ потрібен одразу всім.

Завдяки підключенню університету до програми Microsoft Office365, ця робота значно спрощується. Збереження документів Word, Excel, PowerPoint і OneNote в бібліотеках Office365, дозволяє користувачу отримувати доступ до них у веб-браузері, а також спільно працювати з ними за допомогою Office Web Apps одночасно з іншими користувачами. Це значить, що не потрібно чекати, доки хтось закінчить редагувати документ, щоб внести свої дані.

Для початку роботи необхідно лише створити або зберегти документ в своїй бібліотеці OneDrive або на сайті групи, та надати спільний доступ необхідним користувачам.

Під час спільної роботи документ Word редагується звичайним чином. Якщо одночасно з ним також працюють інші користувачі, додаток повідомляє про це, вказуючи абзаци, над якими вони працюють. Додаток Word Online також повідомляє, коли той чи інший користувач приєднався до роботи або вийшов з документа.

Активний розвиток інформаційних технологій, зокрема, у сфері освіти, дає можливість значно спростити спільну роботу викладачів та студентів і використання додатків Office365яскравий тому приклад.

М. Г. Чепелєв

ДУ «Інститут економіки та прогнозування НАН України», м. Київ

ОЦІНКА ЕЛАСТИЧНОСТІ ЗАМІЩЕННЯ МІЖ ПРАЦЕЮ ТА КАПІТАЛОМ ДЛЯ МОДЕЛІ ЗАГАЛЬНОЇ РІВНОВАГИ УКРАЇНИ

Серед модельних засобів, що використовуються для аналізу заходів економічної, соціальної та екологічної політики, важливе місце посідають обчислювані моделі загальної рівноваги (ОМЗР). Можливість дослідження широкого кола питань, ґрунтовна емпірична база та системність опису ключових економічних процесів зробили ОМЗР невід’ємним інструментом прикладного аналізу провідних міжнародних організацій [1].

У процесі розробки та використання моделей цього типу, наряду з питаннями специфікації форм функціональних залежностей, визначення поведінкових принципів економічних агентів та формулювання умов рівноважного стану, важливе місце посідає проблема оцінки величин екзогенних змінних. І якщо частину значень цих параметрів можна оцінити однозначно на основі збалансованого набору вхідних даних моделі – матриці соціальних рахунків (аналог таблиці витрати-випуск, доповнений інформацією щодо трансфертів між економічними агентами) – для деяких параметрів необхідно залучати додаткові джерела інформації. До цієї категорії змінних належать, зокрема, еластичності заміщення виробничого блоку (в абсолютній більшості ОМЗР, включаючи і модель економіки України, для опису виробничих процесів використовуються виробничі функції (ВФ) з постійними еластичностями заміщення (ПЕЗ)), величини яких показують відсоткову зміну відносною кількості використання товарів при зміні відносних цін цих товарів на 1%. При цьому, економічна сутність еластичностей обумовлює суттєву залежність не лише кількісних, а і якісних характеристик результатів розрахунків від значень цих параметрів [2].

Часта відсутність надійних статистичних даних призвела до поширення практики оцінки значень еластичностей на основі експертних припущень та огляду літературних джерел. І хоча такий підхід має ряд переваг, зокрема, не вимагає значних ресурсів, дозволяє оцінити еластичності для будь-якого рівня групування аргументів та уникає критики Лукаса, його використання в прикладних дослідженнях часто супроводжується виправданими зауваженнями щодо суттєвої емпіричної необґрунтованість, а також географічної та

часової неадекватності отриманих величин. Враховуючи практично повну відсутність досліджень з відповідної тематики для країн, що розвиваються, загалом, та України, зокрема, емпірична оцінка хоча б частини цих параметрів, навіть враховуючи всі недоліки економетричного підходу, видається задачею актуальною, передусім, в рамках залучення додаткового статистичного обґрунтованого джерела інформації.

Як показав аналіз наявних ретроспективних даних, проведений в контексті використаних в ОМЗР України форм функціональних зв'язків, серед шуканих значень екзогенних змінних, найбільш доступною для емпіричного оцінювання є еластичність заміщення між компонентами валової доданої вартості: працею та капіталом. Даний висновок опосередковано підтверджується частотою економетричних оцінок цього типу змінних в інших публікаціях.

У процесі дослідження, еластичність заміщення знаходилась на базі економетричної оцінки параметрів рівняння

$$VA = A \cdot (\alpha \cdot K^\rho + (1 - \alpha) \cdot L^\rho)^{\frac{1}{\rho}}, \quad A \in [0, \infty), \alpha \in [0, 1], \rho \in (-\infty, 0) \cup (0, 1],$$

де VA – валова додана вартість (ВДВ), отримана шляхом дисконтування ВДВ таблиць "витрати-випуск" в основних цінах, агрегована за 15 видами економічної діяльності; K – основні засоби (ОЗ) у фактичних цінах на кінець року, отримані шляхом множення вартості ОЗ у базовому році (2003) на загальні індекси динаміки ОЗ; L – середня кількість працівників в еквіваленті повної зайнятості.

Всі зазначені показники були взяті за період 2003-2009 рр., при цьому вибір 2009 р. в якості верхньої межі часового проміжку обумовлений зміною статистичної методології розрахунку середньооблікової кількості штатних працівників починаючи з 2010 р.

Використана процедура оцінки еластичностей полягає в знаходженні екстремуму функції 3-х змінних, яка у загальному випадку може мати більше одного локального мінімуму. Тому, при розв'язанні даної задачі, доцільно брати різні початкові умови та порівнювати результати якості апроксимації та величини оцінених параметрів. В цьому контексті, враховуючи множину допустимих значень, в роботі було досліджено 11000 наборів початкових значень a , α та ρ . Крім того, було розглянуто два варіанти галузевої дезагрегації в процесі оцінки еластичностей. У першому випадку висувалося припущення про рівність еластичностей заміщення між працею та капіталом для всіх видів економічної діяльності (агреговане оцінювання). У другому випадку еластичності заміщення оцінювались окремо для видів економічної діяльності А-Е (реальний сектор економіки) та F-О (сфера послуг).

Як показують проведені розрахунки, залежно від секторальної дезагрегації, значення еластичностей заміщення між працею та капіталом лежать в проміжку 0,26-0,30, що загалом не суперечить результатам економетричних оцінок інших робіт та величинам параметрів, що викорис-

товуються в прикладних дослідженнях. Водночас, навіть враховуючи аргументи про відносно невеликий обсяг ретроспективних даних та ряд складнощів методологічного характеру, отримані результати ставлять під сумнів доцільність використання певних класів ВФ для моделювання відповідних процесів. Зокрема, досить поширених, в цьому контексті, ВФ Кобба-Дугласа, які мають одиничну еластичність заміщення. Загалом же, враховуючи специфіку інструментарію ОМЗР, отримані оцінки можуть виступати лише базовими значеннями екзогенних параметрів, які доцільно змінювати в процесі проведення аналізу чутливості та перевірки надійності результатів моделювання.

Список використаних джерел:

1. Devarajan S. The influence of computable general equilibrium models on policy [Електронний ресурс] / S. Devarajan, S. Robinson // International Food Policy Research Institute. – TMD Discussion Paper No. 98. – 2002. – 34 p. – Режим доступу: <http://ageconsearch.umn.edu/bitstream/16267/1/tm020098.pdf>
2. Koesler S. Substitution Elasticities in a CES Production Framework. An Empirical Analysis on the Basis of Non-Linear Least Squares Estimations [Електронний ресурс] / S. Koesler, M. Schymura // ZEW – Centre for European Economic Research. – Discussion Paper No. 12-007. – 2012. – 25 p. – Режим доступу: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2014655

І. М. Черевко, А. Б. Дорош

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Розглядається крайова задача

$$y''(x) = p_1(x)y'(x) + q_1(x)y(x) + p_2(x)y'(x - \tau(x)) + q_2(x)y(x - \tau(x)) + f(x), x \in [a; b], \quad (1)$$

$$y^{(j)}(x) = \varphi^{(j)}(x), j = 0, 1, x \in [a^*; a], y(b) = \gamma, \quad (2)$$

де $p_i(x), q_i(x), i = 1, 2$ – неперервні на $[a; b]$ функції, $\varphi(x)$ – задана на $[a^*; a]$ неперервно-диференційовна функція, $\gamma \in R$. Запізнення $\tau(x) \geq 0$ – така неперервна на $[a; b]$ функція, що існує скінченна множина $E = \{x_i \in [a; b], i = \overline{1, l}\}$, таких що $x_i - \tau(x_i) = a$,

$$a^* = \min_{x \in [a; b]} (x - \tau(x)).$$

Розв'язком крайової задачі (1)-(2) будемо вважати функцію $y = y(x)$, яка задовольняє рівняння (1) (за можливим винятком точок $x_i, i = \overline{1, l+1}$) та крайові умови (2) [1].

Запропоновано ітераційний процес знаходження наближеного розв'язку задачі (1)-(2) у вигляді послідовності інтерполяційних кубічних сплайнів дефекту два. Обґрунтовано збіжність запропонованої схеми наближення розв'язку крайової задачі (1)-(2) та досліджено точність апроксимації. Наведено результати чисельних експериментів для модельних крайових задач із запізненням, які підтверджують одержані теоретичні результати.

Список використаних джерел:

1. Nikolova T.S., Bainov D.D. Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary problems for a class of functional-differential equations // *Yokohama Math. J.* – 1981. – 29, №1. – P.108-122.

О. Ю. Чмир, О. О. Карабин

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ ПАКЕТУ MAPLE ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИБЛДНИХ ЗАДАЧ В КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

У курсі вищої математики, що викладається в вищих навчальних закладах технічного спрямування, важливе місце займають прикладні задачі. Без застосування прикладних задач в навчальному процесі в студентів складається уявлення про вищу математику, як про абсолютно абстрактну, відірвану від життя дисципліну. Глибоке розуміння і ефективне сприйняття навчального матеріалу з цієї дисципліни є неможливим без широкого використання прикладних задач. Сучасні технічні засоби навчання та комп'ютерні програми допомагають викладачу в підготовці до занять, в ілюстрації навчального матеріалу задачами прикладного характеру, в демонстрації міжпредметних зв'язків кожного розділу вищої математики.

Одним із складних для сприйняття розділів вищої математики є ряди Фур'є. Теоретичний матеріал є громіздкий, завдання для розв'язування на практичних заняттях також є громіздкими. Оживити та осучаснити навчальний процес можна за допомогою прикладного пакету Maple, застосувавши його до ілюстрації розв'язку задачі. Розглянемо задачу, яка показує застосування рядів Фур'є в електротехніці.

Задача. Знайти миттєве значення синусоїдального струму в контурі, що складається з ємності та індуктивності.

Методика розрахунку електричних кіл несинусоїдального струму полягає в тому, що задана несинусоїдальна періодична напруга або струм джерела аналітично подають у вигляді гармонічного ряду Фур'є, після чого виконують розрахунок кола по кожній гармоніці або діючих значеннях струмів (або напруг) на окремих ділянках.

Відомо, що в контурі, який складається з ємності та індуктивності, ємність сприяє збільшенню вищих гармонік у кривій струму, істотно спотворюючи її в порівнянні із кривою напруги живлення. Індуктивність, навпаки, придушує вищі гармоніки в складі струму, згладжуючи криву

струму і наближаючи її форму до вигляду першої гармоніки подавання напруги джерела [1].

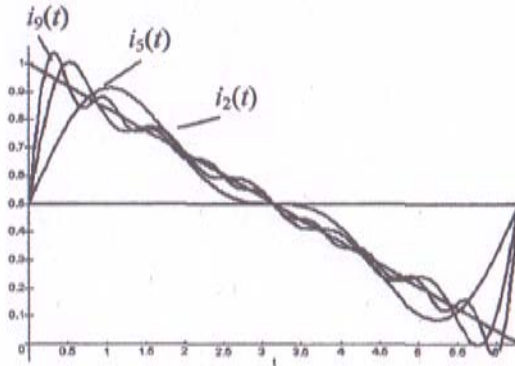
Фактична постановка задачі приводить до розкладання в ряд Фур'є функції $i(t) = I_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)$ в інтервалі $[0; T]$, де $i(t)$ задовольняє умови Діріхле. Наближення функції $i(t)$ тригонометричними многочленами

$$i_2(t) = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{\pi} \sin \omega t + \frac{I_0}{2\pi} \sin 2\omega t ,$$

$$i_5(t) = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{\pi} \sin \omega t + \frac{I_0}{2\pi} \sin 2\omega t + \frac{I_0}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{I_0}{4\pi} \sin 4\omega t + \frac{I_0}{5\pi} \sin 5\omega t ,$$

$$i_9(t) = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{\pi} \sin \omega t + \frac{I_0}{2\pi} \sin 2\omega t + \frac{I_0}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{I_0}{4\pi} \sin 4\omega t + \frac{I_0}{5\pi} \sin 5\omega t + \frac{I_0}{6\pi} \sin 6\omega t + \frac{I_0}{7\pi} \sin 7\omega t + \frac{I_0}{8\pi} \sin 8\omega t + \frac{I_0}{9\pi} \sin 9\omega t ,$$

що є відповідно частковими сумами ряду Фур'є, наведені на рисунку.



Такі графіки будуюмо з допомогою пакету Maple. Зображення тригонометричних многочленів дає змогу показати наочно точність наближення функції.

Список використаних джерел:

1. Герасимчук В.С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах : навч. посіб. [Ч.3]. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля. Ряди. Прикладні задачі / В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.І. Кравцов. – К. : Книги України ЛТД, 2009. – 400 с.

Л. В. Шамрай*,
К. О. Бориславська**

*Дунаєвська ЗОШ I-III ступенів №3, м. Дунаївці,

**Слобідкоракнівська ЗОШ I-II ступенів, м. Дунаївці

ПЕРСОНАЛЬНИЙ САЙТ ЯК ОСВІТНІЙ ІНСТРУМЕНТ САМОРОЗВИТКУ ВЧИТЕЛЯ І ВЗАЄМОДІЇ З УЧНЯМИ ТА КОЛЕГАМИ

Широке використання можливостей Інтернету для поліпшення організації та якості освіти за останні роки стало реалією. Чимало вчителів школи створюють індивідуальні сайти.

Особистий досвід переконав, що для вчителя наявність власного сайту становить майже необхідність, оскільки в недостатньо розвинутому українському сегменті Інтернету практично немає освітніх серверів задовільної якості, які б надавали можливості для створення власної сторінки в рамках певної великої мережі.

Призначенням сайту є: створення навчального міні-середовища, поширення передового педагогічного досвіду, підвищення власного фахового рівня, підвищення рівня володіння засобами інформаційних технологій; можливість зробити навчально-виховний процес більш гнучким, розміщення навчальних матеріалів, теоретичних матеріалів та зразків робіт, електронних версій посібників, підтримка процесу неперервного підвищення рівня знань з інформаційних технологій для всіх форм навчання, допомога учням та вчителям в самостійній роботі та підготовці до навчально-виховного процесу.

Визначення структури сайту – основне інтелектуальне та методичне завдання щодо організації та розподіленню інформації на веб-ресурсі. Створивши сайт, його необхідно підтримувати і оновлювати, тільки за таких умов він буде залишатися актуальним інструментом спілкування.

Один з основних розділів особистого сайту вчителя є портфоліо. Портфоліо вчителя – це спосіб фіксації, накопичення матеріалів, що демонструють рівень професіоналізму вчителя і вміння вирішувати завдання своєї професійної діяльності. Портфоліо вчителя показує рівень підготовленості педагога і рівень активності у навчальних та позанавчальних видах діяльності. Головне призначення портфоліо – продемонструвати найбільш значущі результати практичної діяльності для оцінки своєї професійної компетенції.

Основними принципами створення особистого сайту є: визначення призначення сайту, визначення структури сайту, підготовка матеріалів для контенту сайту, організація інформації на сайті, вибір доменного імені, хостінгу, дизайну сайту, підтримка сайту.

Т. О. Шамрай

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЗМІШАНА МОДЕЛЬ НАВЧАННЯ

Найважливішою умовою освоєння сучасного знання є формування у студентів здатності самовизначення по відношенню до суджень авторитетів, що взаємозаперечують і суперечливим, наукової області, умінню орієнтуватися в морі інформації, тобто формування у майбутніх фахівців високого рівня інформаційної культури. Якщо викладач організовує матеріал аудиторних вправ в цілісну систему, то студенти зможуть уловити суть проблеми і знайти її розв'язання. Якщо постійно піклуватися про мотивацію учасників, про створення постійної атмосфери особистої зацікавленості в результатах роботи, то психологічні бар'єри автоматично знімаються, і учасники освітнього процесу працюють продуктивно.

Орієнтація на компетентнісний підхід до навчання в Кам'янець-Подільському національному університеті імені Івана Огієнка обумовлює застосування відповідних засобів і методів навчання. До них відносяться різноманітні види лекцій і практичних занять як традиційні, так і інноваційні: з використанням засобів мультимедіа проводяться усі лекції з більшості предметів: по інформаційних технологіях.

Назріла необхідність інтенсифікації навчального процесу через загальновідомі причини привела до ситуації необхідності застосування дистанційних технологій в навчальному процесі. У нашому ВНЗ це виглядає так: лекції читаються з використанням презентацій, відеосюжетів, проводяться експрес-опитування, і тому подібне. Далі студенти спрямовуються викладачами в локальну мережу або LMS для виконання самостійної роботи, для якої матеріали підготовлені заздалегідь.

Змішана модель навчання надає студентам нові можливості по вивченню дисциплін – можна не лише у будь-який час проглянути необхідний матеріал в режимі он-лайн, але і пройти тестування, перевірити свої знання по предмету, ознайомитися з додатковими джерелами, які точно відповідають пройденим темам.

Таким чином, відбувається формування інформаційної компетентності майбутнього фахівця, яка є інтеграційною професійно-особовою характеристикою, що відбиває реально досягнутий рівень підготовки в сфері застосування ІКТ і проявляється в його готовності і здатності використовувати ці технології у своїй професійній діяльності.

О. І. Швець*,
Я. М. Чабанюк**,
І. С. Будз*

*Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів,

**Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів

ЗБІЖНІСТЬ ПРОЦЕДУРИ СТОХАСТИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ В СХЕМІ ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ З ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ В УМОВАХ ЛОКАЛЬНОГО БАЛАНСУ

Неперервна процедура стохастичної апроксимації з імпульсним збуренням в ергодичному марковському середовищі в схемі дифузійної апроксимації [1] визначається стохастичним диференціальним рівнянням:

$$du^\varepsilon(t) = a(t)[C(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^2))dt + d\eta^\varepsilon(t)], \quad u^\varepsilon(0) = u_0 \quad (1)$$

де $C(u, x), u \in R^d$, ε – малий параметр серій [2]. Для генератора марковського процесу $x(t), t \geq 0$, зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in X$, визначений потенціал R_0 [3].

Імпульсний процес збурень $\eta^\varepsilon(t), t \geq 0$ в схемі дифузійної апроксимації задається співвідношенням $\eta^\varepsilon(t) := \varepsilon \eta(t/\varepsilon^2)$, де $\eta(t) = \int_0^t \eta(ds; x(s))$, а $\eta(t; x), t \geq 0, x \in X$ – сімейство процесів з локально незалежними приростами. Процес $\eta^\varepsilon(t), t \geq 0$ визначається генератором [2]

$$\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-2} \int_{R^d} [\varphi(u + \varepsilon v) - \varphi(u)] \Gamma(u; dv; x).$$

Усереднена функція регресії визначається співвідношенням [3]:

$$w C(u) = \int_X \pi(d) \mathfrak{A} C(u; x).$$

Нехай виконується умова локального балансу

$$b(u; x) := \int_{R^d} v \Gamma(u; dv; x) \equiv 0 \quad (2)$$

Теорема. Нехай існує функція Ляпунова $V(u) \in C^5(R^d)$, для усередненої динамічної системи $du(t) = C(u(t))dt$, що забезпечує умову експоненційної стійкості цієї системи:

$$C1: C(u)V'(u) < -cV(u), c > 0,$$

та задовольняє додаткові умови:

$$C2: |B(x)V(u)| \leq c_1(1 + V(u)), c_1 > 0,$$

$$C3: |\delta_\Gamma^\varepsilon(u; x)V(u)| \leq c_2(1 + V(u)), c_2 > 0,$$

$$C4: |C(x)R_0\tilde{C}(x)V(u)| \leq c_3(1 + V(u)), c_3 > 0,$$

$$C5: |B(x)R_0\tilde{C}(x)V(u)| \leq c_4(1 + V(u)), c_4 > 0,$$

$$C6: |\delta_\Gamma^\varepsilon(u; x)R_0\tilde{C}(x)V(u)| \leq c_5(1 + V(u)), c_5 > 0,$$

де

$$\tilde{C}(x)V(u) = [C(x) - L]V(u), \quad LV(u) = PC(u; x)V'(u), \\ B(x)V(u) = B(u; x)V''(u),$$

а $\|\delta_\Gamma^\varepsilon(u; x)V(u)\| \rightarrow 0$, при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Нехай виконується умова локального балансу (2) і нормуюча функція $a(t) > 0$ задовольняє умови:

$$\int_0^\infty a(t)dt = \infty, \int_0^\infty a^2(t)dt < \infty.$$

Тоді, для кожного початкового значення $u^\varepsilon(0) = u_0 \in R^d$, розв'язок рівняння (1) при будь-якому $\varepsilon \leq \varepsilon_0, \varepsilon_0$ – достатньо мале, збігається з ймовірністю 1 до точки рівноваги u^* , що однозначно визначається рівнянням $C(u^*) = 0$:

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} u^\varepsilon(t) = u^*\} = 1.$$

Список використаних джерел:

1. Korolyuk V. Stochastic Systems in Merging Phase Space / V. Korolyuk, N. Limnios. – World Scientific Publishing, 2005. – 330 P.
2. Korolyuk V.S. Random evolutions with locally independent increments on increasing time intervals / V.S. Korolyuk // Journal of Mathematical Sciences. – 2011. – Vol. 179, №. 2. – P. 273-289.
3. Швець О.І. Процедура стохастичної апроксимації з імпульсним збуренням в умовах локального балансу / О.І. Швець, Я.М. Чабанюк, І.С. Будз // Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2013): праці міжн. конф. (Yalta-Foros, 23-27 september 2013). – Київ, 2013 – С. 142-144.

О. Ю. Швець

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

ОБМЕЖЕНІСТЬ ЗБУДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ ЯК ГОЛОВНА ПРИЧИНА ВИНИКНЕННЯ ДЕТЕРМІНОВАНОГО ХАОСУ

Будь-яка динамічна коливальна система складається з двох основних складових. З власне коливальної підсистеми та з джерела збудження коливальності. Не дивлячись на велике різноманіття коливальних підсистем та джерел збудження, при створенні математичних моделей таких об'єктів застосовуються лише дві, принципово різні, парадигми математичного моделювання. Перша з них ґрунтується на припущенні, що потужність джерела збудження набагато перевищує потужність, яку споживає коливальна підсистема. В цьому випадку зворотним впливом коливальної підсистеми на джерело збудження можна знехтувати. Такі системи називаються ідеальними за Зоммерфельдом-Кононенком. Друга парадигма ґрунтується на припущенні, що потужність джерела збуджен-

ня порівняна з потужністю, яку споживає коливальна підсистема. Такі системи називаються неідеальними за Зоммерфельдом-Кононенком, або системами з обмеженим збудженням.

Нагальна потреба глобального енергозбереження вимагає максимальної мінімізації потужності застосованих джерел збудження коливань. Це призводить до того, що потужність джерела збудження стає порівняною з потужністю, спожитою коливальною системою. Саме така ситуація найчастіше має місце у реальних машинах та механізмах. Принципово тільки така ситуація має місце в нанотехнологіях. Дослідження останніх років переконливо свідчать, що застосування в зазначених випадках «ідеальної» парадигми при математичному моделюванні призводить до грубих помилок в описі динаміки системи «джерело збудження коливань – коливальна підсистема». Так, стійкі за Ляпуновим, при теоретичних розрахунках, усталені динамічні режими виявляються нестійкими в натурних експериментах, і навпаки. Ще більш важливим є те, що в багатьох випадках може бути повністю втрачена інформація про реально існуючі детерміновані хаотичні режими.

На прикладі ряду коливальних динамічних систем (електропружних, маятникових та гідромеханічних) за допомогою розробленої в [1] методики встановлена можливість існування в таких системах детермінованого хаосу. Доведено, що причиною виникнення детермінованого хаосу є обмеженість джерела збудження коливань. При цьому встановлено, що при моделюванні таких систем, як систем з необмеженим збудженням існування детермінованого хаосу в них теоретично неможливе.

Побудовані та досліджені декілька типів хаотичних атракторів розглянутих динамічних систем. Детально вивчені спектри ляпуновських характеристичних показників, перерізи та відображення Пуанкаре, розподіли природної інваріантної міри виявлених хаотичних атракторів. Описан ряд сценаріїв переходу до детермінованого хаосу.

Список використаних джерел:

1. Краснополяская Т.С. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением : монография / Т.С. Краснополяская, А.Ю. Швец. – М. ; Ижевск : НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2008. – 280с.

Н. А. Shynkarenko*

О. V. Vovk**

*Opole university of technology, Opole,

**Ivan Franko national university of Lviv, Lviv

COMPUTABLE DOUBLE-SIDED A POSTERIORI ERROR ESTIMATIONS FOR QUADRATIC SERENDIPITY APPROXIMATIONS

We present the technique for obtaining double-sided a posteriori error estimations of finite element (FE) approximations for singular perturbed and/or nonlinear boundary value problems of the following kind

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mu \nabla u) + (\beta_1, \beta_2) \cdot \nabla u + \sigma u = f[u] & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

At first we obtain piecewise quadratic serendipity finite element approximation $u_h \in V_h \subset V$ of the solution of (1) on quadrilateral mesh $\mathfrak{T}_h = \{Q\}$ by techniques that are described in [1], [2]. Then we formulate a posteriori error estimator (AEE) problem in subspace $E_h \subset E$, $V = E \oplus V_h$ with orthogonal basis $\{\varphi_Q\}_{Q \in \mathfrak{T}_h}$ and obtain the estimator $e_Q \in E_h$ on each Q in local coordinates $(\alpha, \beta) \in [-1, 1]^2$ as $e_Q(\alpha, \beta) = \lambda_Q \varphi_Q(\alpha, \beta)$ with unknown $\lambda_Q \in \mathbb{R}$. For each Q we define both $\varphi_K^{Dir}(\alpha, \beta) := (\alpha - \alpha^3)(1 - \beta^2) + (\beta - \beta^3)(1 - \alpha^2)$ for Dirichlet estimator and $\varphi_K^{Neu}(\alpha, \beta) := \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \alpha^3 - \beta^3)$ for Neumann estimator, see also [1], [2]. Dirichlet and Neumann error estimators provide double-sided a posteriori error estimations for a solution of the problem (1).

As example we consider the singularly perturbed problem (1) with the exact solution $u(x, y) = G[m\beta_1(x) + v\beta_2(y)]G[m\beta_2(y) - v\beta_1(x)]$, $m = \cos(\pi/6)$, $v = \sin(\pi/6)$, $G(z) = \frac{1}{2}[1 + \text{erf}(z/\sqrt{2\mu})]$ and $\mu = 10^{-3}$, $\beta_1(x) = x - 0.6$, $\beta_2(y) = y - 0.3$, $\sigma = f = 0$, $g = u|_{\partial\Omega}$. We solve the last one by using quadratic serendipity finite element approximations and estimate an error by using the proposed Dirichlet and Neumann AEEs. We compare the possibilities of the quadratic serendipity approximation (q. serendipity) with linear and bilinear approximations on the Fig. 1.

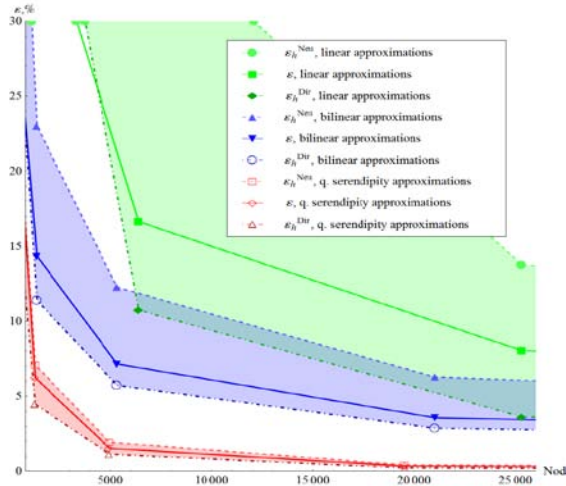


Fig. 1. The convergence of errors and their AEEs of the q. serendipity, bilinear and linear finite elements approximations on uniform meshes

Here $Nod \mathfrak{T}_h$ is the number of nodes in mesh, $\varepsilon := \|u - u_h\|_{1,\Omega} \|u\|_{1,\Omega}^{-1} 100\%$ the exact relative error and $\varepsilon_h := \|e_h\|_{1,\Omega} \|u_h\|_{1,\Omega}^{-1} 100\%$ the relative error estimation, where $e_h = \sum_{Q \in \mathfrak{T}_h} e_Q$ is the appropriate AEE.

Fig. 1. shows that the quadratic serendipity approximations and its AEEs have a significant advantages over linear and bilinear analogues.

References:

1. Ostapov O.Yu. A posteriori error estimator and h-adaptive finite element method for diffusion-advection-reaction problems / O.Yu. Ostapov, H.A. Shynkarenko, O.V. Vovk // Recent Advances in Computational Mechanics, Taylor & Francis Group. – London, 2014. – P. 329-337.
2. Shynkarenko H.A. A posteriori error estimations for finite element approximations on quadrilateral meshes / H.A. Shynkarenko, O.V. Vovk // Journal of Computational & Applied Math. – 2013, – N 3(113). – P. 107–118.

С. В. Щербовських

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НАДІЙНОСТІ ДЛЯ АНАЛІЗУ ПРИЧИН НЕПРАЦЕЗДАТНОСТІ СИСТЕМИ ІЗ СКЛАДНИМ ЗАГАЛЬНИМ НАВАНТАЖУВАЛЬНИМ РЕЗЕРВУВАННЯМ

Метою дослідження є розроблення математичної моделі надійності, яка призначена для аналізу причин непрацездатності системи із складним загальним навантажувальним резервуванням. Кожній причині непрацездатності відповідає унікальний набір непрацездатних елементів, який називають перетином, а усій сукупності причин – мінімальна множина перетинів. Завдання аналізу полягає у визначенні вмісту такої множини та ймовірнісних характеристик усіх її перетинів. Результати даного аналізу є науковою основою для розроблення рекомендацій щодо забезпечення надійності систем даного класу.

Досліджувана система складена із чотирьох елементів (рис. 1а): двох генераторів G1 і G2 та двох трансформаторів TV1 і TV2. Генератор G1 та трансформатор TV1 утворюють першу підсистему, а G2 і TV2 – другу. Підсистеми працюють за алгоритмом навантажувального резервування, тобто якщо обидві підсистеми працездатні, то навантаження поділяється між ними порівну. Якщо одна із підсистем стає непрацездатною, то навантаження іншої подвоюється. Засоби технічної діагностики та перемикавання вважаємо ідеальними, а тривалість зміни навантаження підсистемами миттєвою. Надійність системи формалізовано динамічним деревом відмов (рис. 1б).

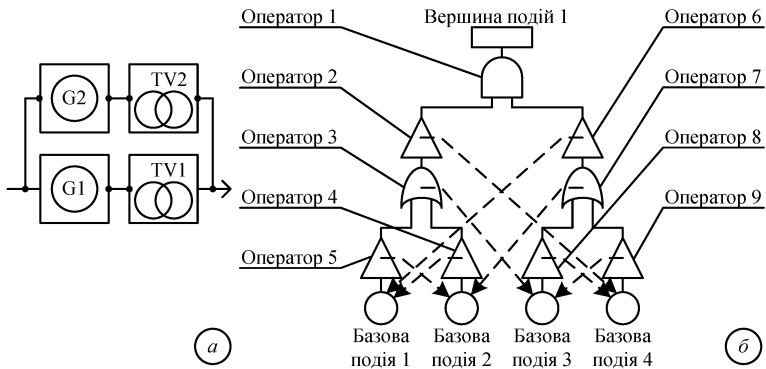


Рис. 1. Функціональна схема системи та динамічне дерево відмов системи

Динамічне дерево відмов є математичною моделлю, яка описує умову непрацездатності системи та умови зміни навантаження на основі блоків, що позначають логічні операції. Непрацездатність системи полягає у тому, що система нездатна забезпечити енергією споживачів, які підключені до її виходу. Вважаємо, що така непрацездатність катастрофічна. Якщо настають непрацездатності окремих елементів, проте система зберігає працездатність, то такі елементи відновлюються стільки разів, скільки у цьому існує потреба. Якщо ж уся система стає непрацездатною, то відновлення елементів системи вважається неможливим. Такий стан системи настає, якщо одночасно непрацездатні обидві підсистеми, а непрацездатність кожної із підсистем настає якщо непрацездатний хоча б один із її елементів. Напрацювання до відмови елементів розподілено за законом Вейбулла, а тривалість ремонтування – експоненціально.

У даній моделі надійності на основі операторів динамічного дерева відмов задано такі умови перерозподілу навантаження:

- зміна навантаження обох елементів однієї підсистеми, залежно від стану іншої підсистеми;
- зміна навантаження елемента підсистеми, залежно від стану іншого її елемента.

На підставі наведеного вище динамічного дерева відмов згідно із [1; 2, с. 67] побудовано граф станів та переходів системи, який містить 9 станів та 16 переходів, а також сформована розщеплена однорідна марковська модель, що складається із 144 рівнянь. Ймовірнісні характеристики мінімальних перетинів системи обчислено за марковською моделлю на основі методу Розенброка, що обумовлено її жорсткістю у наслідок розкиду параметрів процесів напрацювання та ремонтування. Мінімальна множина перетинів системи містить перетини «TV1–TV2», «G1–TV2», «TV1–G2» та «G1–G2». На підставі даних про перетини робимо висновок, що для зменшення ймовірності відмови системи для моменту часу 10 000 год. необхідно вжити заходів щодо підвищення безвідмовності трансформаторів TV1 та TV2, оскільки їх

одночасна непрацездатність є найімовірнішою причиною непрацездатності системи із відносною вагою 34.1%.

Список використаних джерел:

1. Codetta-Raiteri D. Integrating several formalisms in order to increase Fault Trees' modeling power / D. Codetta-Raiteri // Reliability Engineering & System Safety. – 2011. – Vol. 96, No 5. – P. 534-544.
2. Щербовських С.В. Математичні моделі та методи для визначення характеристик надійності багатотермінальних систем із урахуванням перерозподілу навантаження : монографія / С.В. Щербовських. – Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2012. – 296 с.

Н. Ю. Щестюк

Національний університет «Києво-Могилянська академія», м. Київ

ОЦІНКА СПРАВЕДЛИВОЇ ЦІНИ ОПЦІОНІВ В МОДИФІКАЦІЯХ МОДЕЛІ ХЕЙДІ-ЛЕОНЕНКА

Розглядається модель для ціннового процесу, альтернативна до моделі Блека-Шоулза, що використовує фрактальний «активний» час. Ця модель породжується стандартним Броунівським рухом, що залежить від «нового» «операційного» часу:

$$\log P_t = \log P_0 + \mu t + \theta T_t + \sigma B(T_t), \quad (1)$$

де $\mu \in R$, $\sigma > 0$ визначають дріт та дифузію, $\theta \in R$ – параметр асиметрії, $\{T_t, t \geq 0\}$ є додатній неспадний процес, із стаціонарними але не обов'язково незалежними приростами $\tau_t = T_t - T_{t-1}$.

Завдяки тому, що існує досить багато способів для конструкції "активного часу", можна побудувати багато модифікацій моделі Хейді-Леоненка. Ми покажемо та проаналізуємо дві модифікації даної моделі, перша коли $\{\tau_t\}$ має обернений гамма розподіл (що вже було зроблено в різних наукових роботах, але не в контексті оцінки вартості опціону), та другої коли $\{\tau_t\}$ має розподіл рівний розподілу сумми двох випадкових величин, кожна з яких має обернений гамма розподіл. Друга модель, на відміну від першої, ще не була досі розглянута та опублікована в наукових роботах. В обох випадках акцент робиться на оцінці вартості опціону згідно з моделлю і буде представлена те реалізована формула обчислення вартості опціону. Під реалізацією розуміється опціонний калькулятор, завдяки якому можна буде подивитись та порівняти обчислену вартість опціону для кожної моделі та порівняти ці результати з реальними даними, які взяті з надійних та авторитетних джерел.

Список використаних джерел:

1. Giron F.J. A note on the convolution of inverted gamma distributions with applications to the Behrens-Fisher distribution / F.J.Giron., C.del Castillo // Statistic and Operation Research. – 2001. – Vol. 95, №1. – P. 39-44.

2. Bibly B.M. Diffusion-type models with given marginal distribution and autocorrelation function Bernoulli / B.M. Bibly, M.I. Skowgaard. – 2005. – Vol.11, №2. – P. 191-200.
3. Щестюк Н. Справедлива ціна Європейських опціонів для гамма-обернених дифузійних моделей ціноутворення акцій / Н. Щестюк, А.Фарфур // Наукові Записки Наукма, фіз.-мат. науки. – 2013. – Т. 139. – С. 30-33.
4. Heyde C.C. Student Processes. Applied Probability / C.C. Heyde, N.N. Leonenko. – 2005. – P. 342-365.
5. Режим доступу: <http://www.nasdag.com>.

О. В. Щирба

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ У ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ЗАЛЕЖНОСТЯХ

Сучасні методи розв'язування великомасштабних класів задач використовують два види методів: прямі методи, які в основному, базуються на деяких коллокаціях в тому числі спеціальних параметризаціях управління, і непрямі методи, які базуються або на декількох методах, або методах адаптивної коллокацій. Гібридні методи комбінують: на першому кроці, використовують деякий прямий метод до тих пір, поки спеціальні параметризовані змінні керування не забезпечать грубе наближення послідовності до оптимального розв'язку; потім на другому кроці, працює непрямий метод, щоб вирішити нарешті проблему з високою точністю.

Потрібне розумне поєднання підходів функціонального аналізу, що реалізує ідеї прямих і непрямих методів в просторах з нескінченною розмірністю, а не в скінченно вимірних. Є декілька можливостей такого розширення для функціонального простору [1]. Розширення методів типу внутрішньої точки з скінченновимірного на нескінченновимірний випадки відбувається не зовсім просто: зрештою, поняття логарифмічної бар'єрної функції більше немає сенсу в нескінченновимірному налаштуванні. На щастя, версія взаємозалежності методу внутрішньої точки, в тому числі поняття центрального шляху, природним чином переноситься на нескінченну розмірність. Однак, деякі застережливі теоретичні міркування необхідні: відома невідповідність з двома нормами [2] настійно рекомендує використання різних норм для обробки диференційованості, з одного боку, і опуклості з іншого боку.

Умови оптимальності сформульовано в контексті задачі нелінійного програмування. У порівнянні з скінченновимірними випадками, необхідні сильніші припущення, щоб гарантувати існування множників Лагранжа для нескінченновимірних задач.

У самому загальному випадку задача оптимізації може бути сформульований так

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin} J(x), \\ g(x) \in K, \end{aligned} \tag{1}$$

де J – функціонал визначений в дійсному банаховому просторі X , g – відображення з X в дійсний банаховий просторі Z і K – опуклий замкнений конус в Z . Так як будь-який замкнутий опуклий конус $K \subset Z$ визначає частковий порядок на Z , ми будемо писати $z_1 \leq z_2$, якщо $z_2 - z_1 \in K$. Нехай $K^+ := \{ l \in Z^* : \langle l, k \rangle \geq 0, k \in K \}$ спряжений конус до K . Функціонали J і g вважаються двічі неперервнодиференційованими по Фреше.

Теорема 1. (Необхідні умови) Нехай x – регулярний розв’язок задачі (1). Тоді існує деякий елемент $l \in K^+$ такий, що

$$\begin{aligned} J'(x) - g'(x)^* l &= 0, \\ \langle l, g(x) \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Теорема 2. (Достатні умови) Нехай x – регулярний розв’язок задачі (1) і існує множник Лагранжа $l \in K^+$ такий, що $J'(x) - g'(x)^* l = 0$ і $\langle l, g(x) \rangle = 0$. Покладемо $L(x) = J(x) - \langle l, g(x) \rangle$. Припустимо, що існують $\delta > 0$ і $\beta > 0$ такі, що

$$\langle L''(x)h, h \rangle \geq \delta \|h\|^2 \quad (3)$$

для всіх $g'(x)h \in K + IRg(x)$ і $\langle l, g'(x)h \rangle \leq \beta \|h\|$. Тоді існує окіл U точки x такий, що x буде єдиним локальним розв’язком задачі (1) в U .

Теорема 2 вимагає, щоб в цьому випадку $L''(u^*)$ була додатньовизначена на всьому просторі X_u . Починаючи з $L''(0)(h, h) = 2\|h\|_2^2$, це задовольняє дану вимогу тільки тоді, коли $L_2 \subset X_u$, що протирічить вимозі $X_u \subset L_\infty$ регулярності u^* . Таким чином, теорема 2 не застосовується.

Ці розбіжності норми можуть бути вирішені за допомогою різних норм самого простору і умови коерцитивності (3).

Список використаних джерел:

1. Alt W. The Lagrange-Newton method for state constrained optimal control problems / W. Alt, K. Malanowski // Comput. Optim. Appl. – 1995. – P. 217-239.
2. Malanowski K. Sufficient optimality conditions for optimal control subject to state constraints / K. Malanowski // SIAM J. Control Optimization. – 1997. – P. 205-227.

І. В. Юрченко, В. К. Ясинський

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

**ПРО ПОВЕДІНКУ ДРУГОГО МОМЕНТУ РОЗВ'ЯЗКУ
ЛІНІЙНОГО АВТОНОМНОГО СТОХАСТИЧНОГО РІВНЯННЯ
В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ З ВИПАДКОВИМИ ПАРАМЕТРАМИ
В ПРАВИЙ ЧАСТИНІ**

Розглянемо стохастичний експеримент з базовим імовірнісним простором $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, $\mathbb{F} \equiv \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ – фільтрація, де задана функція $u(t, x, \omega) \in$ вимірною з імовірністю одиниця за t та x відносно мінімальної σ -алгебри $\mathcal{B}([0, T], \mathbb{R}^1)$ борелевих множин на площині та для якої

$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E} \left\{ |u(t, x, \omega)|^2 \right\} dx < \infty$ для всіх $t \in [0, T]$, $\mathbb{E} \{ \bullet \}$ – математичне сподівання, $T \in [0, \infty)$. Простір функцій $\{u(t, x, \omega)\}$, що володіє властивістю інтегровності, позначимо через \mathfrak{M}_T . У просторі \mathfrak{M}_T слід ввести норму вигляду

$\|u(t, x, \omega)\|^2 \equiv \int_0^T \mathbb{E}_u(t) dt = \int_0^T \mathbb{E} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx \right] dt$. Позначимо через

$Q(A, q, p) \equiv \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{kj} q^k p^j$, де $A \equiv \{a_{kj}\}$ – дійснозначна матриця розмірності $n \times m$, складена з елементів $a_{kj} \in \mathbb{R}^1$. Розглянемо на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ задачу Коші для лінійного стохастичного диференціального рівняння з частинними похідними (ЛСДРЧП) вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[Q \left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \right] + Q \left(B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) = \\ & = \varphi(\xi(\omega)) Q \left(C, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \frac{dw(t, \omega)}{dt}, Q \left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \Big|_{t=0} = [Qu], \\ & B \equiv \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{k,n}, b_{ij} \in \mathbb{R}^1; C \equiv \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{k,n}, c_{ij} \in \mathbb{R}^1, \varphi(\bullet) - \end{aligned}$$

берівська функція з областю значень \mathbb{R}^1 , $\xi(\omega)$ – випадкова величина, задана щільністю $p_\xi(x)$ (або функцією розподілу), $w(t, \omega)$ – одновимірний винерів процес, при цьому $\xi(\omega)$ не залежить від $w(t, \omega)$.

Доведено існування сильного розв'язку ЛСДРЧП у відповідному просторі з випадковими параметрами. Отримані достатні умови в термінах коефіцієнтів ЛСДРЧП асимптотичної стійкості й нестійкості в середньому квадратичному сильного розв'язку цього рівняння.

Список використаних джерел:

1. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – К. : Ин-т математики АН УССР. – 1981. – С. 25-59.
2. Царьков Е.Ф. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения / Е.Ф. Царьков, В.К. Ясинский. – Рига : Ориентир, 1992. – 301 с.
3. Перун Г.М. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных / Г.М. Перун, В.К. Ясинский // Укр. мат. журн. – 1993. – Т.45, № 9. – С. 1773-1781.

О. Ярова, Я. І. Єлейко

СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕВОЛЮЦІЇ СИНТЕТИЧНИХ ПОКАЗНИКІВ

Синтетичні показники є узагальнюючими показниками, що характеризують економічний об'єкт та економічну систему в цілому. Оскільки вони характеризують стан економічної системи в країні, то виникає питання щодо прогнозування цих значень на наступні роки, знаючи економічну ситуацію станом на сьогоднішній день. Метою роботи є стохастичне моделювання еволюції синтетичного показника.

Як відомо, синтетичні показники набувають значення з інтервалу $[0;1]$. Зазвичай знаходять значення синтетичних показників в усіх регіонах країни. Це дозволяє побачити стан економіки, як у різних регіонах, так і в країні в цілому.

Розглянемо деяку державу. Нехай її адміністративний поділ передбачає n регіонів. Припустимо, що нам відомі синтетичні показники кожного з цих регіонів за три роки, при чому роки взяті послідовно. За три роки синтетичний показник змінювався двічі. Протягом цієї еволюції показник міг зрости, спасти або ж залишитися тим самим. Відповідно до цього, доречно розбити регіони на класи. Таке розбиття дозволяє в кожному з класів розглядати синтетичні показники, стани в яких змінювалися за однаковим принципом. Класифікація може бути наступною: перший клас містить регіони, у яких спостерігається зростання та спадання синтетичного показника, другий – лише спад, третій – спадання і зростання, четвертий – лише зростання, а в п'ятому синтетичний показник змінюється лише в третьому році при порівнянні з другим. Нехай ця зміна буде спадом. Проте класифікація може бути й іншою.

У кожному з цих класів міститься певна кількість регіонів. Нехай в i класі знаходиться k_i регіонів, при чому їх сума дорівнює n . Для того, щоб спрогнозувати ситуацію в наступному році потрібно знайти ймовірність зростання та спаду синтетичного показника у кожному з класів. В першому класі синтетичний показник після зростання спадає. Аналізуючи ситуацію легко бачити, що спадання показника в другому році є у другому та третьому станах. Оскільки в третьому стані після цього спаду спостерігається зрос-

тання, то ймовірність того, що синтетичний показник у першому класі станом уже на четвертий рік зросте становить $k_3 / (k_2 + k_3)$. Відповідно ймовірність спаду становить $k_2 / (k_2 + k_3)$. Проте синтетичний показник на одному з цих етапів міг залишитись незмінним. Оскільки в даній класифікації це передбачається лише в п'ятому класі, і до того ж лише при одному з переходів, то ймовірність того, що синтетичний показник не зміниться становить $k_5 / 2n$. Далі для повного аналізу ситуації слід побудувати матрицю перехідних ймовірностей. В данному випадку це буде матриця розміром 5 на 5. Значення p_{11} – це ймовірність того, що синтетичний показник на наступний рік залишиться без змін, p_{12} – ймовірність того, що синтетичний показник зміниться за тим же принципом, що й у другому класі, і т.д. Розглянемо перший клас. В матриці перехідних ймовірностей першим значенням буде $k_5 / 2n$, другим $(1 - k_5 / 2n) * k_2 / (k_2 + k_3)$, третім $(1 - k_5 / 2n) * k_3 / (k_2 + k_3)$. Четверте і п'яте значення у першому рядку будуть нулі, оскільки станом на третій рік спостерігається спад синтетичного показника у регіонах першого класу і тому він не може змінюватись за принципом четвертого та п'ятого класів, у яких при першій зміні цей стан не спостерігається. За таким принципом будується матриця перехідних ймовірностей.

Отож, маючи синтетичні показники і матрицю перехідних ймовірностей, можна спрогнозувати економічну ситуацію в наступному році.

ЗМІСТ

Андруховський А. Б. Використання сервісів Windows Azure для організації педагогічного тестування	3
Анікушин А. В., Номіровський Д. А. Аналіз лінійних псевдогіперболічних моделей В деяких класах узагальнених функцій	4
Антоненко Л. О., Клечак І. Р. Оптимізація живильного середовища для росту базидіальних грибів <i>Trametes Versicolor</i> і <i>T. Zonatus</i>	5
Атаманюк А. В. Моделювання оптимальних перевезень в логістиці	7
Бартіш М. Я., Ковальчук О. В. Трикроковий різницевий аналог методу із порядком збіжності $1 + \sqrt{2}$ для розв'язування систем нелінійних рівнянь	8
Бахрушин В. С., Бахрушин А. В. Застосування методів багатокритеріального прийняття рішень при відборі абітурієнтів	9
Бачишина Л. Д. Аналіз динаміки врожайності зернових культур в регіонах України.....	10
Бейко І. В. Смартфони та Wolfram Alpha відкривають епоху освіти найвищої якості	11
Бейко І. В., Поліщук А., Полторацький М. В., Шаповал М. Дослідження та оптимізація динамічних характеристик керованих систем з використанням чисельних експериментів	13
Вейко І., Zinko P. Optimized Simulators of Stochastic Optimization.....	14
Вейко І., Shchyryba O., Shchyryba V. Implementation of Asymptotic Solve-Operators and Interior Point Algorithms in Search for Optimal Controls.....	15
Білокур В. О. Регулювання потужності гідроелектричної станції під час паводку	19
Бомба А. Я., Гладка О. М. Синтез числових методів комплексного аналізу, сумарних зображень та декомпозиції Задачі при математичному моделюванні нелінійних процесів витіснення у сланцевих пластах	20
Бомба А. Я., Крока Л. Л. Числовий метод комплексного аналізу ідентифікації зон підвищеної провідності	22
Бомба А. Я., Ярощак С. В. Методи комплексного аналізу моделювання трифазної фільтрації в нафтогазових пластах	22
Velev Dimiter, Plamena Zlateva Social Networking Communications in Emergency Management.....	23
Верлань Д. А., Корнеев А.М. О решении интегро-дифференциальных уравнений с разделяющимися ядрами.....	24
Венгерський П. С. Чисельне дослідження математичної моделі сумісного стоку поверхневих і ґрунтових вод з території водозбору	26
Власюк А.П., Дроздовський Т.А. Математичне моделювання зміни напружено-деформованого стану осесиметричних областей ґрунту при нагнітанні в них в'язучого розчину комбінованим методом радіальних базисних функцій та чисельних конформних відображень	30
Власюк А. П., Жуковський В.В. Математичне моделювання вертикальної міграції радіонуклідів в каталітичному пористому середовищі до фільтрів-вловлювачів в зоні неповного насичення у лінійному випадку	32

Власюк А. П., Федорчук Н. А. Чисельне моделювання напружено-деформованого стану багат шарового ґрунтового масиву з врахуванням тепло-масоперенесення при наявності вільної поверхні та сил зв'язності.....	34
Власюк А. П., Цветкова Т. П. Чисельне моделювання солеперенесення при сумісній нестационарній фільтрації і вологоперенесення в областях повного та неповного насичення	35
Габуза Т. В., Сопронюк Ф. О. Принцип максимуму для систем із післядією та зміною вимірності фазового простору	37
Геделевич Є. В. Економіко-математичне моделювання операційного ризику	40
Гладун Л. В., Прокопець В. Е. Рух цілком керованої системи до межі при наявності перешкоди	41
Гнатюк В. О., Гудима У. В. Метод січної площини розв'язування задачі найкращої у розумінні сім'ї опуклих функцій апроксимації компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором.....	43
Демчук М. Б., Наконечний О. Г. Числовий експеримент на основі моделей цементації ґрунту з вільними рухомими межами	44
Дерев'янюк Т. О. Оптимальне керування гіперболічними системами напівлінійних стохастичних рівнянь першого порядку	45
Довгай В. В. Особливості підготовки спеціалістів для дослідження та оптимізації недетермінованих технічних систем за допомогою моделювання їх функціонування	47
Дяченко М. П., Людвиченко В. О. Про комп'ютерну технологію обчислення коренів системи нелінійних скалярних рівнянь із заданою точністю за нев'язкою.....	48
Дяченко М. П., Людвиченко В. О., Тарасенко Т. А. Про обчислення вартості харчування людини на основі моделей математичної статистики і задачі дієти лінійного програмування.....	52
Дячук О. А., Подолець Р. З. Інтегрований підхід до моделювання та оптимізації енергетичного балансу України.....	53
Журавська Г. В., Демидюк Т. П. Візуалізація задач математичної фізики за допомогою мови програмування процесінг.....	55
Журавська Г. В., Демидюк Т. П. Мова програмування процесінг для візуалізації задач математичної фізики	57
Заболотько Т. О., Івасишен С. Д. Повне аналітичне описання фундаментального розв'язку одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами	59
Задорожня Н. В., Слейко Я. І. Застосування кластерного аналізу для оцінки середнього рівня знань математики по регіонах України за результатами зовнішнього незалежного оцінювання	60
Іваненко В. І. Система рішення і нестохастична випадковість.....	63
Іванюк В. А., Понеділок В. В. Чисельна реалізації інтегральних рядів Вольтерри.....	64
Івасишен С. Д. Параболічні рівняння та параболічні моделі	65
Івашенко В. П., Швачич Г. Г., Ткач М. А. О проблеме численно-аналитической концепция визуализации векторов решений	65
Ілашук М. С., Сопронюк Є. Ф. Параметрична оптимізація в системах зі змінною вимірністю фазового простору.....	68

Каримов М. М., Кадыров М. М., Сагатова С. М. Моделирование диалогового взаимодействия «тьютор – студент»	69
Карпенко В. М., Стасенко В. М., Нікорюк М.С., Карпенко О. В. Модель процесу освоєння паливно-енергетичних ресурсів фондом свердловин.....	70
Кінаш А. В., Чабанюк Я. М., Хімка У. Т. Умова дисипативності для граничного дифузійного процесу	72
Kitushin V. G., Bik F. L., Ali Zada P. G. Improvement of the Reliable Power Systems post Crisis-Chaos Development Designing (Approach and Methods)	73
Коваленко К. Г., Сівецький В. І., Сокольський О. І. Математичне моделювання процесу формування погонажних виробів методом вільної екструзії.....	74
Коваленко О. Є. Інтеграція знань в агентно-орієнтовані системи підтримки прийняття рішень.....	77
Ковальська І. Б. Про наближення узагальненими сумами Зігмунда $\overline{\psi}$ – інтегралів в матриці L_p	78
Колосов О. Є., Сівецький В. І., Кривошеєв В. С., Колосова О. П. Використання методів математичного та експериментально-статистичного моделювання для оптимізації технологічних параметрів ультразвукового одержання полімерних композиційних матеріалів	80
Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних циліндричних шарах	83
Коновал В., Мороз В. Реалізація інтегрального методу для аналізу стійкості електроенергетичних систем	84
Конець М. М. Система інтегро-диференціальних рівнянь Ріккати з частинними похідними.....	85
Косаревич К. В. Про існування та форму «виправленої» рівноваги за нешом у грі з випадковими стратегіями для класу квадратичних функцій витрат.....	86
Костьян Н. Л. Об одном методе аналитического представления экспериментальных зависимостей	88
Кукурба В. Р., Чабанюк Я. М., Маланчук О. М., Семенюк С. А. Процедура стохастичної оптимізації для моделі тестування з напівмарковськими переключеннями	89
Кулик Г. М. Наближення функцій сумами Валле-Пуссена	91
Кунинець А. В. Чисельне дослідження стаціонарних процесів теплопровідності або дифузії в циліндричній системі координат.....	93
Кух А.М. 3D моделювання засобами T-FLEX	94
Кух О. М., Кух А. М. Модель прогнозування рівня знань студента	95
Кушлик Б. Р. Концепція поопераційного контролю та засоби її реалізації на поліграфічних підприємствах	96
Кушлик-Дивульська О. І. Порівняння оцінювання знань з математики	98
Листопадова В. В. Про розв'язність багатоточкової задачі для диференціальних рівнянь нейтрального типу з параметрами	99

Лукович В. В. Проста математична модель розрахунку потенціалу на зовнішній поверхні ізоляції магістрального трубопроводу	99
Махович О. І. Особливості числової реалізації моделі розподіленої механічної ланки з використанням різних форм математичного опису.....	103
Маценко В. Г. Аналіз математичної моделі динаміки вікової структури біологічних популяцій з внутрішньовидовою конкуренцією	105
Мединський І. П., Івасишен С. Д. Про деякі вироджені параболічні моделі.....	106
Михайлова І. Ю. Математичне моделювання теплових полів у технологічних процесах безконтактної лазерної деформації	106
Мороз В., Болкот П., Снітков І., Снітков К. Аналіз реалізацій визначення кута при обробці сигналів з індукційних давачів кута.....	108
Мороз В., Сольський М. Вплив методів представлення дискретних передатних функцій на реалізацію цифрових систем з обмеженою розрядністю	109
Мосенцова Л. В. Особенности решения задач интерпретации результатов наблюдений в интегральной постановке.....	110
Мястковська М. О. Використання електронних таблиць MS Excel для статистичної обробки даних педагогічних досліджень	111
Наконечная О. А. Компьютерная реализация моделей датчиков сигналов акустической эмиссии и решения задачи восстановления входных сигналов	112
Овсак О. С. Модернізація методу аналізу вертикальної структури хмарового шару атмосфери планети гіганта	114
Панчук В. І. Керування процесом змиву ґрунту з використанням теорії прибережного шару.....	115
Пасічник Г. С., Івасишен С. Д. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Соніна зі зростаючими коефіцієнтами	117
Пасичниченко И. А. Принцип гарантированного результата в задачах принятия решений в условиях массовых испытаний.....	117
Пашко А. О. Моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів з неперервним спектром	120
Перцов А. С. Про еквівалентність задачі гарантованого оцінювання лінійних функціоналів від розв'язків рівнянь лінійної теорії пружності до деякої задачі оптимального керування	122
Пилипюк Т. М. Інтегральне зображення розв'язку мішаної задачі спряження для одного класу еволюційних рівнянь параболічного типу.....	123
Підвальна Я. В. Комп'ютерні алгоритми для розв'язування задачі швидкодії.....	124
Попович В. С., Ракоча І. І. Математичне моделювання та визначення термопружного стану двошарової термочутливої пластини за складного нагріву.....	125
Прищепа О. В. Про одну систему з обмеженнями на число спроб почати обслуговування	127
Родіна В. В. Моделювання процесів міграції небезпечних полютантів в екосистемах на базі камерної моделі засобами ГІС	129

Розумовська О. Б. Інтерактивні методи навчання в практиці вищої школи	132
Романчук К. Г. Моделювання нетипових сценаріїв аварій на гідроенергетичних об'єктах внаслідок відмов автоматики	136
Романюк В. М. Використання системи LMS при організації процесу навчання студентів у ВНЗ	137
Savula Ya., Styahar A. Numerical Investigation of Girkman Problem.....	138
Сагатов М. В., Ирмухамедова Р. М., Равилов Ш. М. Аналіз повреждений в композиционных материалах с применением метода акустической эмиссии и феноменологического подхода	140
Сверстюк А. С. Оптимальне керування стадією елонгації полімеразно-ланцюгової реакції	141
Селезньов С. В. Приклади математичних моделей задач лінійного програмування в соціології та фінансовій математиці.....	143
Селезньова Н. П. Узгодженість індивідуальних переваг	146
Сеньо П. С. Топологія простору лінійних функціональних інтервалів.....	149
Ситник О. О., Протасов С. Ю. Інтерполяційний метод отримання передатної функції по перехідній характеристиці при формуванні ядер інтегральних макромоделей	149
Sikora V. S. Orders of Metasymmetrical Groups of Infinite Rank.....	152
Слободянюк О. В., Баранник В. В., Туренко С. В., Акімов Р. І. Проектування цифрових фільтрів за допомогою структурного кодування	153
Смалько О. А. Модель електронного навчання «1 учень – 1 комп'ютер».....	154
Сорич В. А., Сорич Н. М. Наближення лінійних комбінацій згортки з ядрами Пуассона сумами Валле-Пуссена в середньому	156
Стефанишин Д. В. Метод прогнозного моделювання показників стану гідроспоруд за даними моніторингу	157
Стоян В. А., Кулигіна А. А. Програмно-аналітичне моделювання розв'язків неповно визначених задач математичної фізики.....	159
Судак Н. І. Комп'ютер як наочний засіб при вивченні тригонометричних функцій	160
Татауров В. П. Використання хмарних технологій у підготовці майбутніх вчителів початкових класів	161
Тацій Р. М., Пазен О. Ю. Моделювання процесу теплообміну в багатопаровій стінці системою диференціальних рівнянь з імпульсною дією.....	162
Тихоход В. А. Параллельный алгоритм метода квадратур решения систем интегральных уравнений Вольтерра II рода.....	164
Топчий Д. О. The Theory of Plafales: новий підхід до конструювання базисних функцій на трикутнику першого порядку	166
Турчина Н. І., Івасишен С. Д. Вектор-функції Гріна крайових задач для модельного рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова нормального Марковського процесу.....	167
Фірман Т. І. Задача оптимального керування зліченими гіперболічними системами лінійних рівнянь першого порядку	168

Федорчук В. А. Оборотна комп'ютерна модель колони бурильних труб як неоднорідної розподіленої ланки.....	169
Федорчук Т. А. Моделювання як засіб розвитку теоретичного мислення учнів молодших класів	171
Фратавчан Т. М., Івасюк Г. П., Івасишен С. Д. Про властивості розв'язків деяких ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова	172
Фуртат Ю.О., Велев Д. Про структуру і функціональні характеристики програмних засобів персоналізації інтерфейсів автоматизованих систем.....	173
Ходневич Я. В. Результати моделювання інтенсивності водного потоку при оцінці деформацій русла в місці обтікання донних гряд.....	174
Цебенко А. М. Оптимальне керування системами, стан яких описується задачею без початкових умов для параболічних рівнянь.....	175
Чабанюк Я. М., Горун П. П., Гошко Л. В. Асимптотична поведінка стрибкової процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації	176
Чевська К. С. Використання додатків Office365 для організації спільної роботи	178
Чепелев М. Г. Оцінка еластичності заміщення між працею та капіталом для моделі загальної рівноваги України.....	179
Черевко І. М., Дорош А. Б. Застосування сплайн-функцій для апроксимації розв'язків лінійних крайових задач із запізненням	181
Чмир О. Ю., Карабин О. О. Про застосування пакету Maple до розв'язування прикладних задач в курсі вищої математики.....	182
Шамрай Л. В., Бориславська К. О. Персональний сайт як освітній інструмент саморозвитку вчителя і взаємодії з учнями та колегами.....	184
Шамрай Т. О. Змішана модель навчання.....	185
Швець О. І., Чабанюк Я. М., Будз І. С. Збіжність процедури стохастичної апроксимації в схемі дифузійної апроксимації з імпульсним збуренням в умовах локального балансу	186
Швець О. Ю. Обмеженість збудження динамічної системи як головна причина виникнення детермінованого хаосу.....	187
Shynkarenko H. A., Vovk O. V. Computable Double-Sided a Posteriori error Estimations for Quadratic Serendipity Approximations.....	188
Щербовських С. В. Математична модель надійності для аналізу причин непрацездатності системи із складним загальним навантажувальним резервуванням.....	190
Щестюк Н. Ю. Оцінка справедливої ціни опціонів в модифікаціях моделі Хейді-Леоненка	192
Щирба О. В. Умови оптимальності у функціональних залежностях.....	193
Юрченко І. В., Ясинський В. К. Про поведінку другого моменту розв'язку лінійного автономного стохастичного рівняння в частинних похідних з випадковими параметрами в правій частині	195
Ярова О., Єлейко Я. І. Статистичне моделювання еволюції синтетичних показників	196

Міністерство освіти і науки України, Академія наук вищої школи України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
Інститут математики НАН України
Міжнародний інститут прикладного системного аналізу (Австрія)
Ташкентський державний технічний університет (Узбекистан)
OKAN UNIVERSITY (Istanbul, Turkish)
Люблінський технологічний університет (Польща)
Університет Вітаутаса Великого (Литва)

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ, ПРОГНОЗУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ

**ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ VI МІЖНАРОДНОЇ
НАУКОВОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ**

Підписано до друку 02.04.2014 р. Гарнітура «Таймс».
Папір офсетний. Друк різнографічний.
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 12. Обл.-вид. арк. 11,8.
Тираж 100. Зам. № 634.

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Надруковано в Кам'янець-Подільському національному
університеті імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.